

INŽENJERSKA HIDROLOGIJA

Jasna Plavšić



Građevinski fakultet
Univerziteta u Beogradu

Beograd, 2019.

Jasna Plavšić
INŽENJERSKA HIDROLOGIJA

Izdavač
Univerzitet u Beogradu – Građevinski fakultet, Beograd, 2019.

Za izdavača
Prof. dr Vladan Kuzmanović, dekan

Recenzenti
Prof. dr Jovan Despotović, dipl. građ. inž.
Prof. dr Marko Ivetić, dipl. građ. inž.

Grafičko rešenje korica
Omnibus, Beograd

Štampa
Dedraplast, Beograd

Tiraž
250 primeraka

Knjiga odobrena za štampu odlukom Nastavno-naučnog veća Građevinskog fakulteta
Univerziteta u Beogradu na sednici od 14.6.2018.

© 2019 Građevinski fakultet Univerziteta u Beogradu.
Sva prava zadržavaju izdavač i autor. Zabranjeno preštampavanje i kopiranje.

CIP- Каталогизација у публикацији
Народна библиотека Србије

556(075.8)

ПЛАВШИЋ, Јасна, 1963-
Inženjerska hidrologija / Jasna Plavšić. - Beograd : Univerzitet, Građevinski
fakultet, 2019 (Beograd : Dedraplast). - VI, 366 str. : ilustr. ; 24 cm

Tiraž 250. - Dodaci: str. 337-359. - Napomene i bibliografske reference uz tekst. -
Bibliografija: str. 327-336. - Registar.

ISBN 978-86-7518-207-8

a) Хидрологија

COBISS.SR-ID 279635212

Sadržaj

Predgovor	v
PRVI DEO: UVOD U HIDROLOGIJU	1
1 Uvod	1
1.1 Predmet hidrologije	1
1.2 Hidrološki ciklus	1
1.3 Rezerve vode na Zemlji i globalni bilans voda	3
1.4 Inženjerska hidrologija – hidrologija u hidrotehnici i vodoprivredi	5
1.5 Metode inženjerske hidrologije	9
DRUGI DEO: HIDROLOŠKI PROCESI	13
2 Atmosfera i neki meteorološki elementi	13
2.1 Atmosfera	13
2.2 Atmosferski pritisak	15
2.3 Vlažnost vazduha	16
2.4 Zračenje Sunca i izračivanje Zemlje i atmosfere	18
2.5 Temperatura vazduha	25
2.6 Vetar	26
3 Padavine	29
3.1 Nastanak padavina	29
3.2 Padavinski režim	31
3.3 Merenje padavina	32
3.4 Osnovna obrada podataka o padavinama	36
4 Isparavanje	45
4.1 Uvod	45
4.2 Određivanje isparavanja	46
4.3 Isparavanje u bilansu toplotne energije	49
4.4 Proračun isparavanja sa slobodne vodene površine	49
4.5 Proračun evapotranspiracije	53

4.6	Merenje isparavanja i evapotranspiracije	56
5	Potpovršinski procesi	59
5.1	Voda u porznoj sredini.....	60
5.2	Voda u nezasićenoj sredini – zemljišna vlaga	61
5.3	Infiltracija.....	69
5.4	Podzemne vode.....	72
6	Oticaj.....	77
6.1	Nastanak oticaja i protoka u vodotokovima	77
6.2	Tečenje u vodotoku.....	81
6.3	Hidrološka merenja na otvorenim tokovima	89
6.4	Obrada hidroloških podataka.....	100
6.5	Hidrogrami oticaja	112
6.6	Analiza hidrograma oticaja	119
6.7	Slivovi i njihove karakteristike	121
TREĆI DEO: STATISTIKA U HIDROLOGIJI.....		127
7	Verovatnoća i statistika	127
7.1	Osnovni pojmovi iz teorije verovatnoće.....	128
7.2	Osnovni pojmovi iz statistike	140
7.3	Teorijske raspodele verovatnoće za hidrološke veličine	149
7.4	Prilagodavanje teorijske funkcije raspodele	163
8	Statistička analiza u hidrologiji	169
8.1	Hidrološki nizovi.....	169
8.2	Statistička analiza hidroloških nizova	183
8.3	Metoda prekoračenja preko ili ispod praga	206
8.4	Korelacija i regresija.....	209
ČETVRTI DEO: MODELIRANJE OTICAJA.....		221
9	Modeliranje oticaja.....	221
9.1	Modeliranje procesa padavine-oticaaj.....	221
9.2	Proračun efektivne kiše	225
9.3	Proračun hidrograma direktnog oticaja.....	237
9.4	Proračun transformacije hidrograma.....	261
9.5	Poznati modeli padavine-oticaaj.....	270
PETI DEO: INŽENJERSKA HIDROLOGIJA		273
10	Analiza srednjih voda	273
10.1	O analizama hidrološkog režima	273

10.2	Osnovni pokazatelji raspoloživih količina voda.....	275
10.3	Procena srednjih voda na neizučnim slivovima	284
11	Analiza malih voda	287
11.1	Značaj malih voda.....	287
11.2	Osnovni pokazatelji malih voda	288
11.3	Procena malih voda na neizučnim slivovima.....	294
12	Računske kiše.....	297
12.1	Pojam računске kiše	297
12.2	Računske visine kiša.....	298
12.3	Zavisnosti visina (intenzitet) kiše – trajanje kiše – povratni period.....	300
12.4	Konsistentna metoda za određivanje zavisnosti HTP i ITP	302
12.5	Oblici računskih kiša	305
12.6	Računske kiše na slivu	309
13	Analiza velikih voda.....	313
13.1	O velikim vodama	313
13.2	Računske i merodavne velike vode.....	314
13.3	Statistička analiza velikih voda.....	318
13.4	Računske velike vode na osnovu računskih kiša	324
13.5	Verovatno maksimalne vode	327
Literatura		329
DODACI		339
A	Sunčevo zračenje na granici atmosfere.....	339
B	Važeći standardi iz oblasti hidrometrije u Srbiji.....	340
C	Podaci u primerima	342
D	Statističke tablice.....	344
Indeks pojmova		363

Predgovor

Hidrologija je izuzetno široka nauka, kao i njena primena u hidrotehnici, vodoprivredi i građevinarstvu. Pisanje knjige iz ove oblasti je veliki izazov iz više razloga, a najveći je taj da se pronađe mera između potrebnog znanja za svakodnevnu praksu, novih tendencija u hidrološkim istraživanjima i razumne količine gradiva koje studenti treba da savladaju tokom studija. Knjiga zato pokriva materiju koja predstavlja program predmeta Hidrologija i Inženjerska hidrologija na Građevinskom fakultetu Univerziteta u Beogradu i koju studenti treba da nauče kako bi uspešno položili ispit. Međutim, cilj knjige je i da se pruže smernice za dalje produbljivanje znanja iz hidrologije i da se ukaže na savremene tendencije. Ipak, osnovni cilj knjige je da studenti i drugi početnici u hidrotehnici steknu uvid u složenost hidroloških procesa, različitost pristupa i široku lepezu metoda za rešavanje inženjerskih zadataka. Iskreno verujem da će inženjeri koji shvate teorijske pincipe pojedinih inženjerskih metoda moći da izbegnu njihovu nekorektnu primenu, kao i da će biti sposobni da pronađu odgovarajuće metode u literaturi ili razviju sopstvene kada budu rešavali probleme sa kojima se dotad nisu sreli.

Knjiga ima nekoliko delova, a delovi se sastoje od jednog ili više poglavlja. *Prvi deo* sadrži uvodno poglavlje u kome se definiše hidrologija kao nauka i hidrološki ciklus kao njena centralna tema, a zatim se ukratko obrazlaže uloga hidrologije u inženjerskim zadacima u hidrotehnici i vodoprivredi i ukazuje na načine rešavanja tih zadataka. *Drugi deo* obuhvata više poglavlja u kojima se opisuju procesi u hidrološkom ciklusu, uz detaljnost koja se smatra neophodnom za primenu u hidrotehnici. Posebna poglavlja su posvećena atmosferi (pre svega Sunčevom zračenju i vlažnosti vazduha), padavinama, isparavanju, potpovršinskim procesima i oticaju čiji su rezultat protoci u profilima vodnih tokova. Ova poglavlja prvenstveno opisuju navedene procese i načine njihovog osmatranja i merenja. *Treći deo* knjige je posvećen primeni teorije verovatnoće i matematičke statistike u hidrologiji, koje daju neophodne alate za obradu podataka i donošenje zaključaka o vrednostima koje hidrološke veličine mogu da imaju. *Četvrti deo* knjige obrađuje vezu između padavina i oticaja, odnosno hidrološko modeliranje, što je centralna tema inženjerske hidrologije s obzirom da su inženjeri u najvećem broju slučajeva primorani da procenjuju oticaj na osnovu padavina i drugih podataka. U ovom delu prikazane su inženjerske metode iz svakodnevne prakse, jer bi nove tendencije u hidrološkom modeliranju iz istraživačkog domena zahtevale posebnu knjigu. Konačno, *peti deo* sistematizuje postupke u tipičnim studijama hidrološkog režima reka i slivova, odakle je i potekla podela na poglavlja o srednjim, malim i veli-

kim vodama. Posebno poglavlje u ovom delu je posvećeno računskim kišama kao važnom segmentu u proceni računskih (projektnih, merodavnih) velikih voda.

Čitaocima prepuštam da ocene koliko ovakav pristup izlaganju inženjerske hidrologije može biti koristan za različite grupe, počevši od studenata osnovnih studija do iskusnih inženjera u praksi. Imajući u vidu poslovično nedovoljnu količinu hidrološke i hidrotehničke literature u Srbiji, pa i u regionu, možda će deo stručne javnosti imati velika očekivanja od ove knjige. Nadam se da će barem deo tih očekivanja biti zadovoljen, a izvinjavam se čitaocima ukoliko u tekstu naiđu na greške i nekonzistentnosti i biću zahvalna ako mi ukažu na sve propuste. Takođe, zbirka zadataka „Inženjerska hidrologija – rešeni zadaci“ (Plavšić i Radić, 2015) dopunjuje primere iz knjige i može da posluži za bolje razumevanje materije.

Na kraju, ali možda najvažnije, želim da zahvalim svima koji su mi na razne načine pomogli da ova knjiga nastane. Najpre, Jovan Despotović i Marko Ivetić su, kao recenzenti, značajno doprineli još boljem profilisanju pojedinih poglavlja knjige. Veoma zahvaljujem kolegama iz Sektora za hidrologiju Republičkog hidrometeorološkog zavoda (RHMZ) Srbije koji su mi dali neophodne informacije i sa kojima sam u mnogim prilikama razgovarala o problemima i potrebama u domaćoj hidrologiji. Uz rizik da ću nekoga zaboraviti, zahvaljujem Slavimiru Stevanoviću, Bojanu Palmaru, Miri Ivljanin, Mikši Jovanoviću, Srđanu Marjanoviću, Samiru Čatoviću i Dejanu Vladikoviću. Ujedno ne mogu da ne pomenem i penzionisane hidrologe iz RHMZ-a: Branku Kapor, Dragana Jankovića, Mihaila Anđelića i Tiosava Petkovića, čija su iskustva dragocena. Zahvaljujući konstruktivnoj saradnji i sa kolegama meteorolozima iz RHMZ-a, Jovankom Andrejević i Draganom Jovanovićem, mnogo sam saznala i o operativnoj meteorologiji. Naravno, da nije bilo profesora Slavoljuba Jovanovića, Vojislava Vukmirovića, Zorana Radića i Jovana Despotovića, koji su mi omogućili ulazak u svet hidrologije, i njihovih širokih znanja i iskustava koja su mi preneli, ove knjige danas ne bi bilo. Takođe, profesorima Čedi Maksimoviću i Miodragu Radojkoviću dugujem zahvalnost za to što su me uključili u aktivnosti vezane za urbanu hidrologiju, kolegi Milošu Staniću za veoma korisne dugačke razgovore o hidrološkim procesima, profesorki Vesni Jevremović na pomoći u vezi sa teorijom verovatnoće i statistike, kao i Dragoljubu Štrpcu iz Geografskog instituta „Jovan Cvijić“ za pomoć u pripremi karata. Iskustva kolega iz prakse, a naročito profesora Stevana Prohaske iz Instituta „Jaroslav Černi“ i Zorana Obuškovića iz Energoprojekta, koja su oni nesebično delili sa mnom, takođe su od neprocenjivog značaja. Na motivacionom planu, da istrajem na dugom putu pisanja ove knjige najviše je doprineo Marko Ivetić kao dugogodišnji šef Katedre za hidrotehniku i vodno ekološko inženjerstvo, zatim i druga dva skorija šefa, Miodrag Jovanović i Dušan Prodanović, a takođe i moja porodica.

Jasna Plavšić, dipl. građ. inž.

U Beogradu, jula 2019.

INŽENJERSKA HIDROLOGIJA

1 UVOD

1.1 Predmet hidrologije

Hidrologija je geofizička nauka koja proučava vode na Zemlji. Ona se bavi njihovim osobinama, prostornom i vremenskom raspodelom i kretanjem u prirodi.

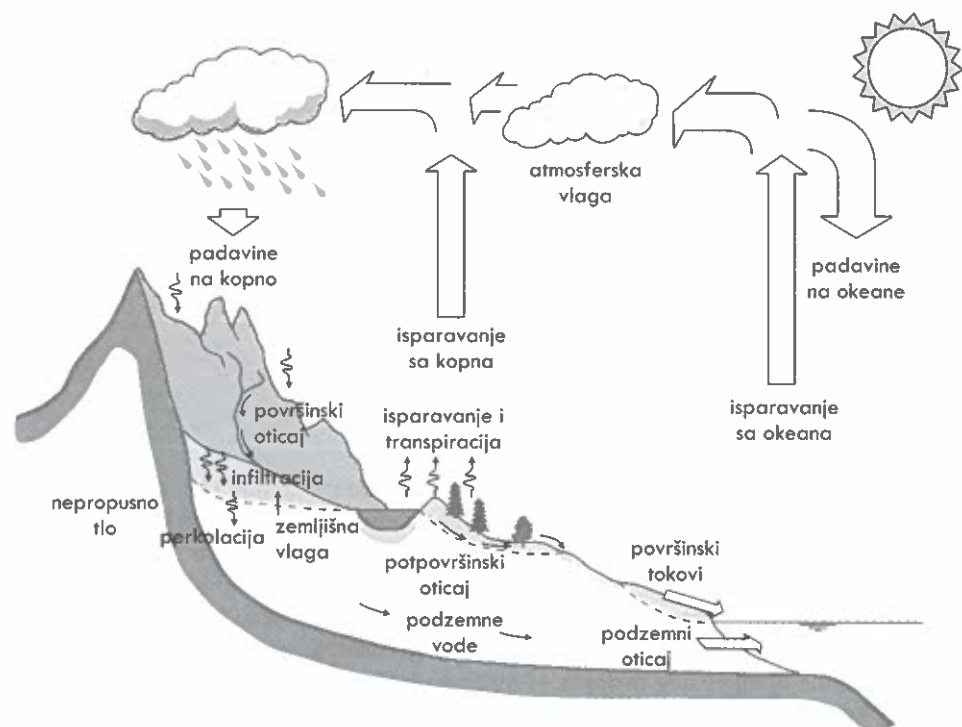
Voda je najzastupljenija materija na Zemlji. Ona neprestano kruži u prirodi, tj. između Zemlje i atmosfere. To beskonačno kruženje vode naziva se *hidrološki ciklus*. On obuhvata mnogobrojne puteve kojima voda koja pada na površinu Zemlje dospeva do okeana, odakle se isparavanjem ponovo vraća u atmosferu i snabdeva je vlagom potrebnom za obnavljanje celog procesa. U tom smislu hidrologija se ponekad definiše i kao nauka koja proučava hidrološki ciklus.

Mnoge fizičke, hemijske, biološke, ali i primenjene naučne discipline bave se pojedinim delovima hidrološkog ciklusa (meteorologija, klimatologija, geologija, ekologija, geografija, okeanografija i druge). Za građevinske i hidrotehničke inženjere najvažniji deo hidrološkog ciklusa predstavlja njegova zemljišna faza, odnosno vode na kopnu i u tlu, pa se taj deo ciklusa najviše izučava u okviru kurseva hidrologije na studijama građevinarstva. Najveće dodirne tačke hidrologija ima sa hidrometeorologijom, koja prvenstveno izučava padavine i isparavanje kao dva najznačajnija procesa za vodne resurse na Zemlji. Hidrogeologija je takođe srodna disciplina koja se bavi vodama u tlu.

1.2 Hidrološki ciklus

Voda na Zemlji se nalazi u prostoru koji se naziva *hidrosfera* i koji se prostire oko 15 km naviše u atmosferu i oko 5 km naniže u litosferu, odnosno Zemljinu koru. Voda u hidrosferi kruži kroz lavirint puteva koji čine hidrološki ciklus (slika 1.1). Ovaj ciklus predstavlja jedan zatvoren sistem koji nema ni početak ni kraj i u kome se razni procesi neprekidno odvijaju.

Pokretačka snaga kruženja vode u prirodi je energija Sunčevog zračenja. Najveći deo vode na Zemlji nalazi se u okeanima (tabela 1.1), pa je logično da razmatranje hidrološkog ciklusa počne od njih. Površine okeana i mora zagrevaju se pod uticajem toplotne energije Sunčevog zračenja i time dolazi do procesa *isparavanja* vode. Voda koja isparava postaje deo atmosfere u vidu vodene pare. Sadržaj vodene pare u atmosferi često se naziva i atmosferska vlaga. Zajedno sa kretanjem vazdušnih masa kreće



Slika 1.1. Hidrološki ciklus (prema Chow i sar., 1988).

se i vodena para, pri čemu se formiraju oblaci. Pod određenim atmosferskim uslovima, u oblacima dolazi do kondenzacije vodene pare i stvaraju se *padavine*. Padavine se vraćaju u okeane direktno ili zaobilaznim putem preko kopna. Sneg se može akumulirati u polarnim predelima ili na visokim planinama i pretvoriti u led, a u tom stanju može ostati veoma dugo. Kiša se može zadržati na vegetaciji (proces *intercepcije*), odakle se deo zadržane vode može vratiti u atmosferu isparavanjem. Kiša koja dospe do površine zemlje može teći po površini terena kao *površinski oticaj* ili se može upiti u zemljište (proces *infiltracije*). Voda koja teče po površini obično se koncentriše u površinskim depresijama kao što su bare ili mala jezera (*površinsko retenziranje*), ili formira najpre male tokove, a potom sve veće. Voda koja se upila u tlo doprinosi povećanju sadržaja zemljišne vlage i ima više mogućnosti za dalje putovanje. Jedan deo te vode se vezuje procesom fotosinteze u biljkama, a jedan deo se oslobađa kroz proces *transpiracije*. Upijena voda može teći kroz slojeve tla nezasićenih vodom kao *potpovršinski oticaj* i izbiti na površinu kao vrelo ili dospeti do vodotoka nešto sporije nego površinskim oticanjem. Iz nezasićenih slojeva tla voda se može procediti u dublje slojeve tla (proces *perkolacije*). Na taj način voda dospeva do nivoa *podzemnih voda*, tj. do tla zasićenog vodom, a zatim se ponovo može pojaviti na površini u obliku izvora ili može teći kao *podzemni oticaj* i prihranjivati površinske vode. Površinski, potpovršinski i podzemni oticaj se spajaju u *površinskim tokovima* – rekama i potocima – koji se mogu privremeno zadržavati u jezerima, ali konačno opet dospevaju do okeana kako bi se hidrološki ciklus nastavio.

1.3 Rezerve vode na Zemlji i globalni bilans voda

Iako se smatra da je količina vode koja kruži u prirodi konstantna, procene ukupnih rezervi vode na Zemlji u njenim različitim oblicima stalna su tema istraživanja. Precizne količine vode u različitim fazama hidrološkog ciklusa su nepoznate jer se kvantitativni podaci o padavinama, isparavanju i oticaju teško dobijaju u nepristupačnim predelima, a naročito iznad okeana. U literaturi su još uvek u opticaju procene ruskih naučnika iz sedamdesetih godina 20. veka (Shiklomanov, 1998), ali ima i novijih procena (Oki & Kanae, 2006; Trenberth i sar., 2007). Različite procene globalnih rezervi vode u različitim oblicima ipak se donekle slažu i daju korisnu sliku o prosečnom višegodišnjem globalnom bilansu voda na Zemlji i na pojedinim kontinentima.

Ukupna količina voda na Zemlji se procenjuje na oko 1386 miliona km^3 (Shiklomanov, 1998). Oko 96.5% ukupne vode na Zemlji nalazi se u okeanima (tabela 1.1). Kada bi Zemlja bila pravilna lopta, ova količina vode bi je pokrila u sloju dubine 2.6 km. Od preostale vode, 1.7% nalazi se zarobljeno u ledu u polarnim predelima, 1.7% u podzemnim vodama i svega 0.1% se nalazi u površinskim vodama i atmosferskoj vodi. Od ukupnih količina vode, svega 2.5% su slatke vode, dok su ostale slane. Dve trećine slatke vode se nalazi u polarnom ledu, a većina preostale trećine u podzemnim vodama na dubinama od 200 do 600 m. U površinskim vodama se nalazi 0.3% slatkih voda, od čega je u rekama svega 0.03%, a ostalo u jezerima.

Iako je sadržaj vode na kopnu i u atmosferi u jednom trenutku relativno mali, ogromne količine vode prolaze kroz njih tokom jedne godine. Globalni godišnji bilans voda prikazan je u tabeli 1.2, gde se u ravnotežu dovode najvažniji procesi hidrološkog ciklusa: prosečne godišnje količine padavina, isparavanja i oticaja na kopnu i na okeanima. U ovoj tabeli oznaka (+) pokazuje da se radi o ulaznoj komponenti bilansa, dok

Tabela 1.1. Procena količina vode na Zemlji (izvor: Chow i sar., 1988).

Mesto	Površina (miliona km^2)	Zapremina (km^3)	Procenat ukupne vode	Procenat ukupne slatke vode
Okeani	361.3	1,338,000,000	96.5	
Polarni led	16.0	24,023,500	1.7	68.6
Ostali led i sneg	0.3	340,600	0.025	1.0
Podzemne vode				
slatke	134.8	10,530,000	0.76	30.1
slane	134.8	12,870,000	0.93	
Jezera				
slatka	1.2	91,000	0.007	0.26
slana	0.8	85,400	0.006	
Močvare	2.7	11,470	0.0008	0.03
Zemljišna vlaga	82.0	16,500	0.0012	0.05
Reke	148.8	2,120	0.0002	0.006
Biološka voda	510.0	1,120	0.0001	0.003
Atmosferska voda	510.0	12,900	0.001	0.04
Ukupno vode	510.0	1,385,984,610	100	
Ukupno slatke vode	148.8	35,029,210	2.5	100

Tabela 1.2. Globalni godišnji bilans voda (izvor: Oki & Kanae, 2006).

		Kopno	Okeani	Ukupno
Površina	(miliona km ²)	149	361	510
Padavine	(km ³ /god)	111000 (+)	391000 (+)	502000 (+)
	(mm/god)	745	1083	984
Isparavanje	(km ³ /god)	65500 (-)	436500 (-)	502000 (-)
	(mm/god)	440	1209	984
Oticaj	(km ³ /god)	45500 (-)	45500 (+)	
	(mm/god)	305	305	

Tabela 1.3. Godišnji bilans voda po kontinentima (izvor: Musy & Higy, 2011).

Kontinent	Padavine (mm)	Isparavanje (mm)	Oticaj (mm)
Evropa	790	507	283
Afrika	740	587	153
Azija	740	416	324
Severna Amerika	756	418	339
Južna Amerika	1600	910	685
Australija i Okeanija	791	511	280
Antarktik	165	0	165
Prosek	800	485	315

(-) označava izlazne komponente. Na celoj Zemljinoj kugli prosečne godišnje padavine kao ulaz iznose 984 mm i jednake su prosečnom godišnjem isparavanju kao izlazu. Nad kopnom su padavine manje od padavina nad okeanima. U proseku oko 60% padavina na kopno ispari, dok preostalih 40% formira oticaj ka okeanima, većinom u obliku površinskih voda (podzemna voda koja direktno otiče u mora i okeane čini svega 2% oticaja). U ukupnom isparavanju koje formira atmosfersku vlagu, isparavanje sa okeana učestvuje sa 87%, a isparavanje sa kopna sa svega 13%. Tabela 1.3 prikazuje i prosečne komponente bilansa voda po kontinentima.

Za područje Srbije Isailović i sar. (2007) su procenili da prosečne padavine iznose 732 mm, prosečno isparavanje 550 mm, a prosečni oticaj 182 mm. Po regionima, padavine variraju od oko 550 do 900 mm, isparavanje od oko 400 do 600 mm, a oticaj od svega 30 mm na severu Vojvodine do 400 mm u slivu Lima na jugozapadu zemlje.

Analiza globalnog vodnog bilansa daje uvid u dinamiku hidrološkog ciklusa. Tako se, na primer, može izračunati vreme koje voda provede u obliku atmosferske vlage. Iz tabele 1.1 se vidi da ukupna zapremina atmosferske vlage iznosi 12900 km³. S druge strane, iz tabele 1.2 se vidi da fluks (prinos) vode iz atmosferske vlage u padavine iznosi 502000 km³/god. Prosečno vreme zadržavanja vode u atmosferi može se izračunati kao odnos zapremine i fluksa atmosferske vlage, dakle kao 12900/502000, što iznosi 0.0257 godina ili oko 9 dana. Ovako kratko zadržavanje vode u atmosferi je jedan od razloga zašto se tačne vremenske prognoze ne mogu praviti za više dana unapred. Na sličan način mogu se izračunati i vremena zadržavanja vode u drugim fazama hidrološkog ciklusa.

1.4 Inženjerska hidrologija – hidrologija u hidrotehnici i vodoprivredi

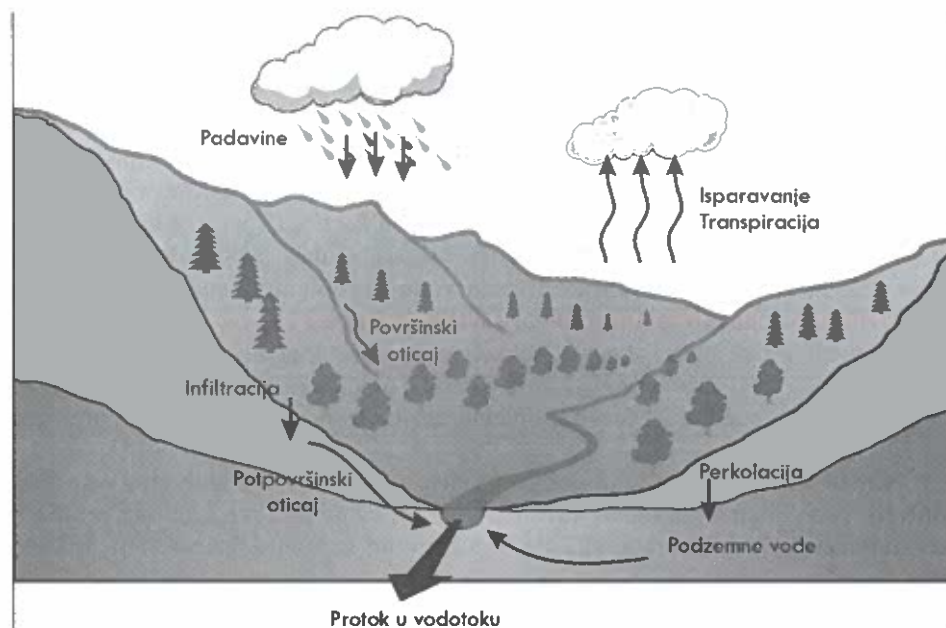
1.4.1 Zadaci inženjerske hidrologije

Potrebe čoveka za vodom zbog održanja života i proizvodnje hrane postoje još od nastanka prvih civilizacija. Sa porastom stanovništva i razvojem društva potrebe za vodom se stalno povećavaju, a širi se i spektar vidova *korišćenja vode*, u koje spadaju: snabdevanje stanovništva i industrije vodom, navodnjavanje, proizvodnja električne energije, rekreacija i drugi. Pored korišćenja vode i problema njene raspoloživosti, ljudska civilizacija odavno ima i problem *zaštite od štetnog dejstva voda*. Poplave su oduvek izazivale velike štete i predstavljale elementarne nepogode. U novije vreme do izražaja je došao i treći aspekt odnosa voda i ljudi, a to je pitanje *zaštite voda*, odnosno zaštite njenog kvaliteta. Dakle, pored problema raspoloživosti voda, javlja se i problem njihove upotrebljivosti.

U svim ovim aspektima ljudi su oduvek želeli – a danas je to neophodno – da imaju kontrolu nad vodama: da imaju dovoljno vode za svoje potrebe i da ona pri tome bude zadovoljavajućeg kvaliteta, ali i da se zaštite od štetnih dejstava vode. Iz ovih potreba nastala je *hidrotehnika*, pod kojom se podrazumevaju svi tehnički poduhvati kojima se prostorni i vremenski raspored vode iz prirodnih uslova menja prema zahtevima korisnika (Hajdin, 2002). Zadatak hidrotehnike je da se izgrade objekti i sistemi koji će omogućiti *upravljanje vodama*, što je zadatak *vodoprivrede*. Zadatak hidrologije je da doprinese analizi problema količina, kvaliteta i raspodele voda kako bismo njima upravljali što uspešnije.

Kada se govori o praktičnoj primeni hidrologije kao nauke u inženjerskim zadacima, tada se hidrologija naziva *primenjenom* ili *inženjerskom hidrologijom*. Inženjerska hidrologija je sastavni deo zadataka planiranja, projektovanja i upravljanja radom hidrotehničkih objekata, vodovodnih sistema, prečišćavanja i ispuštanja otpadnih voda, navodnjavanja i odvodnjavanja, korišćenja vodnih snaga, zaštite od poplava, plovidbe, kontrole erozije i formiranja nanosa, zaštite od zagađivanja, rekreativnog korišćenja voda i zaštite riba i živog sveta. Uloga inženjerske hidrologije u svakoj od ovih vodoprivrednih grana je očigledna. Na primer, za planiranje i projektovanje hidroelektrana neophodno je poznavati raspoložive količine vode u reci. Za efikasno navodnjavanje potrebno je uporediti potrebe biljaka za vodom sa padavinama, podzemnim vodama i raspoloživim vodama za zahvatanje – drugim rečima, treba odrediti koliki je manjak vode koja je potrebna biljkama. Za projektovanje odvodnjavanja poljoprivrednih površina sprovode se analize slične onima za navodnjavanje, ali se određuje višak vode u odnosu na potrebe biljaka. Kada je u pitanju zaštita od ekstremnih velikih i malih voda, tj. poplava i suša, analizira se verovatnoća pojave takvih ekstremnih događaja i njihovih posledica da bi se planirali i projektovani objekti i sistemi koji će obezbediti željeni stepen zaštite.

Dakle, uloga inženjerske hidrologije jeste da da konkretne odgovore na pitanja o količinama, kvalitetu i vremenskoj i prostornoj raspodeli vode u okviru hidrotehničkih zadataka i da obezbedi osnovu za planiranje, projektovanje, održavanje i rad vodoprivrednih objekata i sistema.



Slika 1.2. Hidrološki ciklus na slivu ili ciklus oticaja.

1.4.2 Hidrološki ciklus na slivu

Sliv je najčešće osnovna jedinica za razmatranje bilansa voda u hidrološkim analizama. Sliv se definiše kao deo kopna sa kojeg voda otiče, bilo površinskim bilo podzemnim putem, do određene tačke na jednom vodotoku, na sastavu dva vodotoka ili na ušću vodotoka u jezero ili more. *Granica sliva* ili *vododelnica* je linija razdvajanja dva susedna sliva. Na njoj se nalaze najudaljenije tačke sliva sa kojih voda dospeva do *izlaznog profila sliva*. Granica sliva određena na osnovu reljefa naziva se topografska vododelnica. Međutim, ako je geološka struktura tla na slivu složena (kao što je karst), vertikalna projekcija topografske vododelnice ne mora uvek da predstavlja i stvarnu, hidrološku vododelnicu sliva. O slivovima i njihovim karakteristikama se nešto detaljnije govori u poglavlju 6.7.

Slivovi od interesa u inženjerskoj hidrologiji mogu biti veoma različitih površina: od nekoliko hektara u slučaju gradskih slivnih površina do miliona kvadratnih kilometara u slučaju velikih reka.

Hidrološki ciklus na nivou sliva može se posmatrati detaljnije nego globalni hidrološki ciklus. Deo ciklusa koji obuhvata transformaciju padavina u oticaj na izlaznom profilu sliva naziva se i *ciklus oticaja* (Jovanović, 1989). Putevi vode su raznoliki i u ovoj razmeri posmatranja hidrološkog ciklusa (slika 1.2).

Padavine mogu dospeti na sliv u obliku kiše ili snega. U slučaju kiše, očekuje se brže pojavljivanje oticaja na izlaznom profilu sliva nego u slučaju snega koji se može zadržati na slivu i mesecima pre nego što se istopi i pretvori u oticaj.

Isparavanje se sastoji od više komponenti. Ono može biti: isparavanje sa vegetacije nakon procesa intercepcije (zadržavanja padavina na vegetaciji), isparavanje sa površine tla iz površinskih depresija, isparavanje sa otvorenih vodenih površina, isparavanje iz tla i u obliku transpiracije.

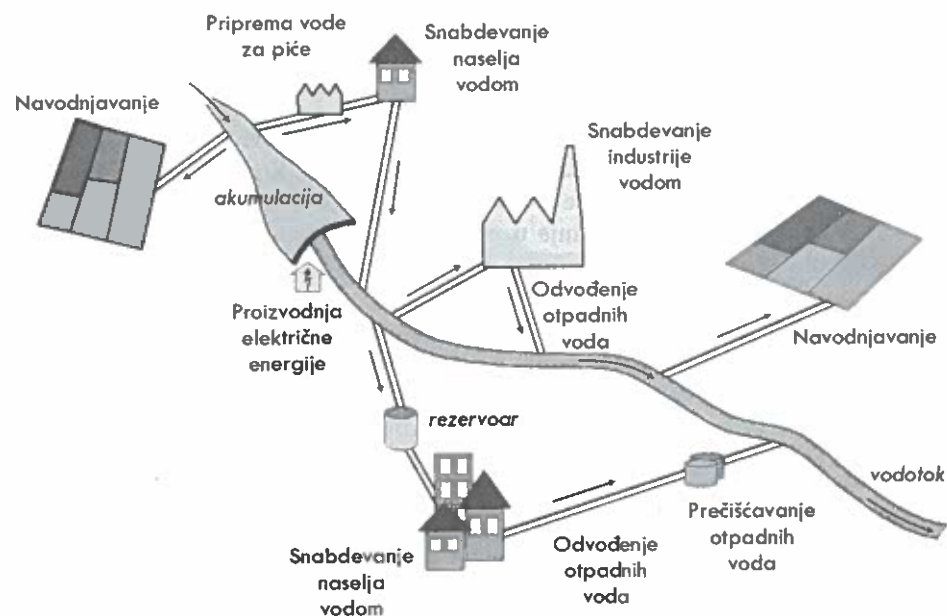
Opšti izraz „oticaaj“ podrazumeva kretanje vode iznad površine tla i ispod nje. Tečenje vode po površini terena naziva se površinski oticaj. Kretanje ispod površine tla počinje infiltracijom, a nastavlja se kretanjem vode kroz nezasićenu zonu (potpovršinski oticaj) uz određeno zadržavanje u porama tla, zatim perkolacijom tj. poniranjem u dublje slojeve ka podzemnim vodama, i na kraju strujanjem podzemnih voda (podzemni ili dubinski oticaj).

Ukupni protok na izlaznom profilu sliva sastoji se od površinskog, potpovršinskog i podzemnog oticaja. Potpovršinski i podzemni oticaj dospeće do vodotoka sporije od površinskog oticaja zbog malih brzina kretanja vode u tlu, tako da se dinamika oticaja razlikuje od dinamike padavina. Razlika u dinamici padavina i odgovora sliva na padavine biće manja ili veća u zavisnosti od toga kakva je uloga sliva u zadržavanju oticaja. Elementi sliva i hidrološkog ciklusa u kojima se voda zadržava često se nazivaju rezervoarima (npr. rezervoar vegetacije, podzemni rezervoar itd.). Slabo propustljiva tla su veliki podzemni rezervoar na slivu i dovešće do većeg zadržavanja vode i sporijeg potpovršinskog i podzemnog oticaja. Sneg koji se zadržava na slivu usled dugotrajnih niskih temperatura takođe je značajan rezervoar koji će znatno odložiti oticaj.

1.4.3 Uticaj ljudskih aktivnosti na hidrološki ciklus

Pored prirodnih prostornih i vremenskih varijacija u raspodeli voda, i ljudske aktivnosti utiču na vodni režim. Ljudi obrađuju zemlju, navodnjavaju biljke, đubre zemljište, krče šume, crpu podzemne vode, grade brane, bacaju otpatke u reke i jezera, i na mnoge druge konstruktivne ili destruktivne načine menjaju dinamičku ravnotežu hidrološkog ciklusa. To spada i proces urbanizacije jer su gradovi i naselja izgrađeni na mestima gde su nekad bile ruralne površine. Vremenom su urbane sredine postale mesta gde hidrološki ciklus ima određene specifičnosti. Iako se uticaj ljudskih aktivnosti i promena namene zemljišnih površina sve više razmatra u okviru hidrologije u poslednje vreme, jedino je urbanizacija dovela do priznavanja nove grane – *urbane hidrologije*.

Izgradnjom hidrotehničkih objekata hidrološki ciklus se menja utoliko što se voda ne kreće svojim prirodnim putevima, već onim koji su joj nametnuti. To je ilustrovano primerom na slici 1.3, gde je prikazan vodotok iz koga se voda zahvata za različite namene. Zahvatanje vode se može vršiti direktno iz vodotoka ili iz akumulacija. Voda koja se dovodi do sistema za navodnjavanje poljoprivrednih površina upija se u zemljište i biljke je koriste za transpiraciju. Voda u akumulacijama se koristi i za proizvodnju električne energije u hidroelektranama. Voda se može zahvatati i za potrebe industrije, odakle se posle prerade ponovo ispušta u vodotok. Osnovni problem kod ispuštanja industrijskih otpadnih voda je njihov poslovično visok sadržaj zagađujućih materija. Voda namenjena snabdevanju naselja može se zahvatati iz vodotoka i akumulacija, ali se može i crpeti iz podzemnih voda pomoću bunara. Upotrebljene vode iz



Slika 1.3. Primeri za izmenu režima voda pod uticajem ljudskih aktivnosti.

naselja, kao i kišne vode prikupljene sa ulica, odvođe se iz naselja kanizacionim sistemom i ispuštaju u vodotokove. Sa zaoštavanjem problema kvaliteta voda i životne sredine uopšte, neminovne stanice na putevima vode postaju postrojenja za pripremu vode za piće i postrojenja za prečišćavanje otpadnih voda.

Akumulaciona jezera značajno menjaju prirodnu sezonsku raspodelu voda na slivu. Njihov režim rada zavisi od njihove namene (postoje jednonamenske i višenamenske akumulacije), ali je njihov cilj uvek da izravnavaju neravnomernosti u prirodnom režimu voda. U periodima suše akumulacije obezbeđuju neophodne minimalne količine vode za nizvodne korisnike. S druge strane, gotovo svaka akumulacija se koristi za zaštitu od poplava tako što se u njoj poplavni talas zadržava i ublažava (smanjuje se maksimalni protok i produžava vreme ispuštanja vode ka nizvodnim oblastima).

Da bi se u okviru inženjerskih zadataka dale validne procene količina i raspodele voda, u hidrološkim analizama koje se sprovode mora se uzeti u obzir da li je hidrološki režim na razmatranom području prirodan ili pod uticajem ljudskih aktivnosti. Isto tako, u svakoj analizi u okviru planiranja i projektovanja novih objekata, uz koje će doći do izmene postojećeg režima voda, moraju se sagledati sve posledice tih izmena tako da se predlože rešenja koja neće ugroziti održanje ne samo hidrološkog ciklusa, već i ekosistema.

1.5 Metode inženjerske hidrologije

1.5.1 Osnovni pristupi za rešavanje zadataka inženjerske hidrologije

Kao što je rečeno u poglavlju 1.4, zadatak inženjerske hidrologije je da odgovori na pitanja o količinama vode i njenoj vremenskoj i prostornoj raspodeli. Da bi se taj cilj ostvario, primenjuju se različite metode i postupci, koji se grubo mogu podeliti u dve grupe: 1) osmatranja i merenja hidroloških procesa, i 2) modeliranje hidroloških procesa.

Osmatranja i merenja su nezamenljiva jer predstavljaju najdirektniji način za dobijanje potrebnih informacija o hidrološkim procesima. Što je više merenja različitih komponenti hidrološkog ciklusa, to ga bolje poznajemo. Ideal koji imaju svi hidrolozi, a koji se teško može dostići, jesu merenja koja se odvijaju neprekidno u vremenu i što gušće po prostoru. Međutim, nisu sva merenja hidroloških procesa podjednako laka i izvodljiva. Količina podataka dobijenih merenjem u realnosti je ograničena s obzirom da su sistematska merenja povezana sa značajnim troškovima za opremu i radnu snagu. Iako savremena oprema danas omogućava skoro kontinualna merenja (u veoma kratkim vremenskim intervalima), u prostornom smislu je nemoguće pokriti sva mesta od interesa za veliki broj hidroloških procesa. Takođe, čak i postojanje rezultata merenja nekih procesa kao što je evapotranspiracija ne omogućava dobro sagledavanje tih procesa u vremenu i prostoru zbog njihove složenosti.

U hidrološkoj terminologiji, vodotokovi i slivovi na kojima postoje hidrološka osmatranja nazivaju se *izučenim*, a oni na kojima ne postoje osmatranja se nazivaju *neizučenim*. Izučeni slivovi i vodotokovi su oni na kojima postoje pouzdani podaci osmatranja protoka u dužem vremenskom periodu. Tada se jednostavnom statističkom obradom tih podataka može saznati dosta o prirodi procesa oticaja na slivu na čijem se izlaznom profilu meri protok. Rezultati statističke obrade (prosečni protoci, učestalost pojave pojedinih vrednosti protoka, verovatnoća pojave ekstremnih vrednosti i slično) predstavljaju sintezu ponašanja sliva u dužem vremenskom periodu i koriste se za planiranje rada hidrotehničkih i vodoprivrednih sistema u budućnosti. Zato je osnovna pretpostavka pri statističkoj obradi podataka pretpostavka o nepromenljivosti uslova pod kojima su se hidrološki procesi odvijali tokom razmatranog perioda merenja na datoj lokaciji. Ovakva vrsta statističke analize predmet je trećeg dela knjige i poglavlja 8, a o ovim pretpostavkama se govori više u odeljku 8.1.1. Ukoliko se za podatke osmatranja ne može smatrati da opisuju nepromenljive procese, za njihovu analizu može se primeniti teorija slučajnih procesa, a takva grana hidrologije naziva se *stohastičkom hidrologijom*.

Najveća prepreka za primenu statističke analize u hidrologiji je nedostatak pouzdanih podataka i u vremenskom i u prostornom smislu. Periodi osmatranja su uvek ograničeni, a često i vrlo kratki, što može da kompromituje rezultate analize. Takođe, konkretne lokacije od interesa najčešće spadaju u klasu nedovoljno izučenih ili neizučenih slivova, na kojima je dostupno veoma malo ili nimalo podataka. U takvim slučajevima se raspoloživi podaci *transponuju* ili *transformišu*. Na primer, kada se protoci na zadatom profilu reke određuju na osnovu poznatih protoka na drugim lokacijama, govori se o transpoziciji. Pod transformacijom se podrazumeva proračun nepoznatih

protoka na osnovu poznatih padavina i drugih poznatih podataka na delu sliva do traženog profila. Takva transformacija se naziva i *modeliranje oticaja*. Ovakvi postupci omogućavaju procenu protoka na mestima gde nema osmatranja protoka, a time i rešavanje zadataka inženjerske hidrologije.

1.5.2 Jednačina bilansa voda

Osnovni fizički principi koji se u hidrologiji moraju poštovati su principi održanja mase i energije. S obzirom da se voda razmatra kao masa, o principu održanja mase u hidrologiji se obično govori kao o *bilansu voda*, jer je osnovni cilj da se hidrološke veličine koje učestvuju u ciklusu oticaja izbalansiraju, odnosno dovedu u ravnotežu. Pored bilansa voda, u hidrologiji se često govori i o *bilansu energije*, odnosno o principu održanja energije. Na primer, bilans toplotne energije je veoma važan za procese isparavanja i topljenja snega.

Bilans voda je centralna tema inženjerske hidrologije i u ovom odeljku on se razmatra načelno. Opisna jednačina bilansa voda glasi:

$$\text{ULAZ} - \text{IZLAZ} = \text{PROMENA ZAPREMINE} \quad (1.1)$$

Za matematičku formu bilansne jednačine polazi se od jednačine kontinuiteta u integralnom obliku za kontrolnu zapreminu nekog sistema:

$$Q_U(t) - Q_I(t) = \frac{dV}{dt} \quad (1.2)$$

gde je $Q_U(t)$ ulaz u kontrolnu zapreminu u trenutku t , $Q_I(t)$ izlaz iz kontrolne zapremine, V stanje zapremine u kontrolnoj zapremini i dV/dt promena stanja zapremine. Ukoliko je ulaz jednak izlazu, tj. $Q_U(t) = Q_I(t)$, tada nema promene zapremine ($dV/dt = 0$) i za sistem se kaže da je zatvoren. Ukoliko to nije slučaj, sistem je otvoren.

Ako se posmatra konačan vremenski interval dužine T i ako se sabirci u jednačini (1.2) integrale na tom intervalu vremena, tada promenu zapremine ΔV u razmatranom intervalu vremena čini razlika zapremine koja uđe u sistem V_U i zapremine koja iz sistema izađe V_I :

$$V_U - V_I = \Delta V \quad (1.3)$$

što je ekvivalent opisnoj jednačini (1.1).

Da bi se bilansiranje u ciklusu oticaja sprovedo, potrebno je definisati:

- područje za izradu bilansa,
- period za izradu bilansa.

Bilans se najčešće sprovodi za sliv, ali i za administrativne teritorije (regioni, države, kontinenti) i kao globalni bilans voda na Zemljinoj kugli (o čemu je već bilo reči u delu 1.3).

Period za izradu bilansa zavisi od svrhe proračuna, kao i od veličine područja na kome se radi bilans. Uobičajeni period za izradu bilansa je *hidrološka godina*, koja se definiše kao godina koja počinje kišnom sezonom (u Srbiji od 1. novembra do 31. oktobra). Višegodišnji bilansi se sprovode da bi se opisao režim vodotoka ili da bi se procenili vodni resursi na administrativnim područjima.

Obično se smatra da u višegodišnjem (dugoročnom) bilansu učestvuju samo padavine P , isparavanje E i oticaj Q , odnosno smatra se da je deo padavina koji se nije vratio u atmosferu, tj. koji se upio u tlo, u celini dospelo do vodotoka kroz potpovršinski i podzemni oticaj. Jednačina višegodišnjeg bilansa tada glasi:

$$P - E - Q = 0 \quad (1.4)$$

Međutim, za određene zadatke inženjerske hidrologije potrebno je da se razmatraju i kraći periodi od višegodišnjih. Na primer, tokom jedne godine izražene su sezonske promene oticaja pod uticajem sezonske promene padavina i temperatura, pa se bilans voda može razmatrati i na mesečnom nivou. Za takav kratkoročni bilans, jednačina bilansa se može napisati i detaljnije ako se razdvoje pojedine faze ciklusa oticaja. U hidrološkom modeliranju uobičajeno je da se razdvoje brze i spore komponente oticaja, odnosno delovi ciklusa koji se odvijaju iznad površine terena i ispod nje. Bilans voda iznad površine tla tada bi bio definisan jednačinom:

$$P - E - T - F - Q_{POV} = S \quad (1.5)$$

gde su P padavine, E isparavanje, T transpiracija, F infiltracija, Q_{POV} površinski oticaj, a S voda zarobljena na površini terena ili na vegetaciji koja se nije upila u tlo niti je isparila tokom razmatranog perioda bilansiranja. S druge strane, bilans voda ispod površine tla tada bi bio dat jednačinom:

$$F - Q_{PP} - Q_{PODZ} = G \quad (1.6)$$

gde su Q_{PP} i Q_{PODZ} potpovršinski i podzemni oticaj, a G zapremina vode koja nije dospela iz podzemlja u vodotok tokom razmatranog perioda bilansiranja. Konačno, bilans voda u vodotoku glasi:

$$Q_{POV} + Q_{PP} + Q_{PODZ} = Q \quad (1.7)$$

gde je Q ukupan oticaj kao zbir tri komponente.

Od interesa može biti i veoma kratkoročni bilans voda ako se npr. posmatra brza promena protoka pri nailasku velikih voda. U kratkom vremenskom okviru takvog bilansa neki procesi se mogu zanemariti, jer nema dovoljno vremena da se oni značajnije iskažu. Na primer, evapotranspiracija je praktično zanemarljiva u nekoliko sati tokom prolaska talasa usled značajne kišne epizode. Tokom kišnih epizoda na gradskim slivovima sa značajnim udelom nepropusnih površina mogu se zanemariti potpovršinski i podzemni oticaj koji su znatno sporiji od površinskog oticaja, čime se opšta jednačina bilansa može značajno uprostiti.

Prethodno prikazane jednačine bilansa voda na slivu predstavljaju uopšten pogled na bilans voda. Konkretne jednačine na konkretnom slivu imaju oblik koji zavisi od više faktora, a to su: naše sagledavanje procesa oticanja na tom slivu, raspoloživost podataka i cilj analize koji uslovljava vremenski period u kome se bilans radi.

2 ATMOSFERA I NEKI METEOROLOŠKI ELEMENTI

2.1 Atmosfera

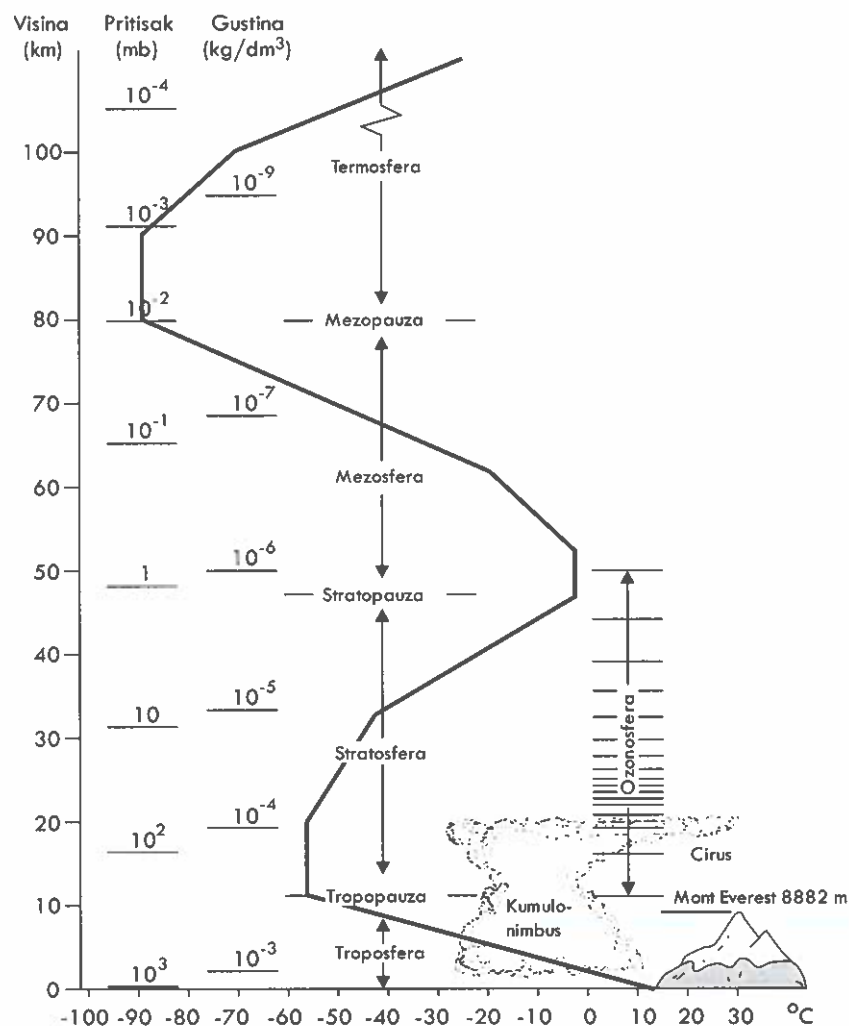
Atmosfera predstavlja vazdušni omotač oko Zemlje. Ona nema jasnu gornju granicu jer gustina vazduha postepeno opada sa udaljavanjem od Zemlje. Na visini od 600 km gustina vazduha je praktično beznačajna, dok na visini od 300 km još ima dovoljno vazduha koji se suprotstavlja meteorima i tera ih da se užare. Međutim, 90% mase vazduha nalazi se ispod visine od 20 km, a dve trećine ispod najviše tačke na svetu – Mont Everesta – na visini od 9 km (Wiesner, 1970).

Gustina i pritisak vazduha u atmosferi konstantno opadaju sa povećanjem nadmorske visine (slika 2.1), a na prvih 20-30 km visine smanje se za dva reda veličine. S druge strane, temperatura vazduha se menja na nepravilan način sa nadmorskom visinom. Prema ovom temperaturnom profilu atmosfera se deli na više slojeva.

Najniži deo atmosfere je *troposfera* u kojoj temperatura opada sa visinom. Gornja granica troposfere se naziva *tropopauza*, na kojoj dolazi do promene gradijenta temperature. U troposferi temperatura vazduha opada sa gradijentom koji zavisi od sadržaja vlage u atmosferi, a u proseku iznosi 6.5°C po kilometru visine. Visina na kojoj se nalazi tropopauza se kreće od najviše 20 km iznad ekvatora do najmanje 8 km blizu polova, a prisutne su i sezonske varijacije usled promene pritiska i temperature. U načelu, tropopauza je na većoj visini ako su temperatura na površini Zemlje i pritisak na nivou mora viši. Temperatura na tropopauzi varira od -80 °C iznad ekvatora gde je tropopauza najviša, do -40 °C iznad delova kopna koji se protežu ka arktičkim predelima (kao što je Sibir ili Kanada) gde je tropopauza najniža. Troposfera je najvažniji sloj za hidrologiju, jer on sadrži praktično svu atmosfersku vlagu.

Sloj iznad tropopauze naziva se *stratosfera*. U njemu su temperature ravnomernije, kao i kretanje vazdušnih masa. Na nadmorskim visinama između 20 i 50 km temperature rastu zato što ozonski sloj, tj. sloj unutar stratosfere koji sadrži 90% ozona u atmosferi, apsorbuje deo Sunčevog zračenja i oslobađa deo energije u vidu toplote.

Najniži deo troposfere i atmosfere blizu površine Zemlje predstavlja granični sloj u kome je, usled hrapavosti Zemljine površine, izražena turbulencija u strujanju vazduha. Debljina ovog sloja zavisi od veličine turbulentnih vrtloga kojima se vrši preraspodela toplote i vodene pare, što uslovljava promenu meteoroloških elemenata sa nadmorskom visinom.



Slika 2.1. Promena temperature vazduha u atmosferi sa udaljavanjem od površine Zemlje (prema Shaw, 1994).

Tabela 2.1. Glavni sastojci vazduha (izvor: Jovanović, 1989; Penzar, 1996).

Sastojak	Procentualna zastupljenost	
	u masi	u zapremini
Azot	75.51	78.08
Kiseonik	23.15	20.95
Argon	1.28	0.93
Inertni i drugi gasovi	0.06	0.04

Stalne promene meteoroloških elemenata karakterišu *vreme*. U meteorologiji, vreme se definiše kao trenutno stanje atmosfere, dok se pod *klimom* podrazumeva prosečno stanje atmosfere u dužem periodu iznad neke oblasti. Klima se nekad smatrala nepromenljivom za kraće geološke periode, ali se to verovanje promenilo sredinom XIX veka od dokazivanja postojanja ranijih ledenih doba (Barry & Chorley, 2003). Klima se zapravo neprekidno menja i njene varijacije su uočljive u različitim vremenskim razmerama. Od kraja XX veka učvršćuje se verovanje da ljudske aktivnosti, a najviše emisija produkata sagorevanja fosilnih goriva, imaju presudan uticaj na klimu.

Sastav atmosfere. U atmosferi ima najviše azota i kiseonika, a nešto manje argona i drugih gasova (tabela 2.1). To su stalni sastojci atmosfere. Među sastojcima čiji je sadržaj promenljiv najvažnija je voda, koja se može javiti u sva tri agregatna stanja. Ozon i ugljendioksid su važni gasoviti promenljivi sastojci, a njihove količine se mogu menjati u širokim granicama.

Vodena para, ugljendioksid, metan, azotsuboksid i ozon nazivaju se *gasovi staklene bašte*. To su gasovi koji apsorbuju i emituju zračenje u infracrvenom delu spektra, što je glavni uzrok efekta staklene bašte (zadržavanje toplotnog zračenja Zemlje u atmosferi i njeno zagrevanje). Ozon je važan jer filtrira Sunčevo zračenje, odnosno sprečava da ultraljubičasto zračenje dospe do površine Zemlje. S druge strane, ugljendioksid i vodena para apsorbuju zračenje sa Zemlje, a ovom apsorpcijom se povećava temperatura atmosfere. Količina ugljendioksida u atmosferi zavisi od njegove potrošnje na vegetaciji, od apsorpcije na površini okeana, od produkcije u životinjskom svetu i od sagorevanja fosilnih goriva. Promene količina ozona i ugljendioksida i njihov uticaj na količine i raspodelu vode na Zemlji tema su mnogih istraživanja promena klime. Sada je već opšte prihvaćena teorija da se količina gasova staklene bašte u atmosferi povećava zbog sagorevanja fosilnih goriva, što dovodi do zagrevanja Zemlje i promene u režimu padavina i isparavanja. Takođe postoje indicije da je usled ovakvog antropogenog dejstva došlo i do ubrzanja hidrološkog ciklusa (Roads i sar., 2005).

Čvrste čestice u atmosferi su čestice prašine, dima, soli i mikroorganizmi. Na njima se Sunčevo zračenje rasipa i reflektuje u različitim delovima svetlosnog spektra, što nebu daje različite boje. Ove čestice imaju ulogu i u kondenzaciji vodene pare, formiranju oblaka i nastanku padavina.

2.2 Atmosferski pritisak

Atmosferski pritisak se definiše kao težina stuba vazduha koji se proteže od nivoa merenja do granice atmosfere na jedinicu površine. On opada sa visinom, s obzirom da iznad nivoa merenja ima manje vazduha. To se može opisati jednačinom:

$$\frac{dp}{dz} = -\rho_a g$$

gde je p pritisak vazduha u atmosferi, z visinska koordinata usmerena naviše, ρ_a gustina vazduha, a g gravitaciono ubrzanje. Vrednosti atmosferskog pritiska se obično izražavaju u milibarima (mb) kao celobrojne vrednosti. Milibar je jednak hektopaskalu (hPa), odnosno 1 bar je jednak 10^5 Pa ili 10^5 N/m². Izražavanje atmosferskog pritiska u visini živinog ili vodenog stuba je napušteno (inače, 1 mm Hg = 1.3332 mb).

Vazdušni pritisak na nivou mora pri temperaturi od 15°C iznosi 1013 mb. U proseku, pritisak opada za 1 mb na 8 m visine. U Beogradu, na lokaciji meteorološke opservatorije na Vračaru, koja se nalazi na nadmorskoj visini od 132 m, pritisci variraju od 990 do 1010 mb.

Atmosferski pritisak se obično meri pomoću živinog barometra, dok se promene pritiska mogu meriti aneroidnim barometrom.

Podaci o atmosferskom pritisku čine osnovu za meteorološke sinoptičke karte na kojima se crtaju izobare (linije jednakog pritiska) koje definišu oblasti visokog pritiska (anticikloni) i niskog pritiska (depresije). Interpretacijom tih karata nacrtanim na osnovu osmatranja u određenim vremenskim intervalima omogućava se identifikacija promena u vremenskim sistemima i formiranje vremenske prognoze (Shaw, 1994). Pored merenja na nivou mora, podaci merenja iz viših slojeva vazduha se crtaju i analiziraju na različitim visinama u atmosferi.

2.3 Vlažnost vazduha

Sadržaj vodene pare u vazduhu ili *vlažnost vazduha* može se okarakterisati na više načina.

Apsolutna vlažnost vazduha je zapravo gustina vodene pare ρ_v , odnosno masa vodene pare u jedinici zapremine vazduha na datoj temperaturi. Gustina vlažnog vazduha ρ_a je zbir gustina suvog vazduha ρ_{sv} i vodene pare ρ_v :

$$\rho_a = \rho_{sv} + \rho_v \quad (2.1)$$

Specifična vlažnost q je odnos gustine vodene pare ρ_v i gustine vazduha ρ_a i predstavlja masu vodene pare u jedinici mase vlažnog vazduha:

$$q = \frac{\rho_v}{\rho_a}$$

Pritisak vodene pare je takođe mera sadržaja vodene pare u vazduhu. Prema zakonu idealnog gasa, parcijalni pritisak vodene pare e dovodi se u vezu sa gustinom vodene pare ρ_v i temperaturom T :

$$e = \rho_v R_v T \quad (2.2)$$

gde je R_v je gasna konstanta vodene pare, a T apsolutna temperatura (u K). Iz prethodnog izraza se vidi da je pritisak vodene pare veći ako ima više vlage u vazduhu, tj. ako je veća apsolutna vlažnost ρ_v . Slični izrazi mogu se napisati i za vlažan vazduh i za suv vazduh. Ako je pritisak vlažnog vazduha p , pritisak suvog vazduha je $p - e$, pa se može napisati:

$$p = \rho_a R_a T \quad (2.3)$$

$$p - e = \rho_{sv} R_{sv} T \quad (2.4)$$

gde su R_a i R_{sv} gasne konstante vlažnog i suvog vazduha. Gasna konstanta suvog vazduha iznosi 287 Jkg⁻¹K⁻¹, a njen odnos sa gasnom konstantom vodene pare je:

$$\frac{R_{sv}}{R_v} = 0.622$$

gde je 0.622 odnos molekulske težine vodene pare i prosečne molekulske težine suvog vazduha.

Pritisak vodene pare, kao i atmosferski pritisak, obično se izražava u milibarima (mb). Milibar je jednak hektopaskalu (odnosno 1 bar = 10⁵ Pa). Izražavanje atmosferskog pritiska i pritiska vodene pare u visini živinog ili vodenog stuba je napušteno.

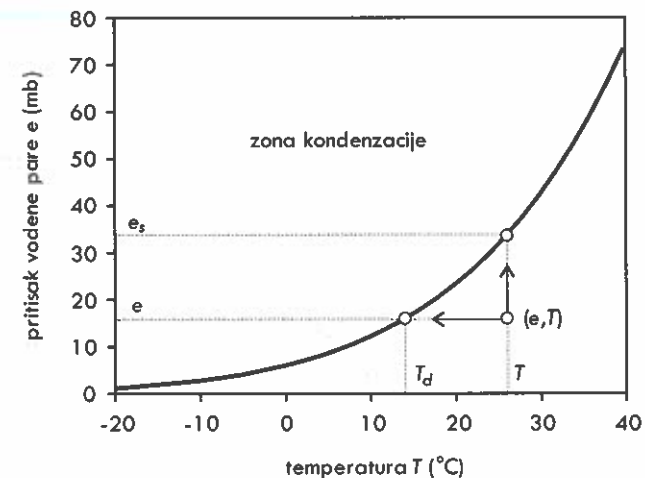
Vazduh je *zasićen (saturisan)* kada sadrži maksimalnu moguću količinu vodene pare pri određenoj temperaturi. Ako bi u vazduh pristizalo još vodene pare, ista količina pare bi morala da se kondenzuje. Odgovarajući pritisak e_s naziva se *pritisak vodene pare pri zasićenju*. Odnos između pritiska vodene pare pri zasićenju i temperature vazduha prikazan je na slici 2.2, gde se može videti da na višim temperaturama dolazi do zasićenja pri većem sadržaju vlage i obrnuto. Da bi na nekoj temperaturi T došlo do zasićenja vazduha, potrebno je da se sadržaj vlage poveća sa e na e_s . Ako se pritisak poveća iznad e_s , doći će do kondenzacije (odnosno do sublimacije pri temperaturama ispod 0°C). S druge strane, do zasićenja vazduha dolazi i ako se pri konstantnom pritisku vodene pare e temperatura spusti sa T na T_d . Temperatura T_d se naziva *tačka rose*. Pri daljem hlađenju vazduha dolazi do kondenzacije vodene pare.

Zavisnost pritiska vodene pare pri zasićenju od temperature prikazana na slici 2.2 može se izraziti i analitički (WMO, 2008b):

$$e_s = 6.112 \exp \left\{ \frac{17.62 T}{243.12 + T} \right\} \quad (2.5)$$

gde se temperatura T unosi u °C, a e_s dobija u mb. Gradijent krive pritiska vodene pare pri zasićenju (u mb/°C) je onda:

$$\Delta = \frac{de_s}{dT} = \frac{4098 e_s}{(237.3 + T)^2} \quad (2.6)$$



Slika 2.2. Zavisnost pritiska vodene pare pri zasićenju od temperature.

Deficit vlažnosti je razlika između pritiska vodene pare pri zasićenju e_s na temperaturi T i stvarnog pritiska vodene pare e . Deficit $e_s - e$ je praktično količina vodene pare koju vazduh može da primi pri temperaturi T pre nego što postane zasićen.

Relativna vlažnost vazduha je najčešće korišćena mera sadržaja vlage u atmosferi i definiše se kao odnos stvarnog pritiska vodene pare i pritiska pri zasićenju:

$$RH = \frac{e}{e_s}$$

Drugim rečima, to je odnos stvarne količine vlage u vazduhu i količine vlage potrebne za zasićenje vazduha na istoj temperaturi. Ovaj odnos se izražava u procentima. Smatra se da relativna vlažnost vazduha mora da bude manja od 70% da bi se stvari efikasno sušile, dok se korozija znatno ubrzava kada je relativna vlažnost veća od 65% (Wiesner, 1970). Ljudski organizam teško podnosi visoku relativnu vlažnost, naročito ako je udružena sa visokim temperaturama, jer tada znoj teže isparava (Jovanović, 1989).

Količina vodene pare u atmosferi direktno je povezana sa temperaturom vazduha. Na manjim temperaturama, tj. na većim visinama, sadržaj vodene pare je manji. Raspodela vodene pare na Zemljinoj površini takođe varira sa temperaturom; najmanja je na polovima, a najveća u ekvatorijalnim predelima.

Merenje vlažnosti vazduha. Vlažnost vazduha se najčešće meri pomoću suvog i vlažnog termometra. Kombinacija ova dva termometra naziva se *psihrometar*. Suvi termometar je običan termometar koji registruje trenutnu temperaturu vazduha. Vlažni termometar je takođe običan termometar, ali obavijen pamučnom krpicom čiji se jedan kraj nalazi potopljen u posudi sa destilovanom vodom. Na osnovu empirijskih relacija između razlike temperatura na ova dva termometra i pritiska vodene pare dobijaju se rezultati merenja. Vlažnost vazduha se meri i pomoću *higrometra*, koji radi na principu promene dužine vlasice pri različitoj vlažnosti vazduha.

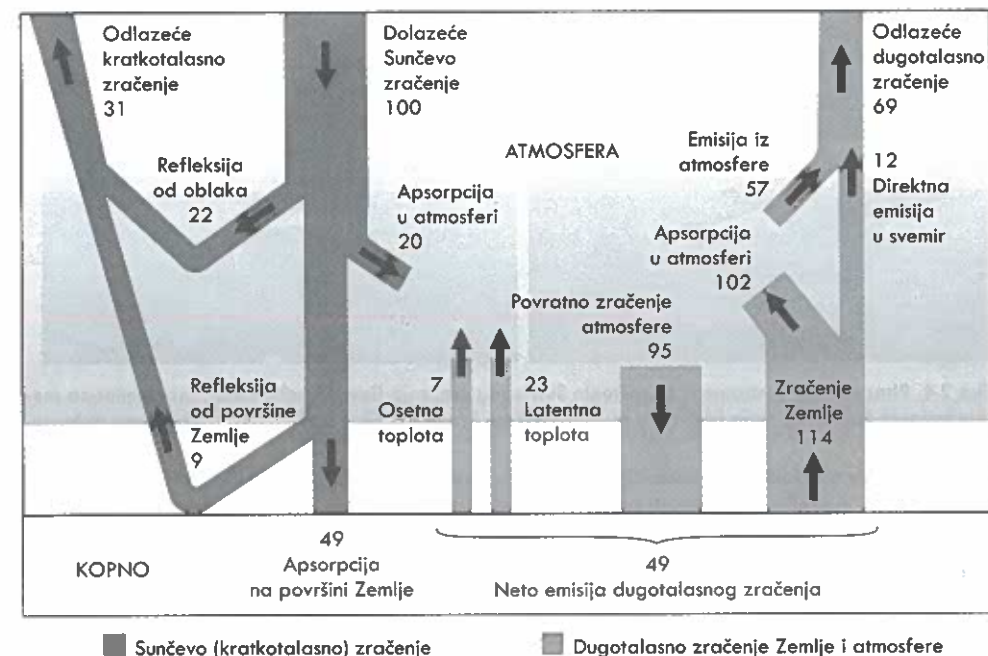
2.4 Zračenje Sunca i izračivanje Zemlje i atmosfere

Sunčevo zračenje je glavni izvor energije na površini Zemlje i glavna pokretačka snaga hidrološkog ciklusa. Poznavanje bilansa zračenja tj. toplotne energije u atmosferi i na površini Zemlje je od ključnog značaja za proučavanje procesa isparavanja i za proračun količina vode koje isparavaju.

2.4.1 Bilans zračenja u atmosferi

Sunce emituje energiju u obliku kratkih elektromagnetnih talasa. Na ulasku u atmosferu ovo zračenje najvećim delom pripada delu spektra sa kratkim talasnim dužinama od 0.1 do 4 mikrona. Ove talasne dužine pokrivaju vidljivi deo spektra, a delimično i ultraljubičasti i infracrveni deo spektra.

Preraspodelu Sunčevog zračenja na njegovom prolasku kroz atmosferu do površine Zemlje ilustruje levi deo slike 2.3. Sunčevo kratkotalasno zračenje koje prođe kroz granicu atmosfere ne dospeva u celini do površine Zemlje, već se *odbija* (reflektuje) od oblaka i od površine Zemlje, *rasipa* zbog prisustva čestica manjih od talasne

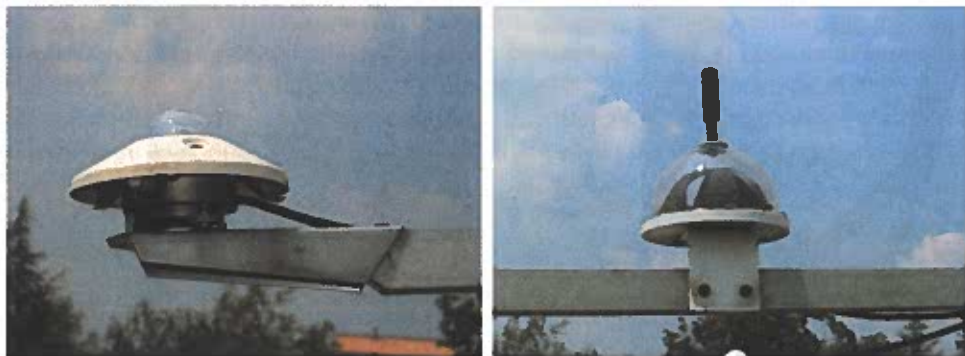


Slika 2.3. Prosečni globalni bilans zračenja (toplotne energije) u atmosferi i na površini Zemlje (prema Kiehl & Trenberth, 1997). Brojevi predstavljaju procenat pojedinih delova zračenja u odnosu na dolazeće Sunčevo zračenje na granici atmosfere.

dužine zračenja, ili *upija* (apsorbuje) u atmosferi ili na površini Zemlje. Količina Sunčevog zračenja koje se apsorbuje zavisi od sastava atmosfere, a naročito od sadržaja vodene pare i ugljen-dioksida koji su veoma promenljivi. U prosečnim uslovima oko 31% dolazećeg Sunčevog zračenja se odbije ili rasipa nazad ka svemiru, dok 49% zračenja apsorbuje površina Zemlje, a 20% apsorbuje atmosfera. Ovih 69% apsorbovane toplotne energije dolazećeg Sunčevog zračenja mora se izračiti nazad da bi se ostvarila energetska ravnoteža.

Apsorpcijom Sunčevog zračenja u atmosferi i na površini Zemlje dolazi do zagrevanja atmosfere i površine Zemlje, tako da i oni zrače (desni deo slike 2.3). Temperatura Zemlje iznosi u proseku 294 K, što je znatno manje od 6000 K na Suncu. S obzirom da je talasna dužina emitovanog zračenja obrnuto proporcionalna temperaturi tela koje zrači, Zemljino zračenje je većih talasnih dužina i slabije. Raspon talasnih dužina Zemljino zračenja je od 4 do 80 mikrona, što pripada infracrvenom delu spektra. Za dugotalasno zračenje Zemlje koristi se i izraz „Zemljino izračivanje“. Mali deo Zemljino zračenja vraća se direktno u svemir, dok se najveći deo apsorbuje u atmosferi.

Veći deo toplotne energije koju atmosfera primi apsorpcijom kratkotalasnog Sunčevog i dugotalasnog Zemljino zračenja izračuje se nazad ka površini Zemlje, a manji se vraća u svemir. U ukupni bilans zračenja ulaze još i toplota koja se oslobađa isparavanjem i osetna toplota koja je posledica razmene toplotne zbog razlike u temperaturama između površine sa koje voda isparava i vazduha.



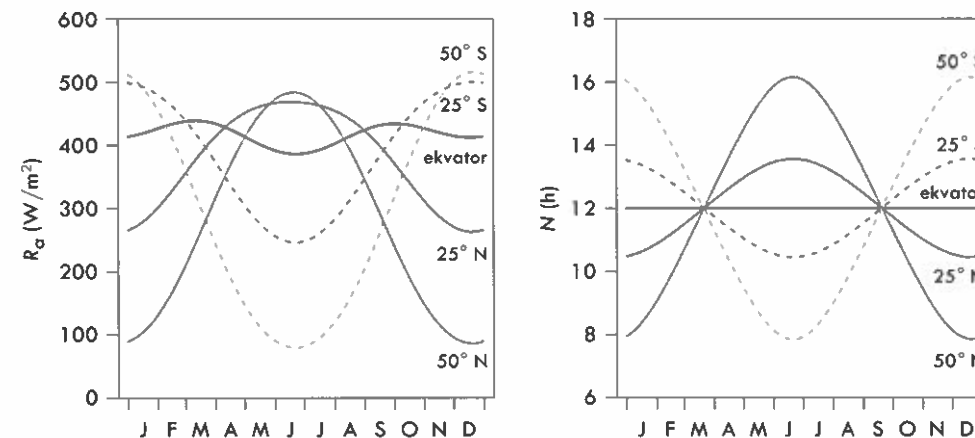
Slika 2.4. Piranometar, instrument za merenje Sunčevog zračenja (levo) i heliometar, instrument za merenje trajanja Sunčevog sjaja (desno) u meteorološkom krugu RHMZ u Košutnjaku u Beogradu (fotografije: J. Plavšić).

Vodena para i ugljendioksid u atmosferi naročito apsorbuju zračenja talasnih dužina od 5 do 7 mikrona i preko 14 mikrona, dok propuštaju talase između 8 i 13 mikrona. To znači da vodena para i ugljendioksid u najnižim slojevima atmosfere upijaju veći deo Zemljinog dugotalasnog zračenja, a zatim zrače nazad prema tlu i dodatno zagrevaju Zemlju. Ovo svojstvo atmosfere da zadržava dugotalasno zračenje naziva se *efektom staklene bašte* jer i staklo ima sličnu propusnost (Penzar, 1996), a gasovi koji apsorbuju dugotalasno zračenje se nazivaju gasovi staklene bašte.

Merenje zračenja. Jačina Sunčevog zračenja se meri različitim vrstama instrumenata (Rasmusson i sar., 1993). Piranometar (slika 2.4 levo) meri kratkotalasno zračenje Sunca i atmosfere; ako se zakloni s gornje strane i okrene nagore onda meri difuzno Sunčevo zračenje, a ako se okrene prema tlu tada meri odbijeno Sunčevo zračenje. Piradiometar (radiometar namenjen Sunčevom zračenju) meri Sunčevo zračenje ako se zakloni sa donje strane; ako se zakloni sa gornje strane, onda meri Zemljino zračenje. Bez zaklona, piradiometar meri neto zračenje, odnosno razliku između Sunčevog i Zemljinog zračenja, i tada se zove neto radiometar. Pirheliometar meri samo direktno Sunčevo zračenje na horizontalnu površinu. Pirgeometar meri dugotalasno atmosfersko zračenje na crnu horizontalnu površinu pri ambijentalnoj temperaturi. Trajanje Sunčevog sjaja tradicionalno se meri heliografima, koji se sastoje od staklene kugle i papirne trake koja se prži Sunčevim zracima fokusiranim kroz kuglu, dok moderniji heliometri (slika 2.4 desno) imaju digitalno registrovanje trajanja Sunčevog sjaja.

2.4.2 Proračun Sunčevog zračenja na granici atmosfere

Sunčevo zračenje na granici atmosfere u jedinici vremena na jediničnu površinu upravnu na pravac Sunčevih zraka i na prosečnoj udaljenosti od Zemlje naziva se *solarna konstanta* i iznosi 1370 W/m^2 . Međutim, zbog kruženja Zemlje oko Sunca i Zemljine rotacije oko njene nagnute ose, ugao pod kojim Sunčevi zraci dospevaju na granicu atmosfere se menja tokom dana, po godišnjim dobima i po geografskoj širini. Sve ove promene su pravilne, pa se jačina Sunčevog zračenja na granici atmosfere R_a u



Slika 2.5. Sunčevo zračenje na granici atmosfere R_a (levo) i dužina dana ili potencijalno dnevno trajanje Sunčevog sjaja N (desno).

bilo koje doba i na bilo kom mestu može odrediti uz pomoć astronomskih proračuna pozicije Sunca u odnosu na Zemlju (Allen i sar., 1998):

$$R_a = \frac{G_{SC}}{\pi} d_r (\omega_s \sin \varphi \sin \delta + \sin \omega_s \cos \varphi \cos \delta) \quad (2.7)$$

gde je G_{SC} solarna konstanta koja iznosi 1370 W/m^2 ili $118.08 \text{ MJ m}^{-2} \text{ dan}^{-1}$, φ je geografska širina u radijanima, d_r je relativno rastojanje Zemlje od Sunca, ω_s je ugao zalaska Sunca u radijanima i δ je solarna deklinacija u radijanima. Poslednje tri veličine računaju se iz sledećih izraza:

$$d_r = 1 + 0.033 \cos\left(\frac{2\pi}{365} J\right),$$

$$\delta = 0.4093 \sin\left(\frac{2\pi}{365} J - 1.39\right),$$

$$\omega_s = \arccos(-\tan \varphi \tan \delta)$$

gde je J redni broj dana u julijanskoj godini. Dužina dana ili potencijalno trajanje Sunčevog sjaja N (u časovima) je jednako:

$$N = \frac{\omega_s}{\pi} \cdot 24 \text{ (h)} \quad (2.8)$$

Na slici 2.5 prikazano je kako se menja prosečna dnevna jačina Sunčevog zračenja na granici atmosfere R_a i dužina dana N po mesecima i za različite geografske širine, dok su u dodatku A date vrednosti ove dve veličine za sredine meseci na geografskim širinama karakterističnim za Srbiju.

2.4.3 Proračun neto zračenja na površini Zemlje

Neto zračenje koje prima površina Zemlje može se formulirati bilansnom jednačinom (slika 2.6):

$$R_n = R_{ns} - R_{nl} \quad (2.9)$$

Neto zračenje je razlika neto dolazećeg kratkotalasnog Sunčevog zračenja R_{ns} i neto odlazećeg dugotalasnog Zemljinog zračenja R_{nl} .

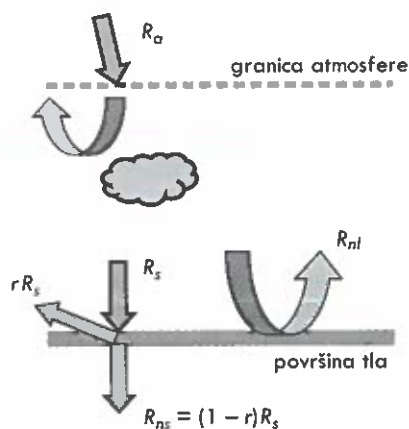
Deo odbijenog Sunčevog zračenja u odnosu na ukupno zračenje naziva se koeficijent refleksije ili *albedo* (α), čije se vrednosti kreću između 0 i 1. Albedo zavisi od vrste površine od koje se zračenje odbija (tabela 2.2). Beli oblaci i beo sneg odbijaju veliki procenat dolazećeg zračenja, pa je vrednost njihovog albeda čak i 0.9. S druge strane, tamne površine dubokih mora upijaju većinu zračenja i imaju albedo gotovo jednak nuli. Neto kratkotlasno Sunčevo zračenje tada je jednako:

$$R_{ns} = (1 - \alpha)R_s \quad (2.10)$$

Kratkotlasno Sunčevo zračenje koje stiže na površinu Zemlje R_s , ukoliko se ne raspolaže podacima merenja, može se odrediti na osnovu relacije u kojoj zavisi od zračenja na granici atmosfere R_a i relativne insolacije (osunčanosti) n/N :

$$R_s = \left(a + b \frac{n}{N} \right) R_a \quad (2.11)$$

gde su a i b koeficijenti od kojih a predstavlja deo zračenja u potpuno oblačnom danu (za $n/N = 0$), i $a + b$ deo zračenja u potpuno vedrom danu (za $n/N = 1$). Za ova dva koeficijenta obično se usvaja $a = 0.25$ i $b = 0.5$. Relativna insolacija je odnos stvarnog trajanja Sunčevog sjaja n (koje se dobija merenjima) i prosečne dužine dana tj. potencijalnog trajanja Sunčevog sjaja N . Vrednosti R_a i N za sredine meseci na geografskim širinama karakterističnim za Srbiju mogu se naći u dodatku A, a mogu se izračunati u pomoću izraza (2.7) i (2.8).



Slika 2.6. Komponente u proračunu neto zračenja na površini Zemlje.

U bilans dugotalasnog zračenja ulazi dugotalasno zračenje koje emituje Zemlja R_{le} i dugotalasno zračenje atmosfere R_{la} , koje je posledica njenog zagrevanja kratkotlasnim Sunčevim zračenjem i koje dospeva do površine Zemlje:

$$R_{nl} = R_{le} - R_{la} \quad (2.12)$$

Za ova dugotalasna zračenja može se primeniti Štefan-Bolcmanov zakon po kome je $R_l = \epsilon \sigma T_a^4$, gde je T_a apsolutna temperatura površine koja emituje zračenje u kelvini-ma, σ Štefan-Bolcmanova konstanta koja iznosi $5.67 \cdot 10^{-8} \text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-4}$ ili $4.9 \cdot 10^{-3} \text{ Jm}^{-2}\text{K}^{-4} \text{ dan}^{-1}$, a ϵ koeficijent emisivnosti kojim se uzima u obzir uticaj prisustva oblaka i apsorpcije na vodenoj pari i ugljendioksidu. Empirijska formula kojom se računa neto dugotalasno zračenje glasi:

$$R_{nl} = \sigma T_a^4 (0.34 - 0.0443 \sqrt{e_a}) \left(0.1 + 0.9 \frac{n}{N} \right) \quad (2.13)$$

gde je e_a vlažnost vazduha odnosno pritisak vodene pare u mb, a n/N je relativna insolacija. U gornjem izrazu apsolutna temperatura T_a na četvrti stepen se obično ocenjuje kao:

$$T_a^4 = \frac{(T_{\min} + 273.16)^4 + (T_{\max} + 273.16)^4}{2}$$

gde su T_{\min} i T_{\max} minimalne i maksimalne dnevne temperature u °C.

Primer 2.1. (a) Izračunati neto zračenje na površinu Zemlje za maj 2006. godine na lokaciji meteorološke stanice Palić, čija je geografska širina $46^\circ 6' \text{ N}$. Za ovaj mesec poznate su izmerene vrednosti minimalne i maksimalne dnevne temperature $T_{\min} = 11.4^\circ \text{C}$ i $T_{\max} = 21.7^\circ \text{C}$, napona vodene pare $e_a = 12.4 \text{ mb}$ i ukupnog trajanja Sunčevog sjaja $n = 238.7 \text{ h}$. Smatrati da je površina Zemlje u okolini stanice pokrivena travom za koju albedo iznosi $r = 0.23$. (b) Izračunati neto zračenje na vodenu površinu Paličkog jezera, pretpostavljajući da albedo za vodenu površinu iznosi $r = 0.05$.

Rešenje. (a) Prosečno zračenje na granici atmosfere i prosečno potencijalno dnevno trajanje Sunčevog sjaja (dužina dana) za mesec maj određuju se iz dodatka A ekstrapolacijom za geografsku širinu stanice na Paliću od $46^\circ 6' = 46.1^\circ$, pa se dobija $R_a = 453.15 \text{ W/m}^2$ i $N = 14.79 \text{ h}$. Na osnovu ukupnog osmotrenog mesečnog trajanja Sunčevog sjaja od $n = 238.7 \text{ h/mes}$, prosečno dnevno trajanje Sunčevog sjaja iznosi $n = 238.7/31 = 7.70 \text{ h/dan}$. Kako je prosečna dužina dana u razmatranom mesecu $N = 14.79 \text{ h}$, prosečna relativna insolacija iznosi:

$$\frac{n}{N} = \frac{7.70}{14.79} = 0.521$$

Kratkotlasna Sunčeva radijacija koja stiže na površinu Zemlje R_s iznosi:

$$R_s = \left(0.25 + 0.5 \frac{n}{N} \right) R_a = (0.25 + 0.5 \cdot 0.521) \cdot 453.15 \text{ W/m}^2 = 231.2 \text{ W/m}^2$$

Tabela 2.2. Vrednosti albeda za neke vrste površina (izvori: Penzar, 1996; Shuttleworth, 1993; Wiesner, 1970).

Vrsta površine	Albedo
Šume	0.03 – 0.22
četinarska šuma	0.14
hrastova šuma	0.18
tamna šuma	0.05
Trava i livade	0.20 – 0.26
referentna trava	0.23
Poljoprivredne kulture	
uzorana polja	0.04 – 0.12
visoke kulture	0.15 – 0.20
žitarice i niske kulture	0.20 – 0.26
Golo zemljište	0.10 (vlažno) – 0.35 (suvo)
Sneg i led	0.20 – 0.80
svež sneg	0.68 – 0.80
led	0.43 – 0.60
Oblaci	
tanki	0.15 – 0.30
debeli	0.70 – 0.96
Vodena površina	0.02 – 0.18

dok je neto kratkotalasna Sunčeva radijacija R_{ns} :

$$R_{ns} = (1 - \alpha)R_s = (1 - 0.23) \cdot 231.2 \text{ W/m}^2 = 171.1 \text{ W/m}^2$$

Neto dugotalasno zračenje se određuje prema empirijskoj relaciji (2.13):

$$R_{nl} = 5.67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{W/m}^2}{\text{K}^4} \frac{(11.4 + 273.2)^4 + (21.7 + 273.2)^4}{2} \text{K}^4 \cdot (0.34 - 0.044\sqrt{12.4})(0.1 + 0.9 \cdot 0.521) = 42.1 \text{ W/m}^2$$

Prosečna neto radijacija koju prima površina Zemlje na lokaciji stanice Palić u mesecu maju 2006. godine onda je jednaka:

$$R_n = R_{ns} - R_{nl} = 171.1 - 42.1 = 129.0 \text{ W/m}^2 = 12.9 \frac{\text{MJ}}{\text{m}^2 \text{ dan}}$$

(b) Da bi se odredilo neto zračenje na površinu Palićkog jezera, potrebno je izračunati neto kratkotalasno zračenje sa pretpostavljenom vrednošću albeda od 0.05 za vodenu površinu:

$$R_{ns} = (1 - \alpha)R_s = (1 - 0.05) \cdot 231.2 \text{ W/m}^2 = 219.7 \text{ W/m}^2$$

Uz isto neto dugotalasno zračenje kao za travnatu površinu, prosečna neto radijacija na površinu jezera u mesecu maju 2006. godine je jednaka:

$$R_n = R_{ns} - R_{nl} = 219.7 - 42.1 = 177.6 \text{ W/m}^2 = 17.76 \frac{\text{MJ}}{\text{m}^2 \text{ dan}}$$

Tabela 2.3. Prosečne temperature u Srbiji u periodu 1981-2010 (izvor: Republički hidrometeorološki zavod).

Stanica	Palić	Beograd	Negotin	Niš	Zlatibor	Sjenica	Kopaonik
Nadmorska visina (m)	102	132	42	202	1028	1038	1710
Temperature (°C)							
Januar	-0.4	1.4	0.3	0.6	-2.1	-3.6	-4.6
Februar	1.3	3.1	1.9	2.4	-1.3	-2.7	-5.1
Mart	6.0	7.6	6.6	7.0	2.4	1.8	-2.2
April	11.6	12.9	12.2	12.2	7.2	6.5	2.0
Maj	17.3	18.1	17.7	17.1	12.3	11.5	7.3
Jun	20.4	21.0	21.3	20.4	15.4	14.7	10.6
Jul	22.3	23.0	23.5	22.5	17.2	16.5	12.7
Avgust	21.7	22.7	22.8	22.3	17.5	16.2	12.8
Septembar	16.8	18.0	17.6	17.4	13.1	11.9	8.7
Oktobar	11.4	12.9	11.6	12.3	8.8	7.8	5.0
Novembar	5.4	7.1	5.5	6.4	3.2	2.2	0.0
Decembar	0.8	2.7	1.1	2.1	-1.2	-2.1	-3.5
God.	11.2	12.5	11.8	11.9	7.7	6.7	3.6

2.5 Temperatura vazduha

Sa hidrološke tačke gledišta, temperatura vazduha je od interesa zato što utiče na vrstu padavina, na količinu isparavanja i transpiracije, kao i na topljenje snega.

Temperature vazduha imaju svoje dnevne i sezonske varijacije. Tokom dana, pod uslovom da nema značajne oblačnosti, minimalne temperature se javljaju ubrzo po izlasku Sunca, a maksimalne u rano popodne. Prisustvo oblaka smanjuje količinu dolazećeg Sunčevog zračenja i sprečava odlazak Zemljinog zračenja, pa se temperature tokom oblačnog dana kreću u užem rasponu.

U prostornom smislu, temperature variraju u zavisnosti od geografskog položaja i od nadmorske visine. Opadanje temperature sa visinom naziva se *temperaturni gradijent* i u proseku iznosi 0.65°C na 100 m visine.

Temperature se mere u meteorološkim zaklonima na visini od 2 m od zemlje. Zaklon je neophodan kao zaštita od direktnog Sunčevog zračenja, padavina i vetra. Kao instrumenti se koriste živini i alkoholni termometri. Temperature se mogu meriti kontinualno (termografima) ili u određenim vremenskim trenucima tokom dana, a beleže se i maksimalna i minimalna dnevna temperatura (pomoću tzv. maksimalnog i minimalnog termometra).

Srednje dnevne temperature se računaju kao prosek svih dnevnih očitavanja. U našoj zemlji temperature se mere u 7, 14 i 21 čas, a srednja dnevna temperatura se određuje kao:

$$T_{sr,dn} = \frac{T_7 + T_{14} + 2T_{21}}{4}$$

U nedostatku više očitavanja, srednja dnevna temperatura se može proceniti kao prosek maksimalne i minimalne dnevne temperature:

$$T_{sr,dn} = \frac{T_{max} + T_{min}}{2}$$

Srednje mesečne temperature, kao i mesečni ekstremi, koriste se za opisivanje temperaturnog režima neke lokacije. U tabeli 2.3 su prikazani višegodišnji proseci srednjih mesečnih i godišnjih temperatura na nekoliko karakterističnih lokacija u Srbiji. Najviša temperatura u Srbiji od 44.9 °C izmerena je 24.7.2007. u Smederevskoj Palanci, a najniža od -39.5 °C izmerena je 13.1.1985. u Karajukića Bunarima na Pešterskoj visoravni.

2.6 Vetar

Vetar predstavlja strujanje vazduha do kojeg dolazi zbog neravnomernog zagrevanja i hlađenja površine Zemlje. On prenosi toplotu i vodenu paru kroz atmosferu, čime se izravnavaju razlike u temperaturi i sadržaju vlage. Vetar ima značajnu ulogu u procesu isparavanja i u formiranju padavina. Sa inženjerske tačke gledišta, vetar je važan kao vid opterećenja na konstrukcije, kao uzrok vibracija objekata pod uticajem udara i vrtloga i kao uzrok formiranja talasa na vodenim površinama.

Preciznija definicija vetra jeste da je to horizontalna komponenta strujanja vazduha paralelna sa površinom Zemlje. U tom smislu vetar je vektorska veličina koja se definiše pravcem i jačinom (brzinom). Pravac vetra je pravac iz kojeg vetar duva (npr. severozapadni vetar je onaj koji duva ka jugoistoku) i meri se pomoću vetrokaza u stepenima od pravca severa, a obično se izražava kao jedan od 8 ili 16 standardnih pravaca na kompasu.

Brzina vetra se meri anemometrima, a izražava se u različitim jedinicama: metri-ma u sekundi, kilometrima na čas ili čvorovima. Jedan čvor predstavlja brzinu od jedne nautičke milje (1852 m) na čas. Pored ovih jedinica, često se koristi i Boforova opisna skala sa gradacijom od 0 do 12 (tabela 2.4), pa se jačina vetra izražava u boforima. Savremeni anemometri istovremeno mere i pravac i brzinu vetra (slika 2.7).

Tabela 2.4. Boforova skala vetrova (izvor: Nova enciklopedija, 1977).

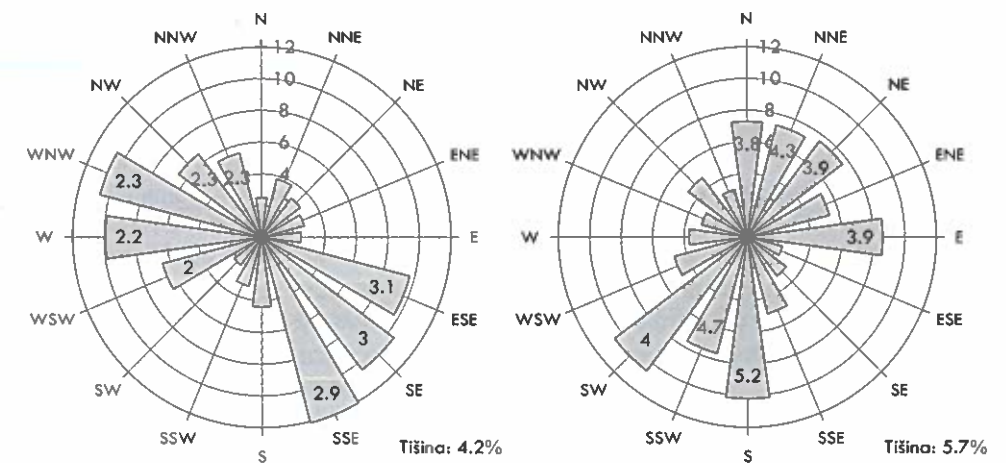
Naziv vetra	Brzina vetra		
	Boforov broj	m/s	km/h
Tišina	0	0	0
Lahor	1	0.9	3
Povetarac	2	2.4	9
Slab vetar	3	4.4	16
Umeren vetar	4	6.7	24
Jak vetar	5	9.3	34
Žestok vetar	6	12.3	44
Olujni vetar	7	15.5	55
Oluja	8	18.9	68
Jaka oluja	9	22.6	82
Žestoka oluja	10	26.4	96
Vihor	11	30.5	110
Orkan	12	34.8	125



Slika 2.7. Instrumenti za merenje brzine vetra (levi instrument) i pravca vetra (desni instrument; fotografija: J. Plavšić).

Uobičajeno je da se podaci o pravcima i brzini vetra prikazuju na dijagramu koji se naziva *ruža vetrova*. Takav dijagram prikazuje učestalost pojedinih pravaca vetra i odgovarajuće srednje brzine. Na slici 2.8 prikazana su dva primera ruže vetrova: za Beograd, gde preovlađuju jugoistočni i zapadni vetrovi, i za Kopaonik, gde su jugozapadni vetrovi najčešći.

Strujanje vetra uz površinu Zemlje ili prilikom opstrujavanja objekata podleže zakonima mehanike fluida. Pod uticajem oblika i hrapavosti površine formira se granični sloj struje vazduha. U ovom sloju brzina struje se menja sa visinom, odnosno rastojanjem od površine. Raspored brzina u graničnom sloju obično se opisuje logaritamskom funkcijom ($u = a \log z + b$) ili stepenom funkcijom ($u = az^b$). Brzina vetra se standardno meri na visini od 10 m. Da bi se odredila brzina vetra na nekoj drugoj visini, koriste se gore pomenuti analitički oblici. Obično se koristi stepeni oblik, prema kome se brzina vetra na drugim visinama može odrediti iz odnosa:



Slika 2.8. Ruže vetrova u Beogradu (levo) i na Kopaoniku (desno) za period 1981-2010 koje pokazuju učestalosti vetra na visini od 10 m u procentima, dok su za najučestalije pravce naznačene prosečne brzine u m/s (izvor: Republički hidrometeorološki zavod).

$$\frac{u(z)}{u(10)} = \left(\frac{z}{10}\right)^b$$

Vrednost eksponenta b se kreće od $1/7$ do $1/5$ (Jovanović, 1989).

Reljef značajno utiče na strujnu sliku vetra. Brzina vetra iznad planina je znatno veća od brzine na istoj visini u ravničarskim predelima. Na zavetrinskim stranama planina vetar se smanjuje, mada se na tim mestima mogu registrovati velike fluktuacije usled vrtloženja. U uskim dolinama između planina dolazi do povećanja brzine vetra zbog njegovog horizontalnog usmeravanja.

3 PADAVINE

3.1 Nastanak padavina

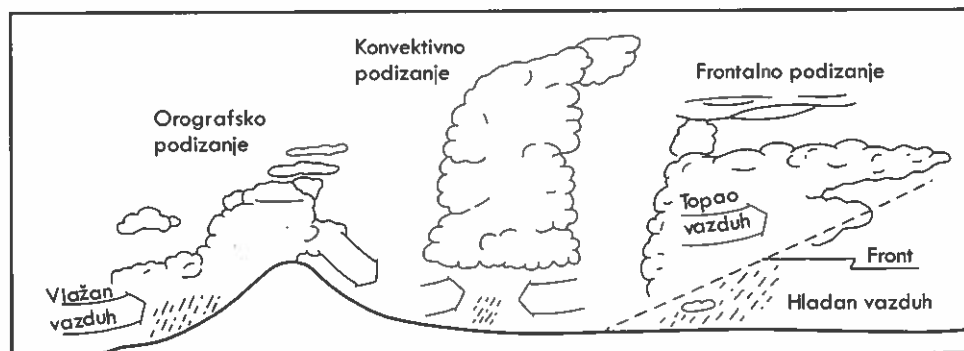
Padavine su glavni snabdevač slivova vodom, pa od njih najčešće počinje razmatranje ciklusa oticaja na slivu. Padavine se relativno lako mogu meriti na jednoj lokaciji. Ipak, zbog njihove velike prostorne neravnomernosti, određivanje količine vode koja je dospela na sliv putem padavina često je jedan od najtežih inženjerskih zadataka.

Pod padavinama se podrazumeva taloženje vode iz atmosfere na površinu zemlje. One obuhvataju kišu, sneg i druge oblike u kojima voda dospeva do površine zemlje, kao što su grad ili sugradica. Pojave kao što su rosa, slana i inje takođe predstavljaju padavine, ali do njih dolazi kondenzacijom zasićene vodene pare u dodiru sa hladnijim površinama na zemlji.

Formiranje padavina u atmosferi je složen proces. Voda se u atmosferi nalazi u sva tri agregatna stanja: gasovitom (kao vodena para), tečnom (kapljice vode) i čvrstom (kristali leda). Do formiranja padavina iz oblaka dolazi kroz procese prelaska vodene pare u druga dva agregatna stanja, tj. kroz kondenzaciju i sublimaciju (direktni prelazak iz čvrstog u gasovito stanje). Da bi došlo do formiranja padavina, moraju biti ispunjeni sledeći uslovi: a) u vazduhu mora postojati dovoljno vlage, odnosno vodene pare, b) vazduh sa vodenom parom se mora ohladiti do tačke kondenzacije, c) vodena para se mora kondenzovati u kapljice vode ili čestice leda, i d) kapljice vode ili čestice leda moraju dovoljno narasti da mogu da padaju na zemlju. U nastavku su opisani najvažniji delovi ovog procesa.

Hlađenje vazdušnih masa. Za hlađenje vazdušnih masa neophodno je njihovo podizanje. Tri osnovna mehanizma podizanja vazdušnih masa su (slika 3.1): *frontalno* podizanje (kada se topao vazduh podiže preko hladnijeg vazduha preko frontova), *orografsko* podizanje (kada se vazdušna masa podiže da bi savladala prepreke u vidu planinskih vrhova) i *konvektivno* podizanje (usled zagrevanja vazduha u kontaktu s tлом vazduh se povlači nagore). Prema načinu podizanja vazdušnih masa definišu se i tri osnovna tipa padavina: frontalne, orografske i konvektivne.

Kondenzacija vodene pare i formiranje oblaka. Zasićenje vazduha vodenom parom nije dovoljno da dođe do kondenzacije vodene pare, tj. njenog prelaska u tečno stanje, već bi se hlađenjem vazduh morao dovesti u stanje prezasićenosti (supersaturacije). Do hlađenja vodene pare će doći pri podizanju vazdušnih masa u atmosferi. Proces kondenzacije vodene pare je praktično nemoguć u čistom vazduhu, već je po-



Slika 3.1. Mehanizmi podizanja i hlađenja vazдушnih masa neophodnih za formiranje padavina (prema Bedient i sar., 2008).

trebno da ga potpomognu čestice za koje se molekuli vode vezuju. Takve čestice predstavljaju jezgra kondenzacije i nazivaju se *aerosoli*. Kao jezgra mogu poslužiti čestice prašine ili joni soli iz okeana koji elektrostatički privlače molekule vode. Prečnik tih čestica je vrlo mali, od 10^{-3} do 10 mikrona (tabela 3.1).

Kondenzacijom vodene pare formiraju se *kapljice vode* koje čine oblake. Veličina tih kapljica iznosi od 1 do 100 mikrona. Pored kapljica vode, u oblacima se nalaze i *kristali leda*. Oni se formiraju od kapljica vode kada se temperatura približava tački mržnjenja (čistoj vodi je potrebna veoma niska temperatura da se smrzne, čak i -40°C , dok se kapljice u oblacima u normalnim uslovima mrznu na temperaturama od -10 do -20°C). Kapljice vode se mogu smrznuti samo u prisustvu čestica koje se nazivaju ledena jezgra. Smrznute kapljice zadržavaju sferni oblik i postaju kristali leda. Vodena para se onda može skupljati direktno na površini kristala leda sublimacijom.

Oblaci se klasifikuju prema visini na kojoj se nalaze (tabela 3.2). Visoki oblaci se sastoje od kristala leda, srednje visoki od kapljica vode i kristala leda, dok se niski oblaci sastoje prevashodno od kapljica vode od kojih je većina prehladna. Oblaci koji se veoma intenzivno šire u vertikalnom smislu (kao što su kumulonimbusi) sastoje se od kapljica u nižim slojevima i kristala leda u višim slojevima.

Formiranje padavina iz oblaka. Kapljice vode i kristali leda u oblacima se uvećavaju kroz proces kondenzacije i međusobno se sudaraju i spajaju pod uticajem turbulencije u vazduhu, sve dok ne porastu dovoljno da sila gravitacije nadvlada silu uzgona vazdušne struje, tako da one počinju da padaju. Proces rasta kapljica i kristala leda do veličine kišne kapi (oko 1 mm) predstavlja fazu za koju u nauci postoje različite teorije.

Tabela 3.1. Čestice u procesu kondenzacije i formiranja padavina (prema Shaw, 1994).

Čestica	Prečnik (mikrona)	Broj na dm^3	Terminalna brzina (cm/s)
Tipično jezgro kondenzacije	0.1	10^6	0.0001
Tipična kapljica u oblaku	10	10^6	1
Velika kapljica u oblaku	50	10^3	27
Uobičajena granica između kapljice u oblaku i kišne kapi	100		70
Tipična kišna kap	1000	1	650

Tabela 3.2. Klasifikacija oblaka.

Kategorija	Naziv	Visina
Visoki oblaci	cirus	6–12 km
	cirokumulus	
	cirrostratus	
Srednji oblaci	altokumulus	3–6 km
	altostratus	
Niski oblaci	stratus	0–3 km
	nimbostratus	
	stratokumulus	
Oblaci sa visinskim razvojem	kumulus	0–2 km
	kumulonimbus	0–6 km

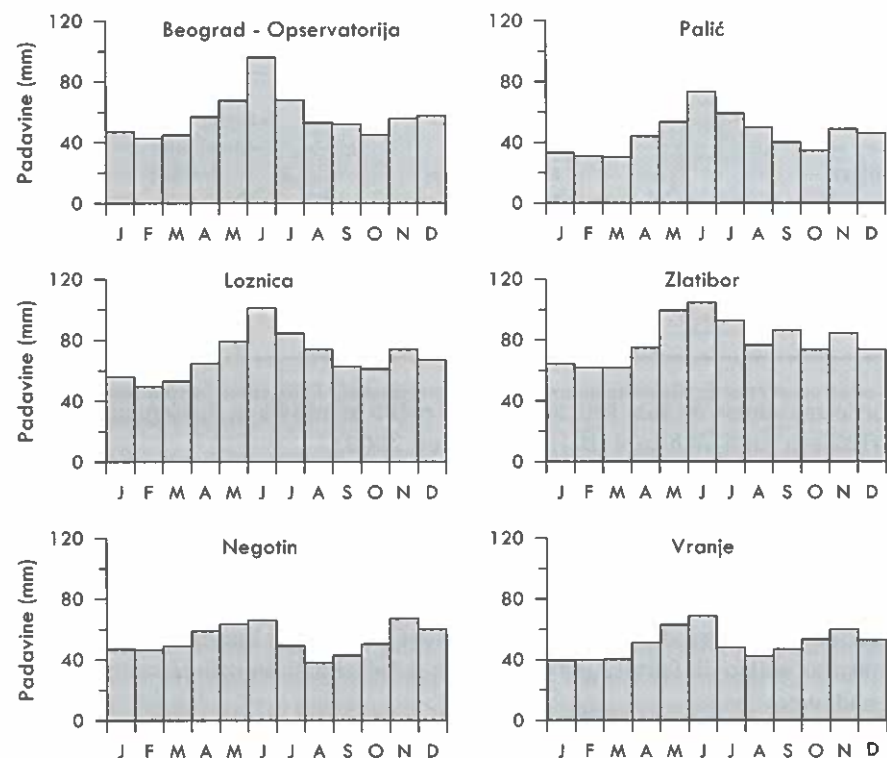
Novije teorije se odnose na rast kristala leda na račun kišnih kapi, ili stapanje manjih kapljica pri naletu padajućih kapi (Barry & Chorley, 2003).

Intenzitet padavina koje dolaze iz oblaka zavisi od sledećih faktora: 1) od intenziteta zamene vlage koju odnose već formirane padavine novom vodenom parom; 2) od intenziteta kojim se vlaga pretvara iz vodene pare u kapljice vode ili kristale leda dovoljne veličine da počnu da padaju, što posredno uključuje brzinu hlađenja vazduha, brzinu podizanja vazдушnih masa, intenzitet kondenzacije i rasta kapljica, koji opet zavise od količine jezgara kondenzacije, turbulencije i vertikalnih brzina vazdušne struje. Nepoznavanje svih ovih faktora je razlog zašto je teško dati pouzdane kvantitativne prognoze padavina.

3.2 Padavinski režim

Padavine variraju u vremenu i u prostoru u skladu sa globalnom atmosferskom cirkulacijom (prema kojoj se vazdušne mase kreću) i u skladu sa lokalnim faktorima. Pored globalnih faktora, kao što su geografska širina ili doba godine, na padavine utiče i niz drugih faktora. Reljef ima jedan od ključnih uticaja na količinu padavina, što se ogleđa kroz orografski efekat većeg izlučivanja padavina na padinama planina okrenutim ka vetru (privetrinska strana) u odnosu na padine koje su zaklonjene od vetra (zavetrinska strana). Blizina okeana, mora i velikih jezera takođe utiče na povećane padavine u nekoj oblasti zbog većeg isparavanja koje dopunjuje atmosfersku vlagu.

Prosečna unutargodišnja raspodela mesečnih padavina za duži niz godina naziva se režimom padavina ili pluviometrijskim režimom, koji je jedan od pokazatelja klime nekog područja. Za područje koje ima više padavina u periodu jesen-zima kaže se da ima morski ili mediteranski režim padavina, a za ona koja imaju više padavina u periodu proleće-leto kaže se da imaju kontinentalni režim padavina. Na teritoriji Srbije severno od linije Prokletije – Besna Kobilica zastupljen je kontinentalni režim padavina sa najvećim padavinama u maju i junu i najmanjim u februaru, dok je južno od te linije prisutan izmenjeni mediteranski režim sa najvećim padavinama od oktobra do decembra i najmanjim u julu i avgustu (Gavrilović i Dukić, 2002). Na slici 3.2 prikazan je režim padavina na lokacijama nekoliko meteoroloških stanica u Srbiji, a na slici 3.3 je dat prostorni raspored prosečnih godišnjih padavina na teritoriji Srbije. Režim padavina na nekom slivu u velikoj meri određuje i hidrološki režim, tj. režim oticaja.



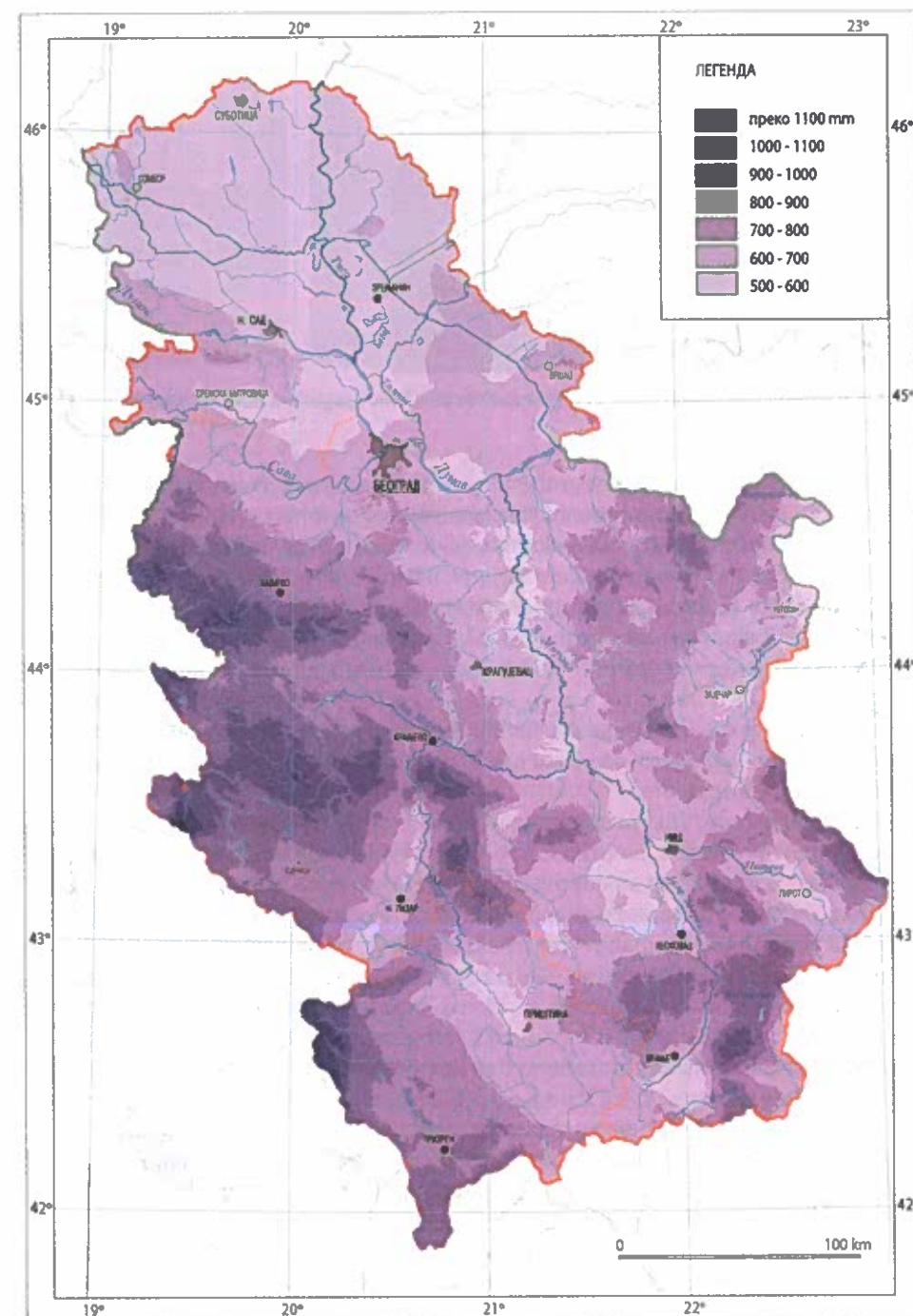
Slika 3.2. Unutargodišnji režim padavina na izabranim lokacijama prikazan preko prosečnih mesečnih padavina u periodu 1946-2006 (prema podacima iz VOS, 2009).

3.3 Merenje padavina

Opšti naziv za uređaje kojima se meri visina padavina je *kišomer*. Razlikujemo dve osnovne vrste kišomera:

- *neregistrujući kišomer*, kojim se meri ukupna visina pale kiše u nekom vremenskom periodu (koriste se nazivi *totalizator* ili samo *kišomer*), i
- *registrujući kišomer*, kojim se registruju promene intenziteta kiše tokom vremena (obično se naziva *pluviograf* ili *ombrograf*).

Neregistrujući kišomeri se koriste za merenje dnevnih visina padavina ili ukupnih visina padavina za neki duži vremenski period. Po konstrukciji su slični, ali su oni koji mere padavine u dužem periodu veći kako bi primili veće količine vode. Sastoje se od metalnog cilindra otvorenog s gornje strane. U cilindru se nalazi levak iz koga se voda prihvata u posudu sa podelom (slika 3.4 levo). Pošto je površina otvora poznata, zapremina vode u sudu se deli sa površinom otvora da bi se dobila visina (sloj) pale kiše. Podela može biti napravljena tako da se očitavanjem odmah dobija visina kiše.



Slika 3.3. Prostorni raspored prosečnih godišnjih padavina na teritoriji Srbije (izvor: Geografija Srbije, Radovanović (ur.), 2017).



Slika 3.4. Kišomeri: neregistrujući (levo) i registrujući sa plovkom i papirnom trakom (desno); fotografije: J. Plavšić.

Registrujući kišomeri (pluviografi) mogu biti različite konstrukcije. Kod nas je pluviograf sa plovkom najzastupljeniji tip registrujućeg kišomera (slika 3.4 desno). On je smešten u metalni cilindar sa levkom, odakle voda odlazi u posudu sa plovkom. Plovak je povezan sa perom/pisačem koje je naslonjeno na cilindar sa papirnom trakom. Cilindar je povezan sa satnim mehanizmom i okreće se tako da napravi ceo krug za 24 sata. Kada kiša pada, posuda sa plovkom se puni, plovak se podiže i povlači pero koje ostavlja trag na papirnoj traci. Kada se posuda napuni, količina vode u njoj odgovara visini od 10 mm kiše, a pero stiže do gornjeg kraja trake. Tada se posuda prazni uz pomoć sifona, a pero se spušta na donji kraj trake. Na ovaj način visina kiše se meri kontinualno (tj. beleži se sumarna visina kiše), tako da se mogu pratiti promene intenziteta kiše kroz vreme.

Težinski pluviograf (ili pluviograf sa vagom) je drugi tip pluviografa koji kontinualno meri padavine. On radi na principu merenja težine vode koja se iz levka dovodi u posudu (slika 3.5 levo). Kod analognih pluviografa ove vrste, vaga je povezana sa perom naslonjenim na cilindar sa papirnom trakom. Kod digitalne verzije ovog pluviografa težina vode se meri u malim vremenskim intervalima i formira se digitalni zapis sumarne linije kiše ili priraštaja kiše. Od ovog tipa kišomera se obično zahteva da gubici vode na isparavanje budu minimalni, što svakako treba proveriti pri upotrebi.

Pluviograf sa klackalicom ili impulsni kišomer sastoji se od levka iz kojeg voda dospeva do klackalice, tj. male posude sa dve komore poznate zapremine koja se može okretati oko svoje osovine (slika 3.5 desno). Kada kiša pada, najpre se puni gornja komora, a kada se napuni, klackalica se okreće, puna komora se prazni, a kiša nastavlja da pada u drugu komoru. Pri okretanju klackalice proizvodi se električni impuls koji se može beležiti na papirnoj traci ili digitalnim putem. Jedan tip ovih kišomera beleži vreme svakog impulsa, a drugi tip beleži broj impulsa u jednakim vremenskim intervalima. Visina kiše u nekom trenutku od početka kiše dobija se sabiranjem broja impulsa do tog trenutka i množenjem sa visinom kiše koja odgovara zapremini jedne komore na klackalici. Zapreminu komore daje proizvođač (obično oko 0.2 mm), ali može biti neophodna njena dinamička kalibracija (Maksimović i sar., 1991). Ova vrsta kišomera može biti nepouzdana za veoma jake kiše, tj. velike intenzitete.



Slika 3.5. Kišomeri: težinski pluviograf (levo) i unutrašnjost pluviografa sa klackalicom (desno); fotografije: D. Pavlović.

Padavine se mere pomoću kišomera na lokacijama koje se nazivaju padavinske stanice (često u sklopu meteoroloških i klimatoloških stanica). Lokacija stanice treba da bude takva da kišomer ne bude zaklonjen objektima ili drvećem koji bi smanjili registrovanu količinu padavina. Na tačnost merenja veoma utiče i vetar, pa se u područjima sa velikom učestalošću jakih vetrova koriste i zakloni. U mreži padavinskih stanica RHMZ-a je uobičajeno da se pored registrujućih kišomera (pluviografa) nalaze i neregistrujući kišomeri, koji predstavljaju referentne uređaje za podatke o dnevnim padavinama.

S obzirom da se pomoću kišomera praktično meri količina padavina u jednoj tački, poželjno je da mreža padavinskih stanica bude što gušća kako bismo bolje upoznali prostorne varijacije padavina. Svetska meteorološka organizacija preporučuje (WMO, 2008a) da se mreža stanica projektuje tako da u planinskim predelima postoji jedan neregistrujući kišomer na svakih 250 km², a u ravničarskim predelima na svakih 575 km². Gustina stanica sa registrujućim kišomerima može biti do 10 puta manja za potrebe hidroloških analiza na prirodnim slivovima, dok se u gradskim područjima preporučuje gustina stanica od 10-20 km².

Padavine kao izrazito prostorno neravnomeran proces mogu se osmatrati u prostoru pomoću meteoroloških radara i satelita. Međutim, tačnost ovakvog merenja padavina nije velika jer ni radar ni satelit ne mere padavine direktno. Radar emituje elektromagnetno zračenje i meri deo koji se vraća nazad nakon refleksije na oblacima i na padavinama. Količina padavina se dobija iz empirijskih veza između refleksivnosti (povratnog zračenja) i dimenzija kapljica vode u atmosferi, a onda i veza sa intenzitetom padavina. Takve empirijske veze se uspostavljaju na osnovu kalibracije sa kišomerima na zemlji. Iako greške u merenju količine padavina radarom mogu biti veoma velike, radar je veoma koristan za praćenje olujnih sistema, a time i za prognozu padavina i oticaja od kišnih voda.

Meteorološki sateliti takođe ne mere padavine direktno. Detektori koji se nalaze na ovim satelitima mere jačinu reflektovanog Sunčevog zračenja od zemlje i atmosfere u različitim delovima spektra. Problem nastaje u činjenici što ovi detektori ne reaguju na zračenje odbijeno na padavinama, pa se one ne mogu na taj način osmatrati. Među-

tim, vidljivo i infracrveno zračenje koje se reflektuje od oblaka daje odličnu sliku oblakčnosti. Na taj način se mogu dobiti podaci o visini oblaka, temperaturama na njihovim gornjim krajevima i slično. Prepoznavanje oblaka na satelitskim snimcima nije veliki problem za meteorologe, ali se pokazalo da nije lako razlikovati oblake koji će dati kišu i one koji neće. Kvantitativni podaci o padavinama dobijeni pomoću satelitskih snimaka su proizvod empirijskih relacija sa intenzitetom kiše izmerenim na površini zemlje. Greške u ovakvom pristupu mogu biti ogromne. Ipak, podaci sa satelita su korisni za sagledavanje oblačnih sistema i padavina na ogromnim prostranstvima kao što su okeani i pustinje gde se padavine inače ne mere.

U novije vreme razvija se merenje padavina korišćenjem mikrotalasnih veza u mobilnoj telefoniji (npr. Leijnse i sar., 2007). Princip ovakvog merenja padavina se zasniva na slabljenju mikrotalasnog signala usled padavina, što je na neki način slično principu radarskog merenja padavina, dok se kao rezultat dobijaju prosečne padavine na pravcu između dve bazne stanice mikrotalasne mreže.

Padavine u obliku snega mere se na dva načina. Sneg koji padne u otvor kišomera koji je opremljen grejačem otopiće se u vodu, a sloj vode koji se izmeri predstavlja vodeni ekvivalent snega. S druge strane, za procenu zaliha vode u snežnom pokrivaču mere se visina snežnog pokrivača i njegova gustina. Ovi podaci su važni i za procenu opterećenja konstrukcija od snega. Za potrebe merenja gustine vadi se uzorak čija se težina određuje snegomernim kantarom. Gustina i visina snežnog pokrivača zavise i od njegove starosti, pa se pored ukupne visine snega meri i visina novog snega.

3.4 Osnovna obrada podataka o padavinama

3.4.1 Vrste podataka o padavinama

Sa gledišta korišćenja podataka o padavinama u inženjerskoj hidrologiji, padavine se mogu generalno klasifikovati kao kratkotrajne, dnevne, višednevne i dugotrajne.

Pod kratkotrajnim padavinama se podrazumevaju padavine trajanja kraćeg od jednog dana. Promene intenziteta kiše tokom dana, odnosno u vremenskim intervalima kraćim od jednog dana, mogu da budu značajne. One su važne kada treba odrediti maksimalni oticaj na manjim slivovima, koji u velikoj meri zavisi od intenziteta kiše.

Dnevne i višednevne padavine su potrebne za proračun oticaja na velikim slivovima, na kojima promena intenziteta unutar jednog dana nema uticaja na maksimalni oticaj. Dugotrajne padavine, kao što su mesečne, sezonske ili godišnje visine padavina, korisne su za analize bilansa voda koje su tipične za planiranje rada hidrotehničkih i vodoprivrednih sistema, a ređe se koriste za detaljnije projektovanje hidrotehničkih objekata.

Podatke o kratkotrajnim padavinama moguće je dobiti samo sa pluviografa (registrujućih kišomera), dok se podaci o dnevnim, višednevnim, mesečnim i godišnjim padavinama uobičajeno dobijaju sa neregistrujućih kišomera. Podaci o dnevnim i mesečnim padavinama sa određenog broja padavinskih stanica u sklopu pojedinih glavnih meteoroloških i klimatoloških stanica u Srbiji mogu se naći u meteorološkim godišnjacima RHMZ-a.

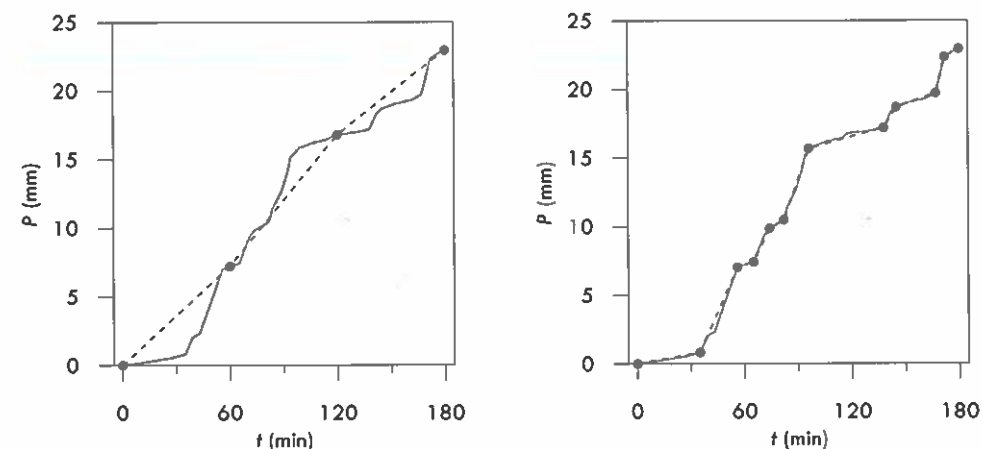
U nastavku ovog poglavlja opisuje se obrada kratkotrajnih kiša. Zapisi pri merenju kratkotrajnih kiša zavise od vrste uređaja. Oni mogu biti analogni (pluviografske trake) ili digitalni. Rezultati merenja mogu biti prikazani kao visine kiša u određenim vremenskim intervalima (najčešće kod težinskih pluviografa), kao vremenski intervali u kojima padne određena visina kiše (kod pluviografa sa klackalicom) ili kao sumarna linija kiše (na trakama pluviografa sa plovkom). Kod digitalnih uređaja podaci merenja su diskretnog tipa po prirodi stvari, dok se analogni zapisi moraju diskretizovati, o čemu govori naredni odeljak.

3.4.2 Diskretizacija analognog zapisa sumarne linije kiše

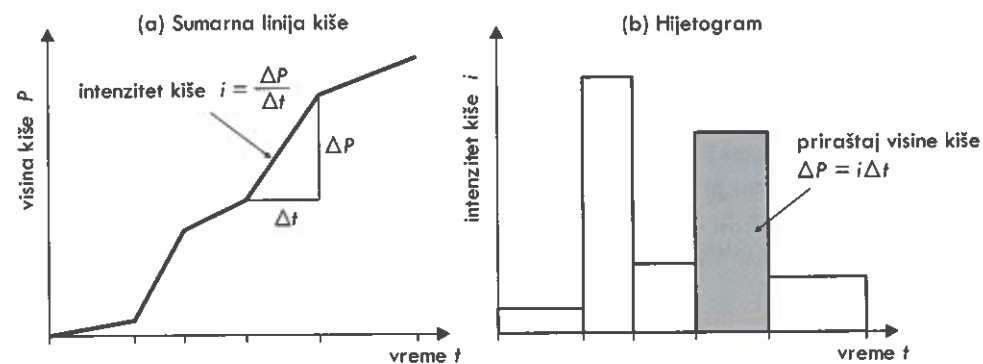
Rezultat merenja kiše analognim pluviografima su pluviografske trake koje predstavljaju kontinualan zapis visine pale kiše (sumarne linije kiše) tokom 24 sata. Za dalju obradu izmerenih padavina neophodno je izvršiti diskretizaciju tog analognog kontinualnog zapisa. To se može uraditi na više načina, a to su:

- očitavanje vrednosti sumarne linije kiše u konstantnim vremenskim intervalima,
- očitavanje vremenskih trenutaka do dostizanja konstantnog priraštaja kiše, i
- očitavanje prelomnih tačaka sumarne linije, odnosno vremena i odgovarajućih visina kiša između kojih se intenzitet kiše nije značajno menjao.

Ukoliko se diskretizacija obavlja u konstantnim priraštajima vremena ili visine kiše, postoji opasnost da se izgubi informacija o promeni intenziteta kiše ako je izabrani priraštaj preveliki (videti primer na slici 3.6 levo). Vremenski interval (ili priraštaj kiše) za diskretizaciju treba izabrati u skladu sa potrebama proračuna u razmatranom problemu, odnosno u skladu sa veličinom razmatranog sliva. Zato se preporučuje da se analogni zapis sa pluviografskih traka diskretizuje prema prelomnim tačkama (slika 3.6 desno).



Slika 3.6. Digitalizacija analognog pluviografskog zapisa: u konstantnim vremenskim intervalima (levo) i prema prelomnim tačkama (desno). Svetlija linija predstavlja analogni zapis, a isprekidana rezultat očitavanja.



Slika 3.7. Sumarna linija kiše (kumulativna visina kiše u vremenu) i hijetogram (promena intenziteta kiše kroz vreme).

3.4.3 Vremenski prikaz kratkotrajnih kiša

Promena padavina kroz vreme opisuje se na tri načina:

- 1) sumarnim visinama kiše (odnosno sumarnom linijom kiše),
- 2) visinama kiše u pojedinim intervalima vremena (ili priraštajima kiše), i
- 3) intenzitetima kiše u pojedinim intervalima vremena.

Sumarna visina kiše $P(t)$ predstavlja količinu kiše koja je pala od početka kiše u trenutku $t = 0$ do nekog vremena t . Sumarna linija kiše je neopadajuća linija čije su ordinate sumarne visine kiša (slika 3.7-a). Ova linija može da stagnira ukoliko dođe do prekida kiše, ali ne može da opada.

Visina kiše koja je pala u nekom intervalu vremena između dva vremenska trenutka t_1 i t_2 naziva se i *priraštaj visine kiše* jer se može odrediti kao razlika dve sumarne visine kiše (tj. kao razlika dve ordinate sumarne linije kiše) u trenucima t_1 i t_2 :

$$\Delta P = P(t_2) - P(t_1) \quad (3.1)$$

Nagib sumarne linije kiše odlikava *intenzitet kiše* i koji se onda geometrijski definiše kao izvod ove linije:

$$i = \frac{dP}{dt}$$

Dijagram promene intenziteta kiše kroz vreme naziva se *hijetogram*. S obzirom da se sumarna linija kiše praktično uvek prikazuje u diskretnom obliku (kao podaci sa diskretizovanih pluviografskih traka ili kao rezultat digitalnog merenja), intenziteti kiše u pojedinim vremenskim intervalima se računaju kao odnos priraštaja visine kiše i priraštaja vremena:

$$i = \frac{\Delta P}{\Delta t} \quad (3.2)$$

Prethodna definicija pokazuje da u praktičnim proračunima računamo prosečni intenzitet kiše i u intervalu vremena Δt , pa hijetogram ima oblik histograma (slika 3.7-b).

S obzirom da nagib sumarne linije kiše predstavlja intenzitet kiše, onda važi i da je visina kiše do nekog trenutka jednaka površini ispod hijetograma, odnosno integralu:

$$P(t) = \int_0^t i(t) dt$$

Ako se posmatraju diskretni podaci o kišama, tada je priraštaj kiše u nekom intervalu vremena Δt jednak površini ispod hijetograma na tom intervalu:

$$\Delta P = i \Delta t \quad (3.3)$$

Ordinata sumarne linije kiše u nekom trenutku može se dobiti sabiranjem svih priraštaja kiše do tog trenutka, a ukupna visina kiše tokom cele kišne epizode jednaka je zbiru svih priraštaja kiše:

$$P = \sum \Delta P = \sum i \Delta t$$

Primer 3.1. Podaci osmatranja sumarne visine kiše na jednoj pluviografskoj stanici dati su u tabeli 3.3 u 15-minutnim vremenskim intervalima. Odrediti hijetogram za ovu kišnu epizodu i pronaći najveći intenzitet. Koliko iznosi prosečan intenzitet tokom razmatrane epizode?

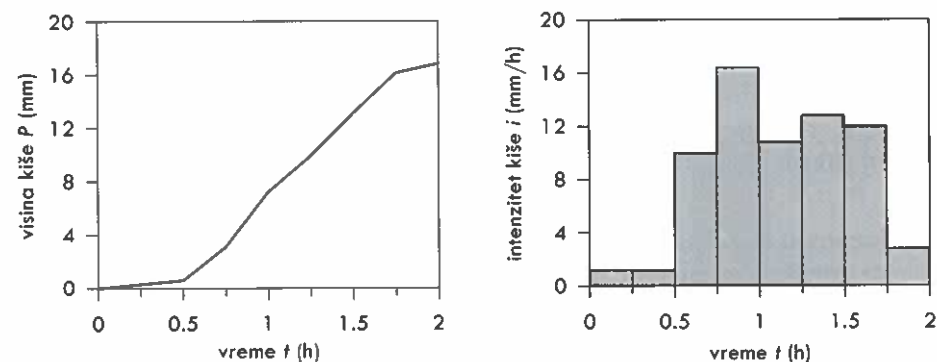
Rešenje. Za svaki vremenski interval od 15 minuta određuje se priraštaj kiše kao razlika sumarnih visina kiša (prema izrazu 3.1). Ovi rezultati prikazani su u trećoj koloni tabele 3.3, dok su u poslednjoj koloni izračunati intenziteti kiše (prema izrazu 3.2). Priraštaji i intenziteti kiše su pripisani vremenu na kraju posmatranog intervala. Sumarna linija kiše i hijetogram za razmatranu epizodu prikazani su na slici 3.8.

Najveći intenzitet kiše tokom ove epizode iznosi 16.4 mm/h i javio se u intervalu između 23:30 i 23:45. Prosečan intenzitet tokom cele epizode iznosi:

$$i = \frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{16.8}{2} = 8.4 \text{ mm/h}$$

Tabela 3.3. Primer proračuna intenziteta kiše iz sumarnih visina kiše.

Vreme	Vreme od početka kiše t (h)	Sumarna visina kiše P (mm)	Priraštaj visine kiše ΔP (mm)	Intenzitet kiše i (mm/h)
22:45	0	0		
23:00	0.25	0.3	0.3	1.2
23:15	0.5	0.6	0.3	1.2
23:30	0.75	3.1	2.5	10.0
23:45	1	7.2	4.1	16.4
00:00	1.25	9.9	2.7	10.8
00:15	1.5	13.1	3.2	12.8
00:30	1.75	16.1	3.0	12.0
00:45	2	16.8	0.7	2.8



Slika 3.8. Sumarna linija kiše i hijetogram u primeru 3.1.

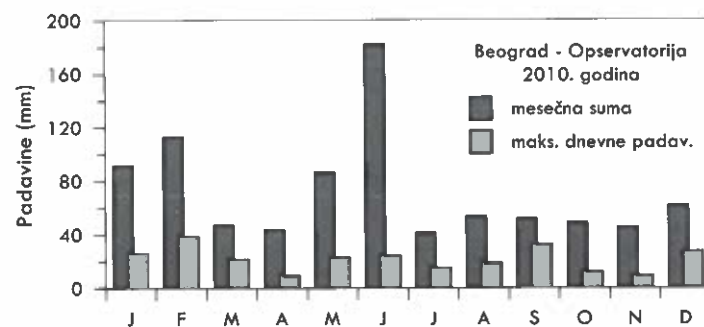
3.4.4 Dnevne, višednevne i dugotrajne padavine

Dnevne visine padavina su osnovni rezultati merenja padavina pomoću neregistrujućih kišomera na padavinskim stanicama. Uobičajeno je da se dnevne padavine sabiraju na mesečnom i godišnjem nivou, čime se dobijaju nizovi mesečnih i godišnjih padavina. U zavisnosti od potreba, dnevne padavine se mogu sabirati i u drugim vremenskim intervalima, pa se mogu sresti analize sa npr. petodnevnom, nedeljnim ili desetodnevnom padavinama.

Za opisivanje unutargodišnjeg režima padavina u dužem vremenskom periodu koriste se prosečne mesečne padavine, tj. aritmetička svih mesečnih padavina za konkretan mesec (januar, februar, itd.) iz svih godina osmatranja:

$$P_{m,sr} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N P_{m,i}, \quad m=1,2,\dots,12 \quad (3.4)$$

gde je N broj godina sa raspoloživim podacima. unutargodišnji režimi padavina u Srbiji prikazani su na slici 3.2. Slično tome, prosečne godišnje padavine u dužem višegodišnjem periodu su klimatska karakteristika nekog područja i predstavljaju prosek svih godišnjih padavina tokom perioda osmatranja:



Slika 3.9. Mesečne sume padavina i mesečni maksimumi dnevnih padavina na stanici Beograd-Opservatorija 2010. godine.

$$P_{god,sr} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N P_{god,i} \quad (3.5)$$

Za određene vrste analiza od interesa su ekstremi padavina, pa se pored mesečnih i godišnjih suma padavina beleže i *maksimalne dnevne padavine* u mesecu i godini (slika 3.9). Nizovi godišnjih maksimuma dnevnih padavina su često predmet statističke analize, čiji se rezultati koriste za analize maksimalnih protoka u okviru projektovanja hidrotehničkih objekata (videti poglavlja 12 i 13.4).

3.4.5 Zapremina kiše pale na sliv

Jedna od važnijih informacija potrebnih u hidrološkim analizama jeste zapremina pale vode V_P na neki sliv. Kada se zapremina pale vode V_P podeli sa površinom sliva A , dobija se prosečna visina kiše za taj sliv:

$$P_A = \frac{V_P}{A} \quad (3.6)$$

Na osnovu merenja padavina u jednoj tački ili u više tačaka (unutar sliva ili u njegovoj neposrednoj blizini), zapremina pale vode nikad se ne može tačno odrediti. To je jedan od najvećih izvora neizvesnosti u hidrološkim proračunima. Ipak, zapremina pale vode na sliv može se proceniti na više načina.

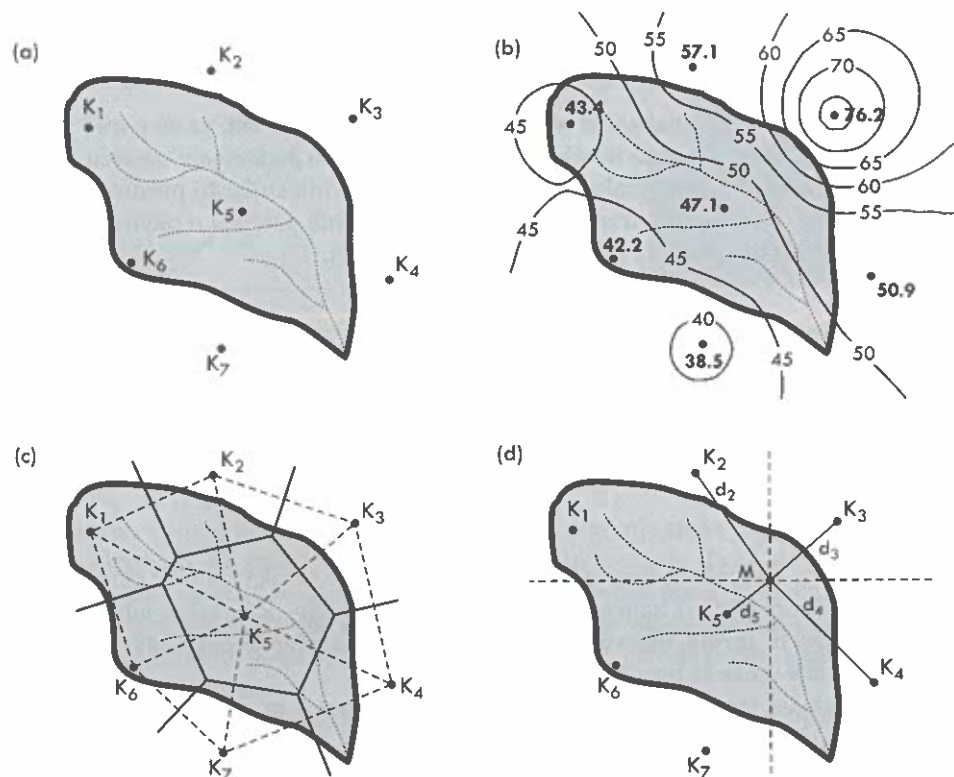
Konstrukcija *izohijeta* se smatra najtačnijim načinom za ocenu zapremine pale vode na sliv (slika 3.10-b). Izohijete su linije istih visina padavina. Ukoliko mreža stanica na osnovu kojih se crtaju izohijete nije dovoljno gusta, konstrukcija izohijeta zahteva iskustvo i poznavanje terena i režima padavina. Kada se izohijete nacrtaju, zapremina pale vode se određuje tako što se odrede površine sliva između izohijeta i pomnože prosečnom visinom kiše za tu površinu. Formiranje karte izohijeta, odnosno kartiranje padavina po prostoru, jeste složen zadatak (videt npr. Štrbac, 2014).

Najprostiji način, ali i najmanje tačan, jeste da se izračuna *aritmetička sredina* visine padavina na razmatranim stanicama. On je primenljiv za stanice koje su relativno ravnomerno raspoređene po slivu i koje se međusobno ne razlikuju mnogo po nadmorskim visinama i po visini kiše.

Metoda Tisenovih poligona se često primenjuje u inženjerskoj praksi jer kombinuje jednostavnost i relativnu tačnost. Osnovna ideja ove metode je da svakoj tački unutar sliva treba dodeliti visinu kiše sa najbližeg kišomera. Zato se visina kiše sa nekog kišomera primenjuje do polovine rastojanja između tog i nekog drugog kišomera u bilo kom pravcu. Konstrukcija poligona kojim se razgraničavaju pripadajuće površine za svaku kišomernu stanicu počinje crtanjem mreže trouglova kojima se spajaju tačke stanica, a zatim se crtaju simetralne stranice tih trouglova (slika 3.10-c). Ove simetralne i granica sliva će formirati poligone oko pojedinih stanica. Zapremina pale vode na sliv tada se ocenjuje kao:

$$V_P = \sum P_i A_i \quad (3.7)$$

gde je P_i visina padavina na stanici i , a A_i je površina poligona, tj. dela sliva koji pripada stanici i . Prosečne padavine na slivu su:



Slika 3.10. Određivanje prosečnih padavina na slivu: (a) mreža padavinskih stanica, (b) izohijete, (c) metoda Tisenovih poligona, (d) interpolacija u proizvoljnoj tački metodom recipročnih kvadrata rastojanja.

$$P_A = \frac{\sum P_i A_i}{A} \quad (3.8)$$

Metoda recipročnih kvadrata rastojanja je metoda prostorne interpolacije kojom se visina kiše u bilo kojoj tački M na slivu može proceniti kao ponderisana vrednost iz vrednosti padavina P_i na razmatranim stanicama:

$$P_M = \frac{\sum c_i P_i}{\sum c_i} \quad (3.9)$$

Težinski koeficijenti c_i uz vrednosti sa pojedinih stanica jednaki su recipročnoj vrednosti kvadrata rastojanja d_i između kišomera i i tačke u kojoj se padavine procenjuju (slika 3.10-d):

$$c_i = \frac{1}{d_i^2} \quad (3.10)$$

Umesto kvadriranja, rastojanja između stanica se mogu izložiti na neki drugi stepen. Da bi procena padavina interpolacijom u tački M bila pouzdana, smatra se da treba ko-

ristiti najmanje jednu stanicu iz svakog kvadranta (ili čak oktanta) zamišljenog koordinatnog sistema čiji se početak nalazi u tački M . Da bi se odredile prosečne padavine na slivu, preko karte sliva se može preklapati kvadratna mreža tako da se on podeli na kvadratne elemente, i zatim izvršiti interpolacija padavina u težištu svakog kvadratnog elementa. Ako je sliv podeljen na N elemenata za koje su određene visine padavina P_j ($j = 1, 2, \dots, N$), prosečne padavine na slivu se mogu odrediti kao aritmetička sredina padavina po elementima:

$$P_A = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N P_j \quad (3.11)$$

Alternativno, kao prosečna visina padavina na slivu može se usvojiti visina padavina dobijena ovom metodom u tački M koja predstavlja težište sliva. Ovakav pristup je manje tačan i treba ga primenjivati samo za grube proračune.

Primer 3.2. Na kišomerima na slivu na slici 3.10a tokom jednog dana izmerene su visine kiša date u tabeli 3.4. Odrediti prosečne padavine na slivu metodom Tisenovih poligona.

Rešenje. Površine poligona koje pripadaju pojedinim kišomerima mogu se odrediti na više načina. Približan način se sastoji od preklapanja kvadratne mreže preko karte sliva i brojanjem kvadrata koji pripadaju pojedinim površinama. Kvadratna mreža treba da bude dovoljno gusta da omogući što preciznije određivanje površina. Tačnije određivanje površina može se sprovesti u programima za crtanje kao što je AutoCAD ili korišćenjem ugrađenih opcija za Tisenove poligone u softverskim paketima namenjenim geografskim informacionim sistemima. Površine poligona za dati primer prikazane su u trećoj koloni tabele 3.4, dok su u poslednjoj koloni izračunate zapremine pale vode na svaku od površina. Ukupna površina sliva iznosi 2160.5 km^2 , a ukupna zapremina pale vode $104.46 \times 10^6 \text{ m}^3$. Prosečna visina kiše na slivu tada je jednaka:

$$P_A = \frac{\sum P_i A_i}{A} = \frac{104.46 \cdot 10^6}{2160.5 \cdot 10^6} = 0.0483 \text{ m} = 48.3 \text{ mm} \quad (3.12)$$

Tabela 3.4. Proračun prosečnih padavina na slivu metodom Tisenovih poligona u primeru 3.2.

Kišomer	Visina kiše P_i (mm)	Pripadajuća površina A_i (km ²)	Zapremina pale vode V_P (10 ⁶ m ³)
K1	43.4	397.3	17.24
K2	57.1	213.4	12.19
K3	76.2	120.9	9.21
K4	50.9	237.6	12.09
K5	47.1	786.1	37.03
K6	42.2	297.2	12.54
K7	38.5	108.0	4.16
Ukupno		2160.5	104.46

4 ISPARAVANJE

4.1 Uvod

Isparavanje je jedan od najznačajnijih procesa u hidrološkom ciklusu jer je važan činilac ne samo bilansa voda već i energetskog bilansa. Ono podrazumeva prelazak vode iz tečnog ili čvrstog stanja u gasovito stanje i njenu difuziju u atmosferu. Na taj način se vrši preraspodela toplotne energije između površine zemlje i atmosfere.

Voda isparava sa različitih vrsta površina, pa se često odvojeno posmatra isparavanje sa slobodnih vodenih površina, sa vlažnog golog zemljišta ili sa zemljišta pod vegetacijom. Između isparavanja sa ovih površina ne postoje razlike u fizici procesa, već samo u prirodi tih površina (Wiesner, 1970). Da bi do isparavanja došlo, neophodno je da postoje:

- izvor vlage,
- izvor toplotne energije (direktno Sunčevo zračenje, toplota iz vazduha, toplota iz zemljišta ili toplota u samoj vodi), i
- razlika vlažnosti između površine sa koje voda isparava i atmosfere.

Pod pretpostavkom da postoji neograničen izvor vlage, isparavanje se odigrava pod uticajem dva ključna faktora. Prvo, potrebno je da postoji dovoljno toplotne energije za pretvaranje vode iz tečnog u gasovito stanje. Energija koja je potrebna molekulima vode da bi prešli u gasovito stanje zove se *latentna toplota isparavanja*. S druge strane, isparavanje može da se odvija samo ako vazduh iznad površine sa koje voda isparava može da primi dodatnu količinu vlage. Ako vazduh postane potpuno zasićen (na datoj temperaturi), isparavanje prestaje. Dakle, da bi se isparavanje odvijalo, potrebno je da postoji deficit vlažnosti u vazduhu u odnosu na površinu sa koje voda isparava. Ukoliko bi se zasićen vazduh iznad površine mešao sa suvim vazduhom, isparavanje bi moglo da se nastavi. Zbog toga isparavanje zavisi i od mogućnosti za odvođenje vodene pare od površine sa koje voda isparava, što se odvija uz pomoć strujanja vazduha odnosno vetra.

Isparavanje sa slobodne vodene površine, kao što su jezera i močvare, nije ograničeno raspoloživom količinom vlage, već na njegovo odvijanje najviše utiču raspoloživa toplotna energija i vetar koji bi odvodio zasićen vazduh od vodene površine.

Isparavanje sa kopna podrazumeva isparavanje direktno iz tla i sa vegetacije. Pored toga, određena količina vlage dospeva u atmosferu i procesom *transpiracije* biljaka, u kome biljke uzimaju vodu iz tla, koriste je i vraćaju u atmosferu. Proces isparava-

nja sa površine tla zajedno sa procesom transpiracije naziva se *evapotranspiracija*. Ona zavisi od istih faktora kao i isparavanje sa slobodne vodene površine (od izvora energije i transporta vodene pare), ali zavisi i od izvora vlage na površini tla i u slojevima tla blizu površine. Količina evapotranspiracije do koje bi došlo kada bi neka površina tla sa vegetacijom imala neograničen izvor vlage naziva se *potencijalna evapotranspiracija*. Ona se može odrediti slično kao i isparavanje sa slobodne vodene površine. Međutim, stvarna evapotranspiracija je manja od potencijalne ukoliko u tlu nema dovoljno vlage. Potencijalna evapotranspiracija se često određuje za referentnu kulturu i tada se naziva *referentna evapotranspiracija*.

4.2 Određivanje isparavanja

Isparavanje i transpiracija su složeni procesi na koje utiče mnogo faktora. Oni se teško mere i podaci osmatranja su retko na raspolaganju, pa se mnogo češće procenjuju različitim metodama i pristupima na osnovu podataka osmatranja drugih meteoroloških veličina. Fizički bazirano modeliranje isparavanja je tema velikog broja istraživanja u kojima se razvijaju modeli zasnovani na zakonima kretanja energije i vode kroz atmosferu, zemljište i vegetaciju i koji koriste podatke sa eksperimentalnih slivova opremljenih velikim brojem različitih instrumenata. Primena takvih modela u svakodnevnoj hidrološkoj praksi je ograničena kako zbog njihove složenosti tako i zbog toga što zahtevaju velike količine ulaznih podataka (Shuttleworth, 1993).

Metode koje se koriste u praksi su većim delom empirijske, a stepen složenosti diktira i potrebne ulazne podatke. Najjednostavnije metode koriste samo temperaturu vazduha ili samo neto Sunčevo zračenje kao indikator isparavanja, dok nešto složenije metode uzimaju u obzir i vlažnost vazduha i brzinu vetra kao faktore koji utiču na isparavanje.

Metode za proračun isparavanja i evapotranspiracije mogu se generalno svrstati u tri grupe: metode zasnovane na bilansu energije (radijacione metode), metode zasnovane na difuziji vlage u atmosferu (aerodinamičke metode) i metode koje kombinuju ova dva pristupa (kombinovane metode).

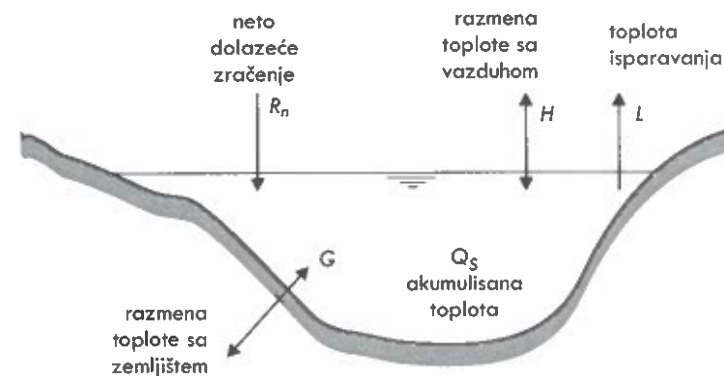
U praksi se isparavanje ili evapotranspiracija, u opštem slučaju, određuju u dva koraka. Najpre se određuje potencijalno isparavanje, tj. ono koje nije ograničeno raspoloživom količinom vlage, dok se u drugom koraku dobijeni rezultati podešavaju prema raspoloživoj količini vlage u zemljištu i za konkretne vrste vegetacije.

4.3 Isparavanje u bilansu toplotne energije

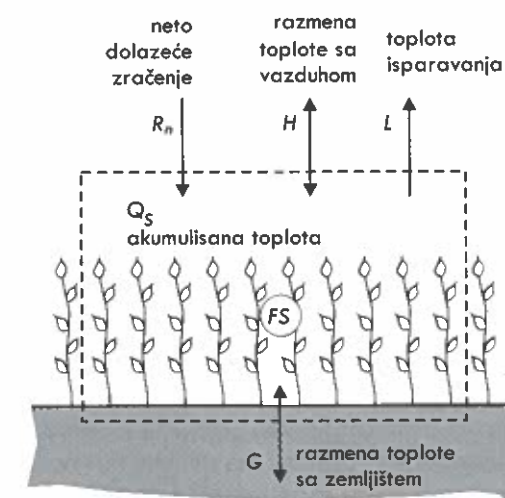
Ako se posmatra jedinična površina sa koje voda isparava, bilo slobodna vodena površina (slika 4.1), bilo površina zemljišta (slika 4.2), bilans energije se može predstaviti jednačinom:

$$R_n - H - L - G - Q - FS = 0 \quad (4.1)$$

U gornjem bilansu energije prisutne su sledeće komponente:



Slika 4.1. Komponente bilansa energije pri isparavanju sa slobodne vodene površine (prema Wiesneru, 1970).



Slika 4.2. Komponente bilansa energije pri isparavanju iz zemljišta za kontrolnu zapreminu koja obuhvata deo atmosfere i samu površinu zemljišta (prema Shuttleworthu, 1993).

- neto energija Sunčevog zračenja R_n ,
- osetna toplota H (razmena toplote između površine sa koje voda isparava i vazduha zbog razlike u temperaturama),
- toplota koja se troši na isparavanje L ,
- razmena toplote između vode i zemljišta G ,
- toplota Q_s koju sadrži kontrolna zapremina i koja se može zanemariti osim kada su u pitanju šume,
- energija FS koja se apsorbira u biohemijskim procesima tokom fotosinteze u biljkama i koja se obično uzima kao 2% neto Sunčevog zračenja ili se zanemaruje.

Iz jednačine bilansa toplotne energije (4.1) sledi da je energija koja se troši na isparavanje u opštem slučaju jednaka:

$$L = R_n - H - G - Q - FS \quad (4.2)$$

Toplota L koja se troši na isparavanje proporcionalna je gubitku mase vode sa jedinične površine:

$$L = \lambda \frac{\partial m_v}{\partial t} = \lambda \rho \frac{\partial V_v}{\partial t} = \lambda \rho E \quad (4.3)$$

gde je λ latentna toplota isparavanja (energija po jedinici mase), m_v i V_v masa i zapremina vode, ρ gustina vode, a E sloj isparene vode.

Latentna toplota isparavanja λ zavisi od temperature na površini T_p :

$$\lambda = 2.501 - 2.361 \cdot 10^{-3} T_p \quad (4.4)$$

gde se temperatura unosi u $^{\circ}\text{C}$, a latentna toplota isparavanja dobija u MJ/kg. Varijacije ove veličine nisu velike i obično se usvaja da ona iznosi 2.45 MJ/kg, što je vrednost koja približno odgovara temperaturi vazduha od 20°C .

Razmena toplote sa zemljištem G je moguća u oba pravca i smatra se da je pozitivna ako se tlo zagreva, a da je negativna ako se tlo hladi. Obično se smatra da je komponenta G mala u odnosu na neto Sunčevo zračenje R_n , naročito za površine pokrivene vegetacijom, i da se može zanemariti za kraće vremenske periode do 30 dana (Shuttleworth, 1993; Allen, 1998). Jedan od jednostavnijih pristupa da se odredi G zasniva se na pretpostavci da je ova komponenta proporcionalna razlici između temperatura tla i vode, odnosno vazduha, i ocenjuje se na osnovu izraza:

$$G = C_z h_z \frac{\Delta T}{\Delta t}$$

gde je $\Delta T = T_2 - T_1$ razlika temperatura (u $^{\circ}\text{C}$) na kraju i na početku razmatranog vremenskog perioda Δt , C_z toplotni kapacitet tla (za prosečno vlažno zemljište iznosi $2.1 \text{ MJ m}^{-3} \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$), i h_z efektivna dubina tla do koje se toplota pronosi (za dnevne intervale se može usvojiti $h_z = 0.18 \text{ m/dan}$, a za mesečne $h_z = 2.0 \text{ m/mesec}$). Za proračune u mesečnim intervalima gornji izraz postaje (Allen i sar., 1998):

$$G = 0.14 \Delta T \quad (\text{MJ m}^{-2} \text{ dan}^{-1}), \quad \Delta T = \frac{1}{2}(T_{i+1} - T_{i-1}) \text{ ili } \Delta T = T_i - T_{i-1} \quad (4.5)$$

gde je su T_{i-1} , T_i i T_{i+1} srednje mesečne temperature u prethodnom, razmatranom i narednom mesecu.

Osetna toplota H se teško određuje, ali se može smatrati da je proporcionalna toploti isparavanja L (Chow, 1988). Odnos ove dve toplote je poznat kao Bovenov odnos:

$$\beta = \frac{H}{L} \quad (4.6)$$

Pod određenim pretpostavkama (o jednakosti koeficijenata difuzije toplote i vodene pare), Bovenov odnos se računa prema izrazu:

$$\beta = \gamma \frac{T_p - T_a}{e_p - e_a} \quad (4.7)$$

gde su T_p i e_p temperatura i pritisak vodene pare na površini, T_a i e_a temperatura i pritisak vodene pare u vazduhu, a γ je *psihrometrijska konstanta* jednaka

$$\gamma = \frac{C_p p}{0.622 \lambda} \approx 0.665 \cdot 10^{-3} p \quad (\text{mb } ^{\circ}\text{C}^{-1}) \quad (4.8)$$

gde je C_p specifična toplota vlažnog vazduha ($1013 \text{ J kg}^{-1} \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$), p atmosferski pritisak (u mb) i λ latentna toplota isparavanja u J/kg. Približni izraz sa desne strane jednakosti važi za $\lambda = 2.45 \text{ MJ/kg}$.

4.4 Proračun isparavanja sa slobodne vodene površine

4.4.1 Radijaciona metoda

Ako se posmatra isparavanje sa slobodne vodene površine, tada se u izrazu (4.2) za energiju koja se troši na isparavanje izostavljaju komponente Q_s i FS :

$$L = R_n - H - G$$

Korišćenjem izraza (4.3) računa se i sloj isparavanja prema radijacionoj metodi:

$$E = \frac{L}{\lambda \rho} = \frac{R_n - H - G}{\lambda \rho} \quad (4.9)$$

Osetna toplota H se može izraziti kao deo toplote isparavanja L korišćenjem Bovenovog odnosa (izraz 4.6). Tada gornji izraz postaje:

$$E = \frac{R_n - G}{\lambda \rho (1 + \beta)} \quad (4.10)$$

Ako se komponenta razmene toplote sa zemljom G može zanemariti, sloj isparene vode postaje:

$$E = \frac{R_n}{\lambda \rho (1 + \beta)} \quad (4.11)$$

Ukoliko se u bilansu energije pored razmene toplote sa zemljištem G zanemari i osetna toplota H , izraz (4.10) se uprošćava i postaje:

$$E = \frac{R_n}{\lambda \rho} \quad (4.12)$$

Primer 4.1. Izračunati isparavanje sa površine Paličkog jezera u maju 2006. godine metodom bilansa energije koristeći podatke i rezultate proračuna neto Sunčevog zračenja iz primera 2.1.

Rešenje. Koristeći izraz (4.12) sa neto zračenjem R_n dobijenim u primeru 2.1, isparavanje u mesecu maju 2006. godine sa jedinične površine Paličkog jezera, određeno pomoću radijacione metode uz zanemarivanje osetne toplote i razmene toplote sa tlom, iznosi:

$$E_r = \frac{R_n}{\lambda \rho} = \frac{15.34 \text{ MJ/m}^2/\text{dan}}{2.45 \text{ MJ/kg} \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3} = 6.26 \text{ mm/dan}$$

Ako bi se u bilans uvela i razmena toplote sa tlom G , na osnovu izraza (4.10) i podataka o srednjim mesečnim temperaturama u aprilu i junu (12.9°C i 20.1°C), dobija se:

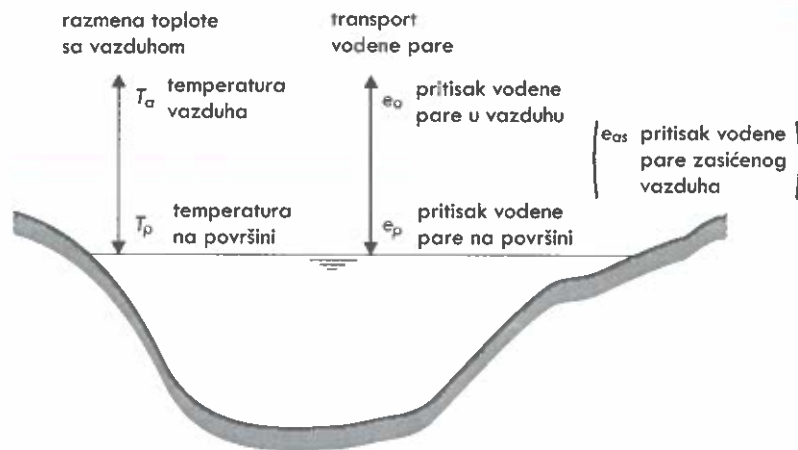
$$G = 0.14 \cdot \frac{1}{2}(T_{i+1} - T_{i-1}) = 0.07 \cdot (20.1 - 12.9) = 0.504 \text{ MJ m}^{-2} \text{ dan}^{-1}$$

Isparavanje u ovom slučaju je nešto manje:

$$E_r = \frac{R_n - G}{\lambda \rho} = \frac{(15.34 - 0.504) \text{ MJ/m}^2/\text{dan}}{2.45 \text{ MJ/kg} \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3} = 6.06 \text{ mm/dan}$$

4.4.2 Aerodinamička metoda (metoda transfera vlage)

Aerodinamički pristup za proračun isparavanja je najstariji i najviše koristi empirijska iskustva. U ovom pristupu uzima se u obzir da intenzitet isparavanja, posmatran kao brzina difuzije vlage u atmosferu, zavisi od razlike vlažnosti vazduha između vodene površine i vazduha i brzine vetra. U literaturi se može naći niz izraza za proračun isparavanja koji su po svojoj strukturi slični (Wiesner, 1970). Oblik te veze je:



Slika 4.3. Objasnjenje oznaka za aerodinamičku metodu.

$$E = f(u) \cdot (e_p - e_a)$$

gde su e_p i e_a pritisci vodene pare na vodenoj površini i u vazduhu, a $f(u)$ je neka funkcija brzine vetra u . Da bi se ovakvi izrazi primenili, neophodno je znati pritisak vodene pare na površini e_p , što se obično ne meri. Zbog toga se on često zamenjuje pritiskom zasićene vodene pare u vazduhu e_{as} koji se može odrediti na osnovu temperature (videti sliku 4.3). Isparavanje dobijeno ovakvom aproksimacijom je onda:

$$E_a = f(u) \cdot (e_{as} - e_a)$$

Funkcija brzine vetra u gornjem izrazu obično je linearna, u obliku $a(b + u)$ ili au . Jedan od najpoznatijih je izraz Penmana (1948):

$$E_a = 0.263(1 + 0.537u_2)(e_{as} - e_a) \quad (4.13)$$

gde se naponi vodene pare unose u mb, a u_2 predstavlja brzinu vetra u m/s merenu na visini od 2 m, dok se isparavanje dobija u mm/dan.

Primer 4.2. Izračunati isparavanje sa površine Paličkog jezera za mesec maj 2006. godine koristeći aerodinamički pristup i formulu Penmana. U razmatranom mesecu prosečna brzina vetra iznosila je 2.1 m/s. Ostale podatke uzeti iz primera 2.1.

Rešenje. U razmatranom mesecu prosečni pritisak vodene pare iznosi 12.4 mb, dok se napon zasićene vodene pare dobija na osnovu relacije (2.5) kao prosečni za maksimalnu i minimalnu mesečnu temperaturu:

$$\begin{aligned} e_{as} &= \frac{e_{as}(T_{\max}) + e_{as}(T_{\min})}{2} = \\ &= \frac{6.11}{2} \left[\exp \left\{ \frac{17.27 \cdot 21.7}{237.3 + 21.7} \right\} + \exp \left\{ \frac{17.27 \cdot 11.4}{237.3 + 11.4} \right\} \right] = 19.73 \text{ mb} \end{aligned}$$

Kako je prosečna brzina vetra za razmatrani mesec 2.1 m/s, isparavanje u mesecu maju 2006. godine sa jedinične površine Paličkog jezera, određeno pomoću aerodinamičkog pristupa, iznosi:

$$\begin{aligned} E_a &= 0.263 \cdot (1 + 0.537u_2)(e_{as} - e_a) = \\ &= 0.263 \cdot (1 + 0.537 \cdot 2.1)(19.73 - 12.4) = 4.09 \text{ mm/dan} \end{aligned}$$

4.4.3 Kombinovana metoda Penmana

Penman (1948) je prvi došao do izraza za isparavanje koji kombinuje pristup sa bilansom toplotne energije i aerodinamički pristup. Do kombinovanja je došlo jer se aerodinamički model može primeniti kada izvor toplote nije ograničen, a metoda bilansa energije kada transport vodene pare nije ograničen. S obzirom da su oba procesa ograničena, Penman je zaključio da je neophodno da se napravi kombinacija dva prethodno razvijena pristupa.

Kao što je već rečeno, prema aerodinamičkoj metodi isparavanje se obično računa približno kao

$$E_a = f(u) \cdot (e_{as} - e_a)$$

dok bi tačnije isparavanje bilo

$$E = f(u) \cdot (e_p - e_a)$$

Odnos ovako određenih isparavanja je

$$\frac{E_a}{E} = \frac{e_{as} - e_a}{e_p - e_a} = \frac{e_{as} - e_p + e_p - e_a}{e_p - e_a} = 1 - \frac{e_p - e_{as}}{e_p - e_a} \quad (4.14)$$

Pritisak vodene pare na površini vode e_p je u stvari pritisak zasićene vodene pare na temperaturi T_p (temperatura na površini), dok se pritisak vodene pare zasićenog vazduha e_{as} vezuje za temperaturu T_a . Ako se nagib krive zavisnosti pritiska zasićene vodene pare i temperature aproksimira sa

$$\Delta = \frac{e_p - e_{as}}{T_p - T_a}$$

onda izraz (4.14) postaje:

$$\frac{E_a}{E} = 1 - \Delta \frac{T_p - T_a}{e_p - e_a}$$

S obzirom na definiciju Bovenovog odnosa (4.7), dobija se:

$$\frac{E_a}{E} = 1 - \frac{\Delta}{\gamma} \beta \quad (4.15)$$

Prema radijacionoj metodi (izraz 4.10), uz zanemarivanje razmene toplote sa tлом G , isparavanje je jednako:

$$E = \frac{R_n}{\lambda \rho (1 + \beta)} \quad (4.16)$$

Eliminišući Bovenov odnos iz izraza (4.15) i (4.16), dobija se:

$$E = \frac{\Delta \frac{R_n}{\lambda \rho} + \gamma E_a}{\gamma + \Delta} = \frac{\Delta}{\gamma + \Delta} E_r + \frac{\gamma}{\gamma + \Delta} E_a \quad (4.17)$$

gde je sa E_r označen sloj isparavanja samo usled neto Sunčevog zračenja. Gornji izraz može se shvatiti i kao ponderisana vrednost isparavanja dobijena na osnovu isparavanja usled uticaja zračenja E_r i usled uticaja vetra E_a . Kada se E_r i E_a zamene odgovarajućim izrazima (4.12) i (4.13), dobija se *izraz koji se preporučuje za proračun isparavanja sa slobodne vodene površine*:

$$E = \frac{\Delta}{\gamma + \Delta} \frac{R_n}{\lambda \rho} + \frac{\gamma}{\gamma + \Delta} \cdot 0.263 \cdot (1 + 0.537 u_2) (e_{as} - e_a) \quad (4.18)$$

Primer 4.3. Odrediti isparavanje sa površine Paličkog jezera za maj 2006. godine kombinovanom metodom Penmana i koristeći podatke iz primera 2.1, 4.1 i 4.2. Prosečan vazdušni pritisak u ovom mesecu iznosio je 1005.2 mb.

Rešenje. Isparavanje određeno radijacionom metodom u primeru 4.1 iznosi:

$$E_r = \frac{R_n}{\lambda \rho} = \frac{15.34 \text{ MJ/m}^2/\text{dan}}{2.45 \text{ MJ/kg} \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3} = 6.26 \text{ mm/dan}$$

dok je isparavanje određeno aerodinamičkim pristupom u primeru 4.2:

$$E_a = 0.263 \cdot (1 + 0.537 u_2) (e_{as} - e_a) = 0.263 \cdot (1 + 0.537 \cdot 2.1) (19.73 - 12.4) = 4.09 \text{ mm/dan}$$

Da bi se odredio nagib Δ krive pritiska zasićene vodene pare, koristi se izraz (2.6), vrednost pritiska zasićene vodene pare $e_s = 19.73$ mb koja je određena u primeru 4.2 i ocena srednje mesečne temperature vazduha:

$$T_{sr} = \frac{T_{max} + T_{min}}{2} = 16.55^\circ\text{C}$$

Sa ovim podacima se dobija:

$$\Delta = \frac{4098 e_s}{(237.3 + T)^2} = \frac{4098 \cdot 19.73}{(237.3 + 16.55)^2} = 1.254 \text{ mb/}^\circ\text{C}$$

Sa prosečnom vrednošću atmosferskog pritiska od 1005.2 mb, psihrometrijska konstanta γ iznosi (izraz 4.8):

$$\gamma = 0.665 \cdot 10^{-3} \cdot 1005.2 = 0.668 \text{ mb/}^\circ\text{C}$$

Isparavanje prema kombinovanom izrazu (4.17) tada je jednako:

$$E = \frac{1.254}{0.668 + 1.254} 6.26 + \frac{0.668}{0.668 + 1.254} 4.09 = 5.51 \text{ mm/dan}$$

4.5 Proračun evapotranspiracije

Na evapotranspiraciju utiču isti faktori koji utiču na isparavanje – izvor toplotne energije i transport vodene pare. Ovde dolazi do izražaja i treći faktor, a to je izvor vlage na površini sa koje voda isparava. Ako se tlo suši, evapotranspiracija će biti manja nego što bi bila da je tlo dobro natopljeno. Iz tog razloga, evapotranspiracija koja se računa na osnovu meteoroloških parametara je samo *potencijalna evapotranspiracija*, odnosno evapotranspiracija pri neograničenoj količini vlage u tlu koja je na raspolaganju za isparavanje i transpiraciju. Za proračun stvarne evapotranspiracije potrebno je uzeti u obzir i sadržaj vode u tlu.

Proračun potencijalne evapotranspiracije ET_p obavlja se na sličan način kao i proračun potencijalnog isparavanja sa slobodne vodene površine, uz neophodne izmene kojima se uzima u obzir vegetacija. Najpre se računa tzv. *referentna evapotranspiracija* ET_0 , koja se definiše kao potencijalna evapotranspiracija sa neograničene površine ravnomerno pokrivene travom jednake visine (12 cm), koja je u potpunosti prekriva tlo i koja uvek ima dovoljno vode. To je praktično potencijalna evapotranspiracija za travu kao referentnu kulturu. Da bi se dobila potencijalna evapotranspiracija za neku drugu kulturu, ET_0 se množi koeficijentom kulture k_c , koji zavisi od vrste kulture i faze njenog rasta. Stvarna evapotranspiracija dobija se množenjem potencijalne koeficijentom zemljišta k_s , čije se vrednosti kreću od 0 do 1.

4.5.1 Metoda Penman-Montit

Metoda Penman-Montit¹ je jedna od najšire prihvaćenih metoda za proračun evapotranspiracije, s obzirom da njeno korišćenje preporučuje Organizacija za hranu i poljoprivredu (FAO) Ujedinjenih nacija (Allen i sar., 1998). Po ovoj metodi, potencijalna evapotranspiracija ET_p određuje se prema formuli:

$$ET_p = \frac{\Delta \cdot (R_n - G) + \rho_a C_p (e_{as} - e_a) / r_a}{\lambda \rho [\Delta + \gamma(1 + r_s / r_a)]} \quad (4.19)$$

gde je r_a aerodinamički otpor i r_s otpor vegetacije i tla (otpor površine). Ostale veličine su definisane u prethodnim odeljcima.

Aerodinamički otpor odslikava mogućnost transfera toplote i vodene pare u više slojeve vazduha i za referentnu kulturu se određuje na osnovu brzine vetra:

$$r_a = \frac{208}{u_2} \quad (\text{s/m})$$

gde je u_2 brzina vetra merena na visini od 2 m iznad tla (u m/s). Otpor vegetacije i tla opisuje mogućnost transporta vodene pare kroz biljke u procesu transpiracije i kroz tlo pri isparavanju vode iz tla. Za travu kao referentnu kulturu uzima se da ovaj otpor iznosi:

$$r_s = 70 \text{ s/m}$$

Sa r_a i r_s za referentnu kulturu i uz tipičnu vrednost latentne toplote isparavanja od $\lambda = 2.45 \text{ MJ/kg}$, Allen i sar. (1990) su pokazali da izraz (4.19) dobija oblik:

$$ET_0 = \frac{0.408 \Delta \cdot (R_n - G) + \gamma \frac{900}{T + 273} (e_{as} - e_a) u_2}{\Delta + \gamma(1 + 0.34 u_2)} \quad (\text{mm/dan}) \quad (4.20)$$

gde je ET_0 potencijalna evapotranspiracija za referentnu kulturu (mm/dan), Δ je gradijent krive pritiska zasićene vodene pare (kPa/°C), R_n je neto zračenje ($\text{MJ m}^{-2} \text{ dan}^{-1}$),

¹ Metoda je nazvana prema britanskim naučnicima Penmanu (Howard L. Penman) i Montitu (John L. Monteith).

G razmena toplote sa tлом ($\text{MJ m}^{-2} \text{ dan}^{-1}$), γ psihometrijska konstanta (kPa/°C), T je srednja temperatura vazduha (°C), e_{as} pritisak vodene pare pri zasićenju (kPa), e_a je izmereni pritisak vodene pare u vazduhu (kPa), i u_2 je brzina vetra na visini od 2 m (m/s).

Primer 4.4. Odrediti evapotranspiraciju sa travnatih površina pored Paličkog jezera za maj 2006. godine metodom Penman-Montit i koristeći podatke iz prethodnih primera 2.1, 4.1 i 4.2.

Rešenje. U primeru 2.1 određeno je neto zračenje $R_n = 11.74 \text{ MJ m}^{-2} \text{ dan}^{-1}$. U primeru 4.1 izračunata je i razmena toplote sa tлом $G = 0.504 \text{ MJ m}^{-2} \text{ dan}^{-1}$, koja je mala i stoga se može zanemariti. Vrednost pritiska zasićene vodene pare $e_{as} = 19.73 \text{ mb} = 1.973 \text{ kPa}$ je određena u primeru 4.2, dok prosečan izmereni pritisak vodene pare iznosi $e_a = 1.24 \text{ mb} = 1.24 \text{ kPa}$. Prosečna brzina vetra iznosi 2.1 m/s. U primeru 4.3 ocenjena je srednja mesečna temperatura $T = 16.55^\circ\text{C}$, gradijent krive pritiska zasićene vodene pare $\Delta = 1.254 \text{ mb}/^\circ\text{C} = 0.1254 \text{ kPa}/^\circ\text{C}$ i psihometrijska konstanta $\gamma = 0.668 \text{ mb}/^\circ\text{C} = 0.0668 \text{ kPa}/^\circ\text{C}$. Na osnovu ovih podataka dobija se:

$$ET_0 = \frac{0.408 \cdot 0.1254 \cdot 11.74 + \frac{0.0668 \cdot 900}{16.55 + 273} (1.973 - 1.24) \cdot 2.1}{0.1254 + 0.0668 \cdot (1 + 0.34 \cdot 2.1)} = \frac{0.601 + 0.320}{0.240} = 2.50 + 1.33 = 3.83 \text{ mm/dan}$$

4.5.2 Metoda Hargrивsa

Metoda Penman-Montit za proračun potencijalne evapotranspiracije zahteva veliki broj klimatoloških podataka koji nisu uvek na raspolaganju sa obližnjih meteoroloških stanica. U takvim slučajevima često se koriste jednostavnije metode koje imaju manje ulaznih podataka (npr. prema autorima kao što su Thornthwaite, Blaney i Criddle, Eagleman, Turc, itd). Jedna od jednostavnijih metoda je metoda Hargrивsa (Hargreaves & Samani, 1985) koja se zasniva samo na podacima o temperaturi i zračenju na granici atmosfere, što je čini atraktivnom za primenu u situacijama sa ograničenim fondom podataka. Originalna formula Hargrивsa za potencijalnu evapotranspiraciju ET_p glasi:

$$\lambda \rho ET_p = 0.0023 R_a T_D^{0.5} (T_C + 17.8)$$

gde je λ latentna toplota isparavanja (MJ/kg), ρ je gustina vode (kg/m^3), R_a je Sunčevo zračenje na granici atmosfere ($\text{MJ m}^{-2} \text{ dan}^{-1}$), T_D je razlika između maksimalne i minimalne dnevne temperature (u °C) i T_C je prosečna dnevna temperatura (u °C). Sunčevo zračenje na granici atmosfere R_a može se odrediti iz dodatka A ili izračunati pomoću formule (2.7). Za ovu metodu se smatra da daje rezultate koji su uporedivi sa složenijim formulama koje koriste više meteoroloških veličina, kao što je formula Penman-Montit (Xu & Singh, 2002). Međutim, Trajković (2007) je pokazao da se Hargrивsova formula mora korigovati da bi njena primena u Srbiji dala korektne rezultate, i to tako

što bi se eksponent 0.5 zamenio eksponentom 0.424. Korigovana Hargrivosva formula za Srbiju tada glasi:

$$ET_p = 0.0023 \frac{R_a}{\lambda} (T_{\max} - T_{\min})^{0.424} \left(\frac{T_{\max} + T_{\min}}{2} + 17.8 \right) \quad (\text{mm/dan}) \quad (4.21)$$

U gornjoj formuli latentna toplota isparavanja λ se unosi u MJ/kg, zračenje R_a u MJ m⁻² dan⁻¹, temperature u °C, dok se ET_p dobija u mm/dan.

Primer 4.5. Odrediti evapotranspiraciju sa travnatih površina pored Paličkog jezera za maj 2006. godine pomoću korigovane formule Hargrivosva za Srbiju koristeći podatke iz prethodnih primera.

Rešenje. Za razmatranu lokaciju u primeru 2.1 određeno je zračenje na granici atmosfere:

$$R_a = 453.15 \text{ W/m}^2 = 453.15 \cdot 24 \cdot 3600 \frac{\text{J/m}^2}{\text{dan}} = 39.2 \frac{\text{MJ/m}^2}{\text{dan}}$$

Sa minimalnom i maksimalnom dnevnom temperaturom od $T_{\min} = 11.4^\circ\text{C}$ i $T_{\max} = 21.7^\circ\text{C}$, kao i tipičnom vrednošću latentne toplote isparavanja od za $\lambda = 2.45 \text{ MJ/kg}$, izraz (4.21) daje:

$$ET_p = 0.0023 \frac{39.2}{2.45} (21.7 - 11.4)^{0.424} \left(\frac{21.7 + 11.4}{2} + 17.8 \right) = 3.38 \text{ mm/dan}$$

4.6 Merenje isparavanja i evapotranspiracije

Prirodno isparavanje može se u principu meriti na dva indirektna načina: ili kao smanjenje količine vode sa razmatrane površine, ili kao povećanje vlažnosti vazduha. Najčešći instrumenti za merenje isparavanja preko smanjenja količine vode su različite vrste sudova. *Isparitelj klase A* je metalni sud prečnika 120 cm i dubine 25 cm koji se puni vodom (slika 4.4 levo). Promena nivoa vode se meri mikrometrom. Količina isparene vode tokom jednog dana može se odrediti na osnovu promene zapremine vode u isparitelju i visine kiše za taj dan. Za isparavanje dobijeno merenjem na ispariteljima se smatra da se može znatno razlikovati od isparavanja sa iste površine u okviru velikih vodenih površina, kao što su jezera ili akumulacije. Zbog toga je neophodno primeniti faktor korekcije za tako velike površine. Obično je isparavanje na ispariteljima veće nego ono sa jezera, ali korekcija može da bude veoma različita u zavisnosti od lokacije i vrste isparitelja. Shuttleworth (1993) daje širok pregled vrednosti faktora korekcije za različite uslove, koji se kreću čak od 0.35 do 0.85.

Jedan od instrumenata koji direktno mere isparavanje je *Pišov* (Piche) *isparitelj* (slika 4.4 desno). On se sastoji od staklene cevčice u kojoj se nalazi voda i čiji je jedan kraj zatvoren, dok se na otvorenom kraju nalazi upijajući papir. Tokom perioda merenja cevčica se okreće sa filter papirom nadole da bi voda vlažila papir, odakle će isparavati. Količina isparene vode tokom dana se dobija direktnim očitavanjem sa podele na cevčici.



Slika 4.4. Isparitelj klase A u meteorološkom krugu (levo) i Pišov isparitelj u meteorološkom zaklonu (desno) ispred RHMZ-a u Košutnjaku u Beogradu (desno; fotografije: J. Plavšić).



Slika 4.5. Lizimetar u meteorološkom krugu ispred RHMZ-a u Košutnjaku u Beogradu (fotografija: J. Plavšić).

Instrument za merenje evapotranspiracije naziva se *lizimetar* (slika 4.5). To je vodonepropusan sud sa zemljom zasejanom određenom reprezentativnom kulturom. Ispod suda se nalazi uređaj za merenje težine celog suda, a od dna suda polazi drenažna cev iz koje se voda skuplja u posudu. Pored toga, mere se padavine na površinu lizimetra. Promena težine lizimetra predstavlja promenu zemljišne vlage, a količina drenirane vode predstavlja perkolaciju. Jednačina bilansa za lizimetar glasi:

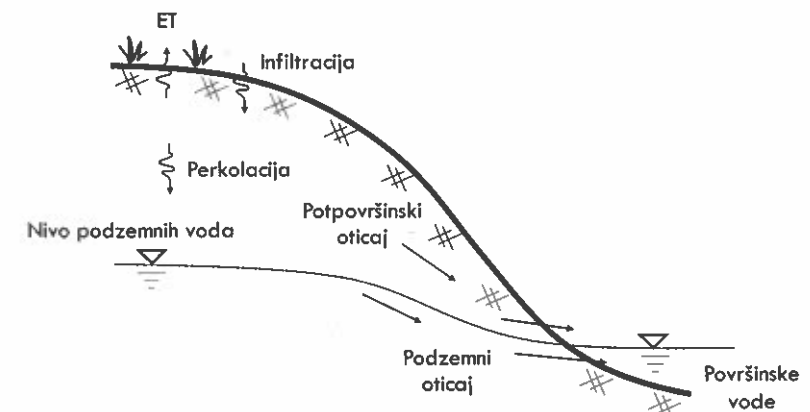
$$\text{kiša} - ET - \text{perkolacija} = \pm \text{promena zemljišne vlage}$$

Vrednost evapotranspiracije ET se određuje rešavanjem gornje jednačine.

5 POTPOVRŠINSKI PROCESI

Pod potpovršinskim procesima u hidrološkom ciklusu smatraju se oni koji se odvijaju ispod površine zemlje, tj. u tlu. Uloga tla u ciklusu oticaja na slivu je veoma značajna. Tlo je veliki rezervoar vode i može da izvrši značajnu preraspodelu količina vode u vremenu.

Hidrološki ciklus obuhvata nekoliko važnih potpovršinskih procesa (slika 5.1). *Infiltracija* predstavlja upijanje kišne vode ili otopljenog snega sa površine terena u tlo. Upijena voda povećava vlažnost zemljišta, a iz njega može da se vrati u atmosferu isparavanjem ili transpiracijom vegetacije čiji se koreni sistemi nalaze u površinskom sloju zemljišta. Dalje proceđivanje vode u vertikalnom pravcu nadole naziva se *perkolacija* ili poniranje vode. Nagib terena i prisustvo slojeva tla manje vodopropusnosti dovode i do lateralnog kretanja vode kroz nezasićene slojeve, što čini *potpovršinski oticaj*. Slično tome, kretanje podzemne vode iz zasićenih slojeva ka rečnoj mreži čini spori *podzemni oticaj*. Podzemne vode su zato glavni snabdevač rečne mreže vodom u periodima bez padavina. Potpovršinski i podzemni oticaj mogu izbiti na površinu terena kao izvor, ili mogu dospeti do površinskih tokova i prihranjivati ih. Na prirodnim slivovima ove dve komponente oticaja čine znatno veći udeo u protoku reka nego površinski oticaj.



Slika 5.1. Proces u potpovršinskoj fazi hidrološkog ciklusa (prema Chow i sar., 1988).

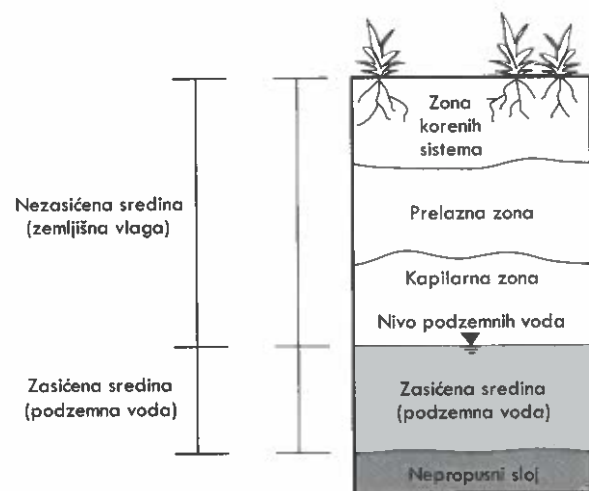
Vode ispod površine tla imaju veliki značaj za hidrotehniku i vodoprivredu. Kvalitet podzemnih voda je po pravilu bolji od kvaliteta površinskih voda, pa se koriste kao izvor vode za piće. Oko 70% vode za javne vodovodne sisteme u Srbiji zahvata se iz podzemnih voda (Vlada Republike Srbije, 2017). Eksploatacija podzemnih voda zahteva poznavanje njihovog režima, a time i celog hidrološkog režima na razmatranom slivnom području. Poznavanje kretanja vode u nezasićenoj sredini je važno za oblast navodnjavanja, jer su površinski slojevi tla ti koji čine plodonosno zemljište u kome se koreni sistemi biljaka snabdevaju vodom i hranljivim materijama. Takođe, razumevanje potpovršinskih procesa je važno i za oblast odvodnjavanja, kako poljoprivrednih tako i drugih površina u cilju zaštite od štetnog dejstva voda. Podzemne vode su važne i za druge inženjerske zadatke, kao što je projektovanje brana, nasipa, putne infrastrukture, fundiranja objekata, sanitarnih deponija itd.

U ovom poglavlju opisuju se hidrološki procesi ispod površine tla u onoj meri u kojoj su poželjni za razumevanje veze između padavina i oticaja na slivu.

5.1 Voda u poroznoj sredini

Tlo ili zemljište je *porozna sredina* jer većinu geoloških formacija koje se nalaze blizu površine zemlje čine nevezane (rastresite) stenske mase sastavljene od čestica različitih veličina i između kojih se nalaze šupljine (pore, prsline ili pukotine).

U pogledu sadržaja vode, tlo ispod površine terena se generalno deli na dve zone: nezasićenu i zasićenu zonu. U površinskom sloju tla šupljine su ispunjene delimično vodom i delimično vazduhom, pa se ovaj deo naziva *nezasićena zona*. Zbog prisustva vazduha, ona se još naziva i *zona aeracije*. Taj deo tla može da se privremeno zasiti vodom tokom neke kišne epizode ili usled topljenja snega, ali će se sa prestankom padavina ocediti i osušiti i ponovo postati nezasićen. Voda u nezasićenoj zoni se naziva i *zemljišna vlaga*. Nezasićena zona se uvek nalazi iznad zasićene zone i proteže se do površine tla (slika 5.2).



Slika 5.2. Podela tla na zasićenu i nezasićenu zonu (prema Dingmanu, 2002).

Zasićena zona ili *zona saturacije* je ona u kojoj su sve pore ispunjene vodom. Ona se proteže od nivoa podzemnih voda do nepropusnog sloja (podine), kao što je prikazano na slici 5.2. Iako su sve vode ispod površine terena suštinski podzemne, termin *podzemna voda* se koristi samo za „slobodnu“ vodu koja se kreće kroz zasićenu poroznu sredinu pod uticajem sile težine.

Dve glavne zone u tlu, nezasićenu i zasićenu, deli *nivo podzemnih voda*. Nivo podzemnih voda definiše se kao onaj nivo u zasićenoj sredini na kome se voda nalazi pod atmosferskim pritiskom. To bi bio nivo vode u bunaru postavljenom na razmatranom lokaciji. Ispod nivoa podzemnih voda porozna sredina je zasićena i voda se nalazi pod pritiskom većim od atmosferskog. Nivo podzemnih voda se podiže i spušta u skladu sa sezonskim promenama meteoroloških i hidroloških uslova i sa prihranjivanjem podzemnih voda tokom pojedinih epizoda padavina. Kretanje vode kroz poroznu sredinu se naziva i *filtracija*.

5.2 Voda u nezasićenoj sredini – zemljišna vlaga

Nezasićena zona se može podeliti na tri podzone prikazane na slici 5.2. U površinskom delu zemljišta, na vrhu nezasićene zone, nalazi se zona korenih sistema vegetacije koja je bogata organskim materijama. Njena debljina je promenljiva i zavisi od vrste zemljišta i vegetacije (od 2 do 5 m). Ova zona je generalno nezasićena, osim tokom perioda intenzivne infiltracije ili eventualnog značajnog podizanja nivoa podzemnih voda. Sadržaj vlage u ovoj zoni se menja sa smenom kišnih epizoda i beskišnih intervala tokom kojih vegetacija koristi zemljišnu vlagu za transpiraciju.

Iznad nivoa podzemnih voda nalazi se *kapilarna zona* ili *kapilarna traka*, koja se prostire do visine do koje dospeva kapilarno penjanje vode. Kako pore u tlu imaju male prečnike, one se ponašaju kao kapilarne cevčice u kojima se voda penje do visine na kojoj se postiže ravnoteža između težine vode i sila površinskog napona, tj. kapilarnih sila. Što su pore manje, kapilarnost je izraženija i veće su visine kapilarnog penjanja. Debljina kapilarne trake zato zavisi od teksture zemljišta. Za krupnozrne materijale kapilarna visina može biti svega nekoliko centimetara, a kod sitnozrnih i nekoliko metara (Jovanović, 1989).

Prelazna zona se prostire od dna zone korenih sistema do vrha kapilarne zone i može imati debljinu i od stotina metara ako je nivo podzemne vode veoma duboko, a u suprotnom može i da izostane iz profila zemljišne vlage.

5.2.1 Poroznost i sadržaj zemljišne vlage

Šupljine između čestica tla ili pore služe kao provodnici vode i zato su od suštinskog značaja za razmatranje potpovršinskih procesa. Njihova veličina, oblik i raspored utiču na kretanje vode kroz tlo. Prema veličini, pore se mogu podeliti na kapilarne, superkapilarne i subkapilarne (Todd & Mays, 2004). Kapilarne pore su dovoljno male (od 0.2 mikrona do 0.2 mm) da bi sile površinskog napona u njima držale vodu. Superkapilarne pore su veće od kapilarnih, dok su subkapilarne pore toliko male da se voda u njima drži pre svega silama adhezije kao vezana voda.

Tabela 5.1. Osnovne frakcije zemljišta prema krupnoći (prema Chow i sar., 1988).

Materijal	Veličina čestica	Poroznost (%)
Šljunak	> 2 mm	25 - 40
Pesak	50 μm - 2 mm	25 - 50
Prašina	2 μm - 50 μm	35 - 50
Glina	< 2 μm	40 - 70

U nezasićenoj sredini deo šupljina je ispunjen vodom, a deo vazduhom. Ako je V ukupna zapremina zemljišta, ona se deli na zapreminu vode V_p , zapreminu vazduha V_a i zapreminu čvrste faze V_s . Zapremina vazduha i vode zajedno daju zapreminu pora V_p .

Poroznost se definiše kao procentualna zastupljenost zapremine pora u ukupnoj zapremini zemljišta:

$$n = \frac{V_p}{V} \quad (5.1)$$

Poroznost tla zavisi od krupnoće čestica, ali i od njihovog oblika i rasporeda, tj. strukture (Brutsaert, 2005). U zavisnosti od ovih karakteristika čvrste faze, poroznost se kreće od malih vrednosti bliskih nuli do preko 0.5 (tabela 5.1). Zbijanjem tla poroznost se smanjuje, dok se obradom poljoprivrednog zemljišta poroznost povećava. Koristi se i *efektivna poroznost*, koja predstavlja udeo samo gravitacione vode (one koja se kreće gravitacijom naniže) u jediničnoj zapremini, a ne i vodu vezanu za čestice tla:

$$n_e = \frac{V_{\text{grav. vode}}}{V}$$

Sadržaj zemljišne vlage, kao mera vlažnosti tla u nezasićenoj zoni, definiše se kao zapremina vode u odnosu na ukupnu zapreminu tla:

$$\theta = \frac{V_v}{V} \quad (5.2)$$

Iz prethodnih definicija jasno je da sadržaj zemljišne vlage može biti samo manji ili jednak poroznosti, a ne i veći:

$$0 \leq \theta \leq n \quad (5.3)$$

Ako je sadržaj vlage jednak poroznosti, zemljište je potpuno zasićeno vodom. *Stepen zasićenja* zemljišta vodom je odnos zapremine vode V_v i zapremine pora V_p , a svodi se na odnos sadržaja vlage i poroznosti:

$$S = \frac{V_v}{V_p} = \frac{\theta}{n} \quad (5.4)$$

S obzirom da vezana voda u tlu nije raspoloživa ni za vegetaciju ni za filtraciju i oticanje, sadržaj vlage koja odgovara nedostupnoj vodi se naziva rezidualni sadržaj vlage θ_r . U odnosu na ovu vlažnost definiše se *efektivni stepen zasićenja*:

$$S_e = \frac{\theta - \theta_r}{n - \theta_r} \quad (5.5)$$

Sa gledišta vegetacije koja koristi vodu iz zemljišta, samo je određeni raspon vlažnosti tla od značaja. Gornja granica tog raspona naziva se poljski kapacitet, a donja je tačka trajnog uvenuća. *Poljski kapacitet* se definiše kao vlažnost zemljišta posle natapanja i posle prestanka ceđenja gravitacione vode. Uobičajeno vreme dostizanja poljskog kapaciteta posle zasićenja iznosi oko dva dana (Chow i sar., 1988). S druge strane, *tačka trajnog uvenuća* je vlažnost osušenog zemljišta ispod koje će biljke uvenuti bez obzira da li im se dodaje voda (Shaw i sar., 2011). Tabela 5.2 prikazuje neke tipične vrednosti sadržaja zemljišne vlage pri zasićenju, pri poljskom kapacitetu i pri tački trajnog uvenuća.

5.2.2 Mehanizmi kretanja i zadržavanja vode u tlu

Sa gledišta mehanizama koji utiču na kretanje i zadržavanje vode u tlu, voda se obično klasifikuje kao vezana voda, kapilarna voda i gravitaciona voda. Kada je zemljište u nezasićenoj zoni skoro suvo, u njemu se nalazi samo *vezana* ili *higroskopna voda*, tj. voda koja obavija čestice tla u vidu tankog filma. Ova voda prijanja za čestice jakim silama adhezije i može se odstraniti iz zemljišta jedino sušenjem na 105 °C. Kao takva, ona nije dostupna korenim sistemima biljaka, niti učestvuje u formiranju potpovršinskog ili podzemnog oticaja, pa nije interesantna sa gledišta ciklusa oticaja na slivu.

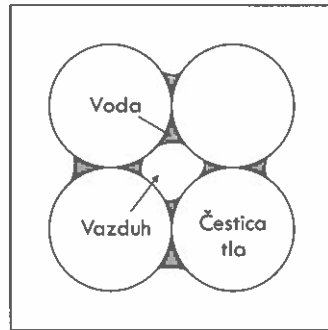
Voda koja dospeva u zemljište infiltracijom kreće se kroz zemljište naniže pod uticajem gravitacije i zato se naziva *gravitaciona voda*. Prolaskom gravitacione vode kroz nezasićenu zonu vlažnost zemljišta na nekoj dubini se najpre povećava, a zatim smanjuje. Kretanje gravitacione vode može biti lakše ili teže u zavisnosti od teksture i strukture zemljišta.

Voda koja dospeva u nezasićenu zonu kapilarnim penjanjem iz zasićene zone zove se *kapilarna voda*. Kapilarno penjanje, a time i zadržavanje vode u zemljištu, odvija se pod dejstvom sila površinskog napona ili kapilarnih sila koje održavaju ravnotežni kontakt između molekula vode i vazduha u porama (slika 5.3). Što je sadržaj vode manji, to su ove sile jače i voda se teže kreće. Obrnuto, sa povećanjem vlažnosti kapilarne sile su slabije i voda se lakše kreće i lakše je dostupna za vegetaciju.

Tabela 5.2. Karakteristične vrednosti poroznosti i sadržaja zemljišne vlage (izvor Rawls i sar., 1993). Sve vrednosti su izražene bezdimenzionalno (m^3/m^3).*

Vrsta tla	Poroznost	Efektivna poroznost	Rezidualni sadržaj vlage	Tačka trajnog uvenuća	Poljski kapacitet
Pesak	0.44	0.42	0.02	0.03	0.09
	(0.37 - 0.50)	(0.35 - 0.48)	(0 - 0.04)	(0.01 - 0.06)	(0.02 - 0.16)
Ilovača	0.46	0.43	0.03	0.12	0.27
	(0.37 - 0.55)	(0.33 - 0.53)	(0 - 0.07)	(0.07 - 0.16)	(0.19 - 0.34)
Glina	0.48	0.38	0.09	0.27	0.40
	(0.43 - 0.52)	(0.27 - 0.50)	(0 - 0.20)	(0.20 - 0.33)	(0.32 - 0.46)

* Prikazane vrednosti su srednje vrednosti iz određenog broja uzoraka, a vrednosti u zagradama predstavljaju raspon od \pm jedne standardne devijacije oko srednje vrednosti.



Slika 5.3. Shematski prikaz vode u porama tla u prisustvu vazduha koju sile površinskog napona drže na mestima dodirivanja čestica tla (prema Todd & Mays, 2004).

Efekat kapilarnosti se najbolje uočava ako se posmatra stub suvog zemljišta čiji se donji kraj uroni u posudu sa vodom. U takvoj situaciji voda će se kretati od površine vode u posudi naviše kroz zemljište. Vlažnost zemljišta u stubu će biti najveća pri površini vode i smanjivaće se sa rastojanjem od površine vode. Pri ovom uvlačenju tj. usisavanju vode u zemljište pod dejstvom kapilarnih sila, pritisak vode u porama postaje manji od atmosferskog. Taj negativni pritisak ili potpritisak vode (vakuum) odražava jačinu kapilarnih sila kojima se voda drži u porama tla u prisustvu vazduha. Na visini h od površine vode ovaj kapilarni potpritisak biće jednak:

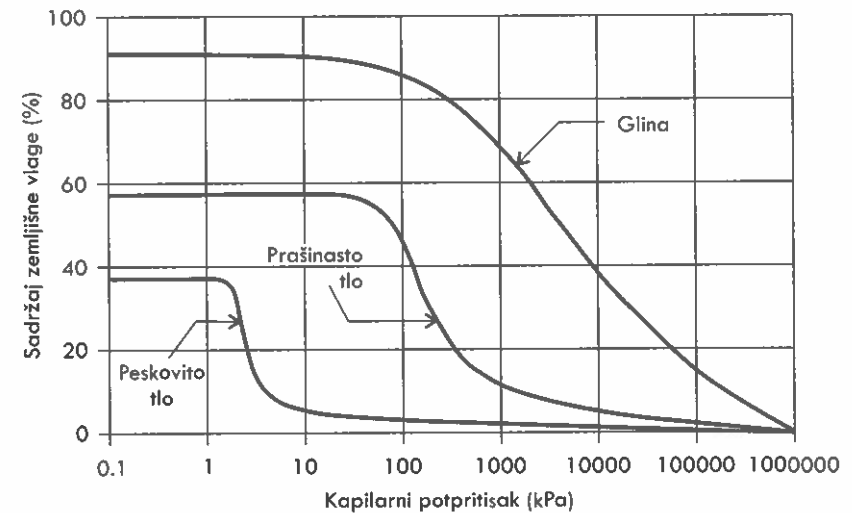
$$p_k = -\rho gh$$

Veličina

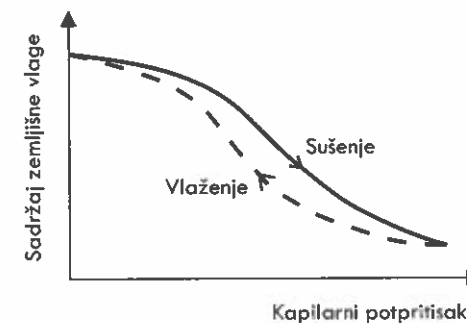
$$\psi = \frac{p_k}{\rho g} = -h \quad (5.6)$$

naziva se *kapilarni potencijal* i predstavlja negativnu visinu vodenog stuba koja odgovara potpritisaku vode na visini h od pijezometarskog nivoa vode. Kapilarni potencijal je sve veći sa udaljavanjem od nivoa podzemnih voda, odnosno sa smanjenjem vlažnosti zemljišta.

Kada se zemljište suši, odnosno kada se smanjuje sadržaj vlage u njemu, kapilarne sile postaju jače i raste potpritisak vode i kapilarni potencijal. U obrnutom procesu vlaženja zemljišta, potpritisak tj. kapilarni potencijal će opadati sa porastom sadržaja vlage. Zavisnost između sadržaja vlage u zemljištu i kapilarnog potpritisaka, koja se naziva karakteristična kriva zemljišne vlage, pokazuje direktnu proporcionalnost ove dve veličine, ali zavisi od sastava zemljišta i drugih faktora. Primer ovih zavisnosti dat je na slici 5.4. Sa slike se vidi da je kapilarni potpritisak u peskovitom tlu manji od potpritisaka u glinovitom tlu pri istom sadržaju vlage. Takođe, ova zavisnost nije jednoznačna pri sušenju i vlaženju zemljišta, već pokazuje tzv. histerezis ili petlju (slika 5.5). Smatra se da vlažnosti poljskog kapaciteta u nekom zemljištu odgovara kapilarni potpritisak od oko -33 kPa (tj. kapilarni potencijal od oko -3.3 m), a tački trajnog uvenuća odgovara potpritisak od -1.5 MPa (ili kapilarni potencijal od -150 m) (Arnell, 2002).



Slika 5.4. Zavisnost sadržaja vlage u zemljištu i potpritisaka vode u nezasićenoj sredini (prema Fredlungu i Xingu, 1994).



Slika 5.5. Shematski prikaz petlje na karakterističnoj krivoj vlažnosti pri sušenju odnosno vlaženju tla.

5.2.3 Kretanje vode u nezasićenoj sredini

Ako se posmatra jednodimenzionalno tečenje vode u nezasićenoj sredini, tj. ono koje se odvija samo u vertikalnom pravcu z brzinom v (pri čemu se smatra da nema komponenti brzina u horizontalnom pravcu), jednačina kontinuiteta glasi:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \quad (5.7)$$

Ova jednačina pokazuje da je promena sadržaja vlage θ kroz vreme posledica promene fluksa vode kroz elementarnu zapreminu. Brzina v predstavlja *Darsijevu brzinu* tečenja, koja se definiše kao protok vode Q kroz jedinični poprečni presek zemljišta A (ceo presek, a ne samo presek šupljina):

$$v = \frac{Q}{A}$$

Darsijeva brzina v je prividna ili fiktivna brzina vode. Stvarna brzina vode v_s bi se dobila ako se poprečni presek A koriguje na površinu pora kao proticajni presek:

$$v_s = \frac{v}{n} = \frac{Q}{nA}$$

Prema Darsijevom zakonu, Darsijeva brzina je proporcionalna gubitku energije po jedinici visine (dubine) porozne sredine I_e :

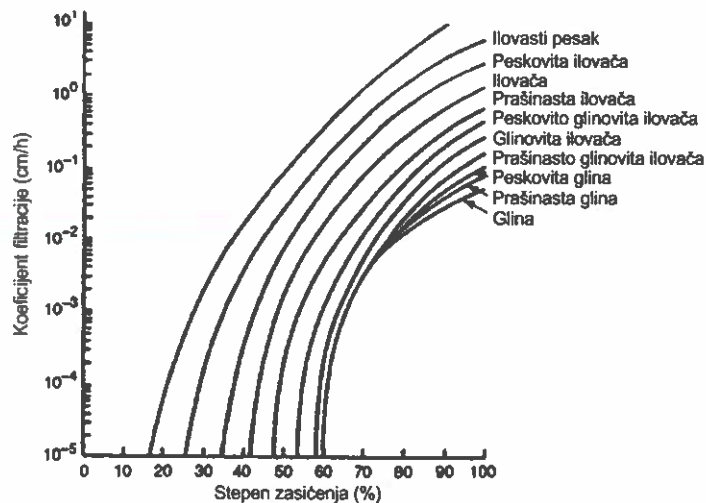
$$v = KI_e \quad (5.8)$$

gde se koeficijent proporcionalnosti K zove *koeficijent filtracije*. Linearna veza između brzine filtracije i nagiba linije energije u Darsijevom zakonu važi samo u uslovima laminarnog tečenja, odnosno pri Reynoldsovom broju manjem od 1, a smatra se da ne odstupa značajno i za Reynoldsove brojeve do 10.

Koeficijent filtracije je mera sposobnosti tla da propušta vodu i zavisi od teksture tla i sadržaja vlage u tlu. Koeficijent filtracije je najveći u zasićenoj sredini i opada sa smanjenjem stepena zasićenja. Vrednosti koeficijenta filtracije zasićene sredine prikazane su u tabeli 5.3, a na slici 5.6 je prikazana zavisnost koeficijenta filtracije od sadržaja vlage u nezasićenoj sredini $K(\theta)$.

Tabela 5.3. Karakteristične vrednosti koeficijenta filtracije u zasićenoj sredini (izvor Rawls i sar., 1993).

Vrsta tla	Koeficijent filtracije u zasićenoj sredini (cm/h)	(m/s)
Pesak	> 20 cm/h	> 10^{-5}
Peskovita ilovača	2 – 10 cm/h	10^{-6} – 10^{-5}
Ilovača	0.2 – 2 cm/h	10^{-7} – 10^{-6}
Glinovita ilovača	0.05 – 0.4 cm/h	10^{-7} – 10^{-6}
Glina	< 0.1 cm/h	< 10^{-7}



Slika 5.6. Koeficijent filtracije u zavisnosti od stepana zasićenosti tla vodom (prema Rawlsu i sar., 1993).

Gubitak energije I_e u Darsijevom zakonu praktično je jednak promeni pijeziometarskog nivoa Π po dubini, s obzirom da se kinetička energija $v^2/2g$ može zanemariti zbog veoma malih brzina filtracije:

$$v = -K \frac{\partial \Pi}{\partial z} \quad (5.9)$$

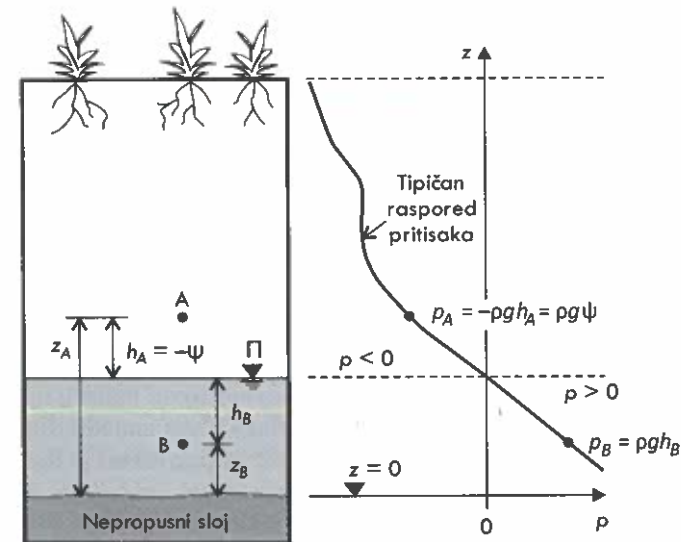
U gornjem izrazu negativni predznak ukazuje da se pijeziometarski nivo smanjuje u pravcu tečenja z , koji je orijentisan nagore. Drugim rečima, kretanje vode u tlu se odvija u pravcu smanjenja potencijalne energije.

Ukupna potencijalna energija po jedinici težine vode Π sastoji se od gravitacionog potencijala z i kapilarnog potencijala Ψ :

$$\Pi = z + \Psi \quad (5.10)$$

Gravitacioni potencijal z predstavlja rad gravitacionih sila po jedinici težine vode potreban da se voda premesti sa nekog referentnog nivoa $z = 0$ na visinu z posmatrane tačke u tlu. Kapilarni potencijal Ψ je rad kapilarnih sila po jedinici težine vode potreban da se voda kapilarno podigne od nivoa podzemnih voda do razmatrane tačke u tlu (npr. tačka A na slici 5.7). Kao što je objašnjeno u potpoglavlju 5.2.2, kapilarni potencijal je negativan. Kako važi da se kretanje vode odvija u pravcu smanjenja ukupne potencijalne energije, tako se i gravitaciona i kapilarna voda kreću u pravcu smanjenja potencijala: gravitaciona voda naniže, a kapilarna voda naviše. Gradijenti potencijala postoje zahvaljujući prostornim varijacijama poroznosti i sadržaja vlage.

Na slici 5.7 se može uočiti da za tačku A u nezasićenoj zoni ukupni potencijal iznosi $\Pi = z_A - h_A = z_A + \Psi$, dok za tačku B u zasićenoj zoni iznosi $\Pi = z_B + h_B$, gde je $h_B = p_B/\rho g$ visina vodenog stuba iznad tačke B do nivoa podzemnih voda.



Slika 5.7. Raspored pritiska vode u nezasićenoj i zasićenoj zoni (prema Dingmanu, 2002).

Ako se u jednačinu kontinuiteta (5.7) unese jednačina (5.9) uz zamenu pijezometarskog nivoa jednačinom (5.10), a promena kapilarnog potencijala po dubini $\partial\Psi/\partial z$ izrazi kao $(\partial\Psi/\partial\theta)(\partial\theta/\partial z)$, dobija se poznata Ričardsova jednačina za neustaljeno kretanje vode u nezasićenoj sredini:

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left(K \frac{\partial\Psi}{\partial\theta} \frac{\partial\theta}{\partial z} + K \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left(D \frac{\partial\theta}{\partial z} + K \right) \quad (5.11)$$

gde je $D = K \partial\Psi/\partial\theta$ koeficijent difuzije zemljišne vlage. Za rešavanje Ričardsove jednačine potrebno je poznavati zavisnost koeficijenta filtracije od sadržaja vlage $K(\theta)$ i zavisnost između sadržaja vlage i kapilarnog potencijala $\Psi(\theta)$, koju je najbolje odrediti eksperimentalno.

Darsijev zakon i jednačina kontinuiteta mogu biti uopšteni tako da opišu trodimenzionalno kretanje vode u poroznoj sredini. U tom slučaju može se uzeti u obzir i anizotropija porozne sredine, odnosno zavisnost njenih karakteristika od pravca. Na primer, u aluvijalnim formacijama koeficijent filtracije u horizontalnom pravcu može biti veći od onog u vertikalnom pravcu zbog slojevitog rasporeda istaloženog sedimenta, gde neki slojevi usporavaju vertikalnu filtraciju, ali je horizontalna filtracija omogućena.

5.2.4 Merenja stanja vlažnosti i kretanja vode u zemljištu

Direktno merenje protoka vode ispod površine tla veoma je teško, pa se obično mere veličine koje pokazuju stanje vlažnosti, a to su sadržaj zemljišne vlage i kapilarni potencijal. Vrednosti koeficijenta filtracije u zasićenoj ili nezasićenoj sredini takođe se mogu odrediti eksperimentalno. Direktno merenje potpovršinskog i podzemnog oticaja se sprovodi pomoću trasera i povezivanjem njihovog transporta sa brzinom vode (Shaw i sar., 2011).

Gravimetrijsko određivanje sadržaja zemljišne vlage je klasična i pouzdana metoda. Uzima se uzorak zemlje poznate zapremine V , meri se masa uzorka m , a zatim se uzorak suši u pečima za uzorke na temperaturi od 105°C sve dok njegova masa ne postane konstantna u iznosu m_s . Masa vode u vlažnom uzorku jednaka je razlici ovako izmerenih masa ($m_v = m - m_s$), a time su određeni zapremina vode ($V_v = m_v/\rho_v$) i sadržaj zemljišne vlage ($\theta = V_v/V$).

Drugi način merenja je pomoću neutronske sondi. U rupu u zemlji stavlja se izvor radioaktivnosti, a emitovani brzi neutroni se usporavaju u sudaru sa jezgri vodonika u vodi i rasipaju. Broj usporenih neutrona se registruje detektorima. On će zavistiti od broja jezgara vodonika, tako da predstavlja meru količine vode u zemljištu.

U novije vreme razvijene su metode merenja sadržaja zemljišne vlage na osnovu merenja dielektrične konstante tla, koja je pokazatelj elektroprovodljivosti materijala. Elektroprovodljivost tla se povećava sa povećanjem sadržaja vlage. Veza između dielektrične konstante i sadržaja zemljišne vlage se određuje kalibracijom. Merenje dielektrične konstante se sprovodi kapacitivnim sondama kao prenosnim uređajima, ili sa trajno ugrađenim mernim elektrodama (metoda vremenske reflektometrije; Shaw i sar., 2011).

U poslednjih nekoliko decenija sve je prisutnije merenje vlažnosti tla pomoću metoda daljinske detekcije. Radiometrima na letelicama i na orbitalnim satelitima se meri promena u dielektričnim osobinama površine tla. Ovi radiometri emituju elektromagnetne talase i primaju deo zračenja koji se reflektuje od površine tla. Slabljenje emitovanih talasa, odnosno procenat reflektovanog zračenja u odnosu na emitovano, proporcionalno je dielektričnoj konstanti. Velika prednost ovog pristupa je u tome što omogućava uvid u prostorni raspored vlažnosti tla, ali samo u vrlo plitkom sloju od površine zemlje.

Instrumenti koji se zasnivaju na električnom otporu sastoje se od poroznih gipsanih blokova sa parom elektroda koji se postave u zemljište. Voda iz zemljišta se upija u gips sve dok se ne postigne ravnoteža između pritiska u porama zemlje i gipsa. Tada se meri električni otpor između elektroda, koji je pokazatelj sadržaja vlage u gipsu.

Instrumenti kojima se meri kapilarni potencijal ili visina kapilarnog penjanja nazivaju se *tenziometri*. Oni se sastoje od porozne keramičke čašice napunjene vodom koja se postavlja u zemljište, dok je s druge strane povezana sa manometrom. Kako se voda u keramičkoj čašici nalazi pod atmosferskim pritiskom, a pritisak vode u zemljištu je negativan, voda iz keramičke čašice će se usisavati u zemljište sve dok se ne postigne ravnoteža pritiska. Smanjenje vodenog stuba u čašici pokazuje visinu kapilarnog penjanja.

Koeficijenti filtracije u zasićenoj sredini se mogu izmeriti na različite načine. Eksperimenti se sprovode na neporemećenim uzorcima pomoću različitih *permeametera*. U laboratorijskoj primeni koriste se permeametri sa konstantnim ili opadajućim nivoom vode, a na terenu se koriste prstenasti permeametri koji se utiskuju u zemljište. Takođe, infiltracioni kapacitet zemljišta izmeren pomoću infiltrometra je ekvivalentan koeficijentu filtracije u zasićenom površinskom sloju tla (Shaw i sar., 2011). Pored toga, koeficijent filtracije se može odrediti u pijezometrima veštačkim nalivanjem. Povišeni nivo vode opada eksponencijalno od početnog nivoa h_1 do prvobitnog nivoa h_0 brzinom koja zavisi od koeficijenta filtracije. U tom slučaju se meri vreme t opadanja nivoa vode od h_1 do 37% početne razlike $h_1 - h_0$.

Traseri su supstance čije fizičke, hemijske i biološke karakteristike omogućavaju njihov transport u vodi bez vezivanja za bilo koju drugu sredinu (zemljište, rečno korito i sl.). Kao traseri se često koriste: so (natrijum hlorid), fluorescentne boje (npr. rodamin) i izotopi vodonika i kiseonika. Praćenje potpovršinske vode sa izotopima vode je veoma skupo jer zahteva primenu masenog spektrometra (Shaw i sar., 2011). Prednost obične soli kao trasera jeste što njeno praćenje može da bude neinvazivno ako se koriste metode električnog otpora, a može da se detektuje i merenjem električne provodljivosti vode u pijezometrima. So se često koristi i za merenje protoka u manjim vodotokovima (videti poglavlje 6.3).

5.3 Infiltracija

Infiltracija ili upijanje vode u tlo je proces koji, zajedno sa intercepcijom, zadržavanjem vode u površinskim depresijama i isparavanjem tokom padavina, određuje raspoloživu količinu pale vode za formiranje površinskog oticaja. S druge strane, zahva-

ljujući infiltraciji, upijena voda obnavlja vlažnost zemljišta i dopunjava podzemne vode, a time omogućava formiranje potpovršinskog i podzemnog oticaja i održavanje protoka u vodotokovima tokom sušnih perioda.

Količina vode koja će se upiti u zemljište, kao i brzina kojom će se upiti, zavisi od velikog broja faktora. To je pre svega stanje površine terena i vegetacija, zatim vrsta tla i njegove karakteristike, kao što su poroznost i koeficijent filtracije, i konačno trenutni sadržaj vlage u zemljištu. Prolazak vode kroz površinu terena najviše zavisi od stanja te površine. Na primer, na samoj površini pore zemljišta mogu biti popunjene sitnim česticama prašine tako da je intenzitet infiltracije mali čak i kada tlo ispod površine ima veliku vodopropusnost. Kada voda prođe kroz površinu terena, njeno kretanje naniže zavisi od karakteristika zemljišta i sadržaja vlage u njemu.

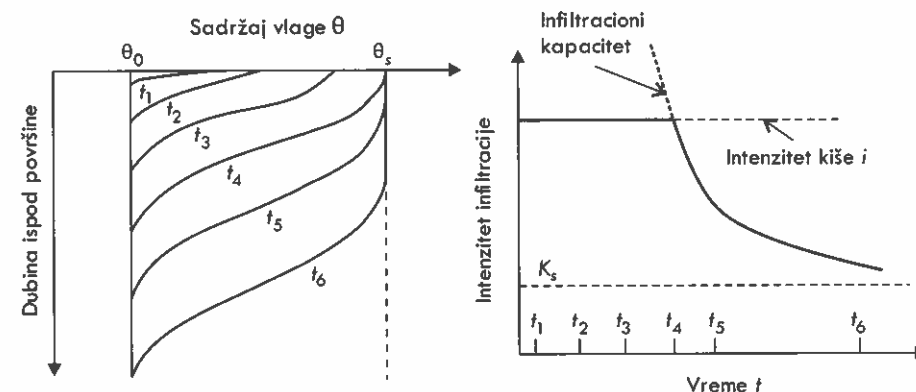
Intenzitet infiltracije je brzina kojom se voda upija u tlo. *Potencijalna infiltracija* ili *infiltracioni kapacitet* je maksimalni intenzitet infiltracije sa kojim površina tla može da upija vodu. Međutim, ukoliko na površinu zemlje stiže manje vode nego što se može potencijalno upiti, stvarna infiltracija biće manja od potencijalne. Ako se potencijalna infiltracija označi sa f_p , a intenzitet kiše sa i , odnos potencijalne i stvarne infiltracije f može se formulisati na sledeći način:

$$f = \begin{cases} f_p, & i < f_p \\ i, & i > f_p \end{cases} \quad (5.12)$$

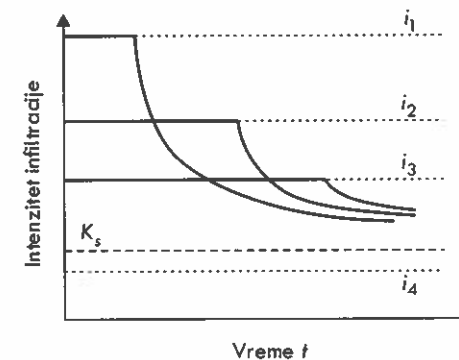
5.3.1 Mehanizam infiltracije

Posmatra se hipotetički slučaj kiše konstantnog intenziteta koji je veći od koeficijenta filtracije tla u zasićenoj sredini K_s . Voda koja se upija u tlo najpre se zadržava u plitkom sloju na površini tla. Brzina proceđivanja upijene vode u niže slojeve zavisi od koeficijenta filtracije, a on opet zavisi od sadržaja vlage. Ako je filtracija sporija od upijanja, povećavaće se akumulacija vode u površinskom sloju. Međutim, sa povećanjem vlažnosti površinskog sloja povećava se i koeficijent filtracije, a time i brzina filtracije ka nižim slojevima. Kretanje vode naniže uslovljava pomeranje *vlažnog fronta* (granice između vlažnog i suvog tla). Raspored zemljišne vlage po dubini zemljišta tokom infiltracije u homogenom tlu prikazan je na slici 5.8-a, gde je pretpostavljeno da je početni sadržaj vlage iznosio θ_0 i gde se vidi kako vlažni front napreduje po dubini i kroz vreme.

Ako je na početku infiltracije zemljište suvo, početni infiltracioni kapacitet je veliki. Sa daljim pristizanjem vode i povećanjem vlažnosti zemljišta, infiltracioni kapacitet opada i približava se vrednosti koeficijenta filtracije u zasićenoj sredini K_s . Ovo je ilustrovano na slici 5.8-b. Pri konstantnom intenzitetu kiše i , na početku je infiltracioni kapacitet veći od intenziteta kiše, pa je intenzitet infiltracije jednak intenzitetu kiše u skladu sa (5.12). Kada zemljište na površini postane zasićeno (u trenutku t_4 na slici 5.8), infiltracioni kapacitet se izjednačava sa intenzitetom kiše. Sa daljim upijanjem vode i napredovanjem vlažnog fronta posle trenutka t_4 , infiltracioni kapacitet opada ka vrednosti K_s , a intenzitet kiše je veći od infiltracionog kapaciteta tla. Drugim rečima, od tog trenutka neće se sva voda upijati u zemljište, već će se formirati nadsloj vode na površini i površinski oticaj.



Slika 5.8. Levo: raspored zemljišne vlage u homogenom tlu tokom infiltracije sa početnim sadržajem vlage θ_0 i sadržajem vlage pri zasićenju θ_s . Desno: intenzitet infiltracije kroz vreme pri konstantnom intenzitetu kiše i (prema Meinu i Larsonu, 1971, i Viessmanu i Lewisu, 1997).



Slika 5.9. Intenzitet infiltracije kroz vreme pri različitim konstantnim intenzitetima kiše (prema Meinu i Larsonu, 1971, i Viessmanu i Lewisu, 1997).

Trenutak pojave oticaja u konkretnoj vrsti zemljišta zavisi od sadržaja vlage i intenziteta kiše. Ovi faktori takođe utiču na oblik krive infiltracije posle ove tačke. Na slici 5.9 je prikazano kako ove krive izgledaju za tri različita intenziteta kiše veća od K_s . Ako je intenzitet kiše manji od K_s (kao intenzitet i_4 na slici), kiša nikad neće prevazići kapacitet tla za upijanje vode i u tom slučaju nikad neće doći do formiranja površinskog oticaja.

Kretanje upijene vode naniže kroz zemljište se nastavlja dok voda ne dospe do nepropusnog sloja u tlu ili dok se brzina proceđivanja ne smanji i proceđivanje praktično ne stane, do čega će doći neko vreme posle prestanka kiše ili topljenja snega na površini. Bez pristizanja vode sa površine, kao i uz isparavanje i transpiraciju iz zemljišta, sadržaj zemljišne vlage iznad vlažnog fronta će se smanjivati, a time će opadati i koeficijent filtracije i proceđivanje naniže će se još više usporiti.

Prethodna razmatranja se odnose na idealizovane uslove, kakvi ne postoje u prirodi. Pre svega, intenzitet kiše nije konstantan, a mogući su i prekidi kiše u kojima se infiltracioni kapacitet tla može donekle oporaviti. Pored toga, ne samo da prirodno

zemljište ima veoma promenljiv sastav, već su i vrste pokrivača veoma raznorodne. Iz ovih razloga ne postoje modeli infiltracije koji mogu da tačno opišu sve uslove na terenu, pa se u hidrologiji često koriste metode koje će dati prihvatljive procene infiltracije tokom padavina.

5.3.2 Merenje infiltracije

Instrument kojim se meri intenzitet infiltracije naziva se *infiltrimetar*. On se sastoji od metalnog cilindra otvorenog s donje i gornje strane koji se vertikalno utiskuje u tlo. U jednoj varijanti u njega se naliva voda tako da se održava konstantan nadsloj, a meri se količina vode koja se doliva kroz vreme. Na taj način se dobija kumulativna infiltracija. U drugoj varijanti voda se nalije i meri se opadanje nivoa iznad površine zemlje kroz vreme.

5.3.3 Proračun infiltracije

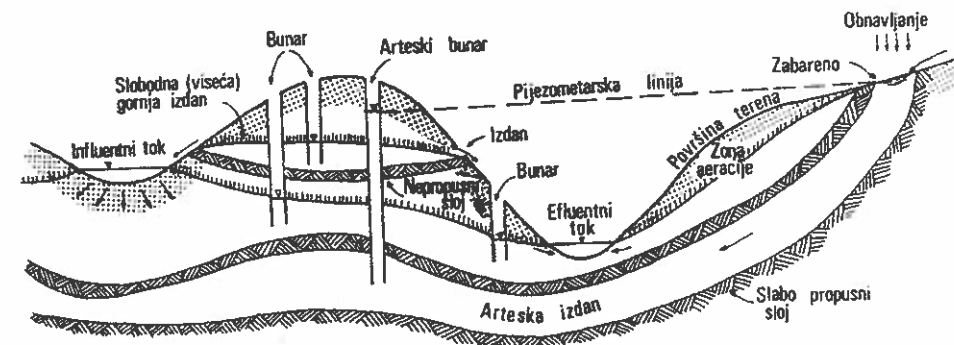
Intenzitet infiltracije vode u tlo za dati intenzitet padavina i u datim uslovima prethodne vlažnosti tla se može teorijski odrediti primenom Ričardsove jednačine (5.11) uz odgovarajuće početne i granične uslove. Međutim, za mnoge realne situacije analitičko rešavanje Ričardsove jednačine je veoma komplikovano i neophodna je primena numeričkih metoda rešavanja.

U praktičnoj hidrologiji obično je potrebno da se procesi u ciklusu oticaja procene na širim područjima, tj. na nivou sliva. Zato su razvijene mnoge metode za rešavanje ovog problema u okviru zadataka u kojima treba proceniti oticaj od padavina. Metode za procenu infiltracije u standardnim primenama se obično zasnivaju na uprošćenim teorijskim postavkama (kao što je metoda Green-Ampt), ili na empirijskim relacijama (npr. Hortonova jednačina infiltracije). Pored približnih metoda koje su namenjene samo za procenu infiltracije, u modeliranju oticaja koriste se i empirijske metode kojima se procenjuju ukupni gubici oticaja (infiltracija, intercepcija, zadržavanje u površinskim depresijama). U tim metodama najčešće se pretpostavlja da najveći deo gubitaka čini infiltracija. S obzirom da veći deo upijene vode učestvuje u formiranju oticaja, koncept proračuna „gubitaka“ nema solidnu fizičku osnovu. Ipak, uz pažljivu primenu i poznavanje ograničenja mogu se dobiti korisni i prihvatljivi rezultati (Brutsaert, 2005). Ove empirijske metode za proračun ukupnih gubitaka su prikazane u poglavlju 9.2.

5.4 Podzemne vode

5.4.1 Izdani

Proceđivanje infiltrirane vode u dubinu tla prihranjuje podzemne vode. S obzirom da se tlo obično sastoji od više slojeva različitih karakteristika, različite su i mogućnosti za strujanje podzemne vode i njeno zadržavanje u tlu. Zona tla zasićena vodom se može prostirati do velikih dubina, ali što je veća dubina, to je stenski materijal zbijeniji i manja je mogućnost da sadrži vodu. Na taj način, zbijeni i nepropusni slojevi



Slika 5.10. Shematski prikaz izdani podzemnih voda sa slobodnom površinom i pod pritiskom (izvor: Jovanović i Radić, 1990).

tla zaustavljaju dalje proceđivanje vode, pa se podzemna voda ređe nalazi na većim dubinama (Lynsley i sar., 1982).

Slojevi tla koji se sastoje od materijala čija je propusnost dovoljna da obezbede dovoljne količine vode na izvorima i u bunarima nazivaju se *vodene izdani* ili *akviferi* (Todd & Mays, 2004). Koriste se i sinonimi, kao što su vodonosne formacije ili rezervoari podzemnih voda. Takve formacije mogu i da propuštaju i da zadrže vodu, a tipičan primer su aluvijalne formacije sastavljene od nekonsolidovanog peska i šljunka. Vodene izdani mogu da budu ograničene s donje ili gornje strane relativno nepropusnim slojevima. Donji nepropusni sloj se naziva *podina*, a gornji *krovina*. Granit je primer nepropusnog materijala koji niti sadrži vodu niti može da je propusti. Relativno nepropusni slojevi gline mogu da sadrže vodu, ali je teško propuštaju pa nisu izdašni. Slojevi slabije propusnosti koji usporavaju proceđivanje, ali mogu da sadrže značajne količine vode, kao što su peskovite gline, nazivaju se *akvitardima*. Kroz veoma porozne slojeve voda se brzo procedi pa su oni slabo vododrživi.

Vodne izdani se dele na izdani sa slobodnom površinom i izdani pod pritiskom u zavisnosti od toga gde se nalazi pijezometarski nivo podzemnih voda (slika 5.10). *Izdani sa slobodnom površinom* ili *freatske izdani* su one sa čije se gornje strane nalazi nezasićena zona i koje nisu ograničene gornjim nepropusnim slojem, a pritisak vode na nivou podzemnih voda je jednak atmosferskom. U ovim izdanima nivo podzemnih voda se menja u zavisnosti od prihranjivanja, oticaja i eksploatacije. Na slici 5.10 je prikazan i specijalan slučaj slobodne ili viseće izdani koja se može javiti ako u nezasićenoj zoni postoji nepropusni sloj ograničene površine (npr. proslojci gline u aluvijalnom nanosu). Ove izdani daju male količine vode, pa snabdevanje vodom iz njih može biti sa prekidima. *Izdani pod pritiskom* ili *artenske izdani* su one koje su ograničene gornjim nepropusnim slojem i koje se nalaze pod pritiskom većim od atmosferskog. Arteski bunari su bunari postavljeni u takvu izdan. U njima će se nivo vode izdići iznad gornjeg nepropusnog sloja (krovine). Ako je pijezometarski nivo vode u artesknoj izdani iznad terena, voda će iz bunara isticati pod pritiskom većim od atmosferskog. Iako se izdani pod pritiskom mogu prihranjivati sa površine terena gde se pojavljuje kro-

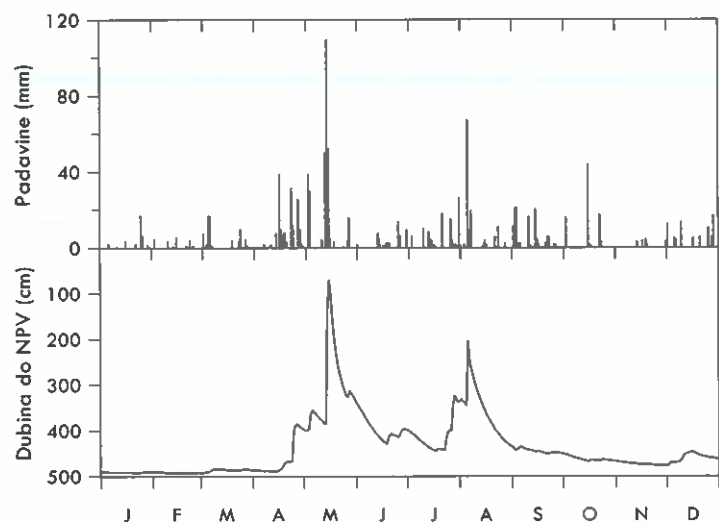
vina (videti sliku 5.10), promene nivoa vode u arteskim bunarima su prevashodno posledica promene pritiska a ne promene zapremine izdani.

Hidrogeološki sliv ili sliv podzemne vode se definiše kao hidrogeološka jedinica sastavljena od jedne ili više povezanih izdani (Todd & Mays, 2004). Takav sliv može, ali ne mora, da se podudara sa topografski određenim slivom na površini terena. Na primer, u dolinama između planina hidrogeološki sliv može da zauzme samo centralni deo topografskog sliva, dok u krečnjačkim predelima ova dva sliva mogu zauzimati potpuno različite oblasti.

U zoni zasićenoj podzemnom vodom od najvećeg značaja je razmatranje prisutne količine vode, kao i količine koja bi se mogla zahvatiti. Tako se pod *specifičnom izdašnošću* smatra odnos zapremine vode koja se može slobodno procediti iz zasićene porozne sredine i ukupne zapremine uzorka tla (Lynsley i sar., 1982). Ova vrednost je uvek manja od poroznosti, a zavisi od krupnoće čestica tla. Specifična izdašnost tla sa finijim česticama će biti manja od one sa krupnijim. Tako glina ima znatno manju specifičnu izdašnost od peska uprkos većoj poroznosti.

5.4.2 Prihranjivanje i pražnjenje podzemnih voda

Padavine koje se upijaju u zemljište i perkolacijom se kreću ka podzemnim vodama glavni su snabdevač vodenih izdani. Na slici 5.11 prikazano je poređenje nivoa podzemnih voda i padavina na jednoj lokaciji, gde se uočava direktna povezanost ove dve veličine. U oblastima u kojima je zemljište veoma propusno ili je nivo podzemnih voda visok, perkolacija znatno doprinosi prihranjivanju podzemnih voda. Obrnuto, u aridnim oblastima sa malim godišnjim količinama padavina, nivoi podzemne vode su duboki i ne može se očekivati njihovo značajno prihranjivanje. U tom slučaju će procurivanje iz površinskih voda (reka i jezera) prihranjivati podzemne vode. Vodotokovi



Slika 5.11. Padavine i nivoi podzemnih voda kod glavne meteorološke stanice Valjevo tokom 2014. godine.

koji na taj način gube vodu nazivaju se *influentni* vodotokovi. To su najčešće privremeni tokovi koji imaju vodu samo posle većih padavina, a presušuju tokom dužih beskišnih perioda jer perkolacija ka podzemnim vodama iscrpi svu njihovu vodu.

U prirodnim uslovima, pražnjenje rezervi podzemnih voda se odvija na nekoliko načina. Vodotokovi koji presecaju nivo podzemnih voda primiće taj podzemni oticaj. Ovi vodotokovi se nazivaju *efluentni*. Većina stalnih površinskih tokova spada u ovu kategoriju. Ako nivo podzemne vode preseca površinu terena, doći će do formiranja koncentrisanog izvora ili do prostog izbijanja vode na površinu, odakle će ona ispariti. Takođe, ako je nivo podzemne vode u ravničarskim predelima blizu površine terena, ona može da isparava i da se troši na transpiraciju iz kapilarne trake, naročito ako vegetacija ima izrazito duboke korene sisteme (tzv. freatofiti; Lynsley i sar., 1982). Ovakav gubitak podzemne vode može biti značajan. Usled dugotrajnih kiša ili topljenja snega, tlo može duže vreme biti zasićeno u potpunosti, a na površini terena se može formirati nadsloj vode. Tada govorimo o plavljenju podzemnim vodama. Pražnjenje rezervoara podzemnih voda je u određenoj ravnoteži sa prihranjivanjem i stanjem zapremine podzemnih voda. U sušnim periodima, kada se snizi nivo podzemnih voda, prirodno pražnjenje izdani se smanjuje ili čak prestaje.

Na osnovu prethodnog se može zaključiti da najveći deo vode koji perkolacijom dospeva do podzemnih voda pronalazi svoj put do rečne mreže. Posle nekog vremena po prestanku padavina, smatra se da ceo protok vode u rekama potiče iz podzemnih voda. Drugim rečima, kretanje vode kroz tlo, koje je sporo i u prostornom smislu veoma neravnomerno zbog heterogenih karakteristika tla, obezbeđuje stalan i sporo promenljiv *bazni protok* u efluentnim vodotokovima. O kome će biti reči u poglavlju 6.1.2. Zbog toga je oticaj iz podzemnih voda duž rečnih dolina jedan od ključnih elemenata u izučavanju ciklusa oticaja.

5.4.3 Merenja podzemnih voda

Merenje podzemnog i potpovršinskog protoka nije moguće osim ako se podzemne vode ne pojave na površini kao izvori. Tada se protok može meriti prostom volumetrijskom metodom. Ono što se može meriti jeste nivo podzemnih voda sa slobodnom površinom, odnosno pijezometarske kote za podzemne vode pod pritiskom. Ovi nivoi se osmatraju u bunarima sa plovcima na površini vode koji su povezani sa sistemom za beleženje na površini terena, ili se nivo može meriti pomoću sondi koje se spuštaju u bunare i koje daju signal pri nailasku na vodu. Brzine kretanja podzemnih voda mogu se odrediti uz pomoć trasera. Čest traser je obična so. Određena količina trasera se upušta u uzvodni bunar, a meri se vreme za koje će stići do nizvodnog bunara. Na ovaj način se dobija stvarna brzina podzemnih voda, a ne prividna ili Darsijeva. Na isti način može se odrediti i disperzija zagađujućih materija u transportu podzemnim vodama.

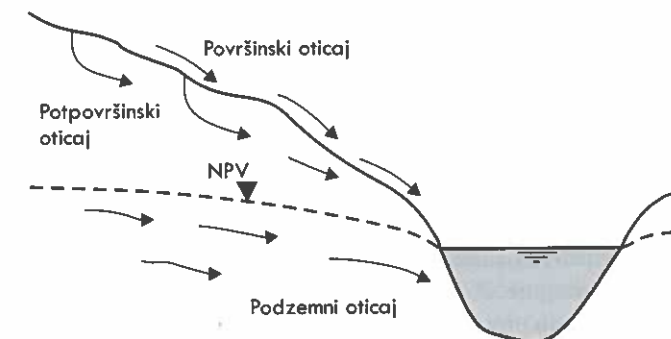
6 OTICAJ

6.1 Nastanak oticaja i protoka u vodotokovima

Oticaj je deo padavina koji stiže do vodotoka tečenjem po površini terena ili podzemnim putem, a potom kroz mrežu vodotoka dolazi do izlaznog profila sliva. Deo hidrološkog ciklusa od trenutka kada padavine dospeju do površine zemlje do trenutka kada ta voda ponovo dođe do mora i okeana oticanjem i putovanjem kroz mrežu vodotoka, ili direktno do atmosfere putem evapotranspiracije, naziva se *ciklus oticaja* (Lynsley i sar., 1982; Jovanović, 1989).

6.1.1 Komponente oticaja

Ukupan oticaj na izlaznom profilu sliva sastoji se od vode koja različitim putevima stiže do vodotoka. Sa tog gledišta, oticaj koji stiže do vodotoka može biti površinski, potpovršinski ili podzemni (slika 6.1). Količine i dinamika ovih komponenti oticaja mogu da budu veoma različite u zavisnosti od uslova pod kojim se formira oticaj. Dok površinski oticaj može da se formira relativno brzo po početku padavina i da relativno brzo dovede do povećanja protoka u vodotoku, potpovršinski i podzemni oticaj odvijaju se, po pravilu, znatno sporije nego površinski oticaj zbog sporijeg kretanja kroz tlo.



Slika 6.1. Komponente oticaja: površinski, potpovršinski i podzemni oticaj (NPV = nivo podzemne vode).

Površinski oticaj predstavlja tečenje vode po površini terena (odnosno po padinama sliva) ka vodotokovima. Površinsko tečenje vode u vidu ravanskog tečenja na prirodnim slivovima je moguće samo na kratkim rastojanjima od mesta gde padavine dospevaju na površinu zemlje (Lynsley i sar., 1982) jer je tečenje vode po površini u tankom sloju moguće samo na glatkim površinama. U prirodi, teren uslovljava formiranje privilegovanih puteva vode i koncentrisanje oticaja, čime se stvara mreža dreniranja sliva, od koje nastaje i rečna mreža. Tečenje vode po površini terena je relativno brzo, pa površinski oticaj brzo dospeva do vodotoka.

Količina površinskog oticaja preko prirodnih propusnih terena je generalno veoma mala ukoliko je intenzitet padavina manji od kapaciteta tla za upijanje vode (infiltracionog kapaciteta tla). U izuzetno suvim uslovima površinski oticaj neće dospeti do vodotoka, već će se sva voda upiti u tlo, odakle ili isparava ili se proceđuje u dublje slojeve ka podzemnoj vodi. Površinski oticaj može i da se zadrži u površinskim depresijama, odakle takođe isparava ili se upija u tlo. Na slivovima sa vegetacijom, infiltracioni kapacitet tla je veliki i površinski oticaj može da „nestane“ ako ga biljke potroše na transpiraciju.

Pri manjim ili umerenim padavinama površinski oticaj sa prirodnih terena se može formirati samo na nepropusnim ili vodom zasićenim delovima sliva. To znači da je udeo površinskog oticaja u ukupnom oticaju značajan samo pri većim i intenzivnijim padavinama. Kada su u pitanju gradski uslovi sa većim nepropusnim površinama, površinski oticaj dobija veći značaj u ukupnom oticaju.

U dosadašnjem razvoju hidrologije prirodnih slivova uočeni su različiti mehanizmi kojima može doći do oticanja na površini terena. Istorijski gledano, najpre se smatralo da će do površinskog oticanja jedino doći ako intenzitet kiše premaši infiltracioni kapacitet tla. Ovakav oticaj se naziva *oticaj usled prevazilaženja infiltracionog kapaciteta zemljišta* ili *Hortonov površinski oticaj*². Međutim, ovakav način formiranja oticaja nije jedini moguć i zapravo se retko sreće na prirodnim slivovima u vlažnim i umerenim klimatima (Arnell, 2002). On se češće može sresti na slivovima u suvim (aridnim) klimatima, u kojima su kišne sezone kratke ali sa kišama velikog intenziteta, ili na nepropusnim površinama urbanih slivova. U ovakvim situacijama oticaj ne zavisi mnogo od prethodnog stanja vlažnosti na slivu jer je ono obično suvo, već od količine padavina, njihovog prostornog rasporeda i vrste zemljišnog pokrivača na slivu.

Ako je zemljište zasićeno vodom i ne može da primi nove količine vode usled novih padavina, tada će do površinskog oticanja doći bez obzira na intenzitet kiše. Ovakav oticaj se naziva *oticaj usled zasićenja*. On se javlja pri dnu padina, bliže vodotoku, gde se potpovršinski tokovi približavaju površini terena. Tokom kišne epizode udeo zasićenog tla na slivu u odnosu na nezasićeno se povećava sa infiltracijom vode u tlo i povećanjem vlage u tlu. Time se povećava i deo sliva koji doprinosi oticaju. Širenje zasićenih zona odnosno delova sliva koji doprinose oticaju zavisi od topografskih i geoloških karakteristika sliva, kao i od vegetacije. Odgovor sliva na padavine sa zasićenog dela sliva je brz ne samo zbog brzog površinskog oticaja, već i zato što je potpovršinski oticaj u zasićenom tlu relativno brz zbog većih koeficijenata filtracije u uslovima zasićenosti. Dakle, sa širenjem zasićenih zona povećavaju se brze komponente u ukupnom

² Ovaj mehanizam nastanka površinskog oticaja nazvan je prema čuvenom američkom hidrologu R.E. Hortonu i njegovom radu iz 1933. godine (Horton, 1933; Beven, 2001).

oticaju. Stanje vlage u tlu se menja i između kišnih epizoda, pa će odgovor sliva na određenu količinu padavina zavisiti i od prethodne vlažnosti na slivu, a naročito od stepena zasićenja tla.

Površinski oticaj može da nastane i usled *povratnog potpovršinskog toka*. Ako potpovršinski oticaj naiđe na nepropusne slojeve tla ili nekakvu drugu barijeru, on se može pojaviti na površini kao površinski oticaj.

Potpovršinski oticaj nastaje upijanjem vode u zemljište i njenim lateralnim kretanjem kroz slojeve tla iznad nivoa podzemnih voda. I on može da ima različite oblike, koji se pre svega ogledaju u brzini oticanja.

Potpovršinski oticaj kroz nezasićenu sredinu se odvija u pravcu nagiba terena pod uticajem gravitacije. Ovakav oticaj je spor zbog niskog koeficijenta filtracije u nezasićenoj sredini. Takav može biti i oticaj od topljenja snega.

Potpovršinski oticaj kroz zasićenu sredinu je generalno brži od onog u nezasićenoj sredini zbog većeg koeficijenta filtracije. Potpovršinski oticaj je najbrži ako u tlu ima velikih šupljina i pukotina, što je karakteristično za karstna područja. Oticaj koji teče takvim privilegovanim putevima, ili uz granicu sa čvrstom stenom, naziva se i privilegovani oticaj (Arnell, 2002).

Udeo potpovršinskog oticaja u ukupnom oticaju zavisi od fizičkih karakteristika sliva. Tanak površinski sloj zemljišta iznad čvrste stene daće značajne količine potpovršinskog oticaja, dok je tlo homogenih karakteristika u pogledu vodopropusnosti povoljno za perkolaciju (proceđivanje) ka podzemnim vodama (Lynsley i sar., 1982). Potpovršinski oticaj pri umerenim kišama može da nosi veće količine vode od površinskog oticaja i da postane značajna komponenta oticaja u vodotokovima.

Podzemni oticaj predstavlja dreniranje vode iz zaliha podzemnih voda ka vodotoku. To je deo oticaja koji se tokom ili nakon padavina proceđio u dublje slojeve tla do podzemnih voda, a potom iz podzemnih voda dospeva do vodotoka. Ovo je praktično moguće samo ako nivo podzemnih voda preseca korito vodotoka (slika 6.2). Količina podzemnog oticaja zavisi od zapremine vode koja se nalazi u akviferima i od nivoa podzemnih voda sa slobodnom površinom. Podzemni oticaj će biti veći iz većih zaliha podzemnih voda i obrnuto, ali ova veza nije linearna.

Podzemni oticaj je spor oticaj. Zbog malih brzina tečenja, doprinos podzemnih voda vodama u vodotokovima veoma kasni u odnosu na površinski i potpovršinski oticaj i obično stiže do vodotoka znatno posle prestanka padavina, tako da obezbeđuje vodu u vodotokovima i u beskišnom periodu (ovo kašnjenje može iznositi i nekoliko godina). Podzemni oticaj može biti brži ako se nivo podzemnih voda nalazi plitko ispod površine terena, što je slučaj sa oblastima blizu rečnih tokova. U takvim situacijama padavine i infiltracija mogu brzo da prihranjuju podzemne vode i da im podignu nivo. Tada se povećava i nagib pijezometarske linije na kontaktu sa vodotokom i dolazi do bržeg dreniranja podzemnih voda u vodotok.

Oticaj od topljenja snega. U planinskim oblastima i umereno hladnim klimatima topljenje snega i leda ima veliki uticaj na hidrološki ciklus. Proces topljenja snega doprinosi potpovršinskom oticaju i može dovesti do podizanja nivoa podzemnih voda i zasićenja tla. U nekim slučajevima to može da znatno doprinese i površinskom oticaju. Količina oticaja usled topljenja snega zavisi od zaliha vode zarobljene u snegu (tj. od vodnog ekvivalenta snežnog pokrivača), brzine topljenja snega i od karakteristika

snežnog pokrivača (od njegove zbijenosti, odnosno gustine i starosti). Topljenje snega je različito i u različitim sezonama zbog ugla pod kojim Sunčevo zračenje deluje na sneg i zbog temperature vazduha.

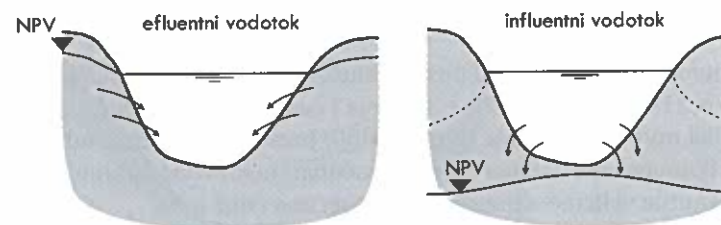
Eksperimentalna istraživanja ciklusa oticaja pomoću trasera. Traserska ispitivanja pomoću izotopa ili drugih trasera se sprovode sa ciljem da se odrede starost, poreklo i putevi vode na slivovima ka vodotokovima i da se na taj način doprinese boljem razumevanju procesa formiranja oticaja (Buttle, 2005). Ovakva ispitivanja na malim slivovima su pokazala da najveći deo brzog oticaja stiže do izlaznog profila sliva podzemnim putem, kao i da veći deo hidrograma brzog oticaja u okolini maksimalne ordinate potiče od vode koja se nalazila u tlu pre razmatrane kišne epizode i koju je novi potpovršinski oticaj „istisnuo“. Voda iz razmatranog kišnog događaja je više zastupljena u opadajućem delu hidrograma. Prema ovim ispitivanjima, za prolazak vode kroz potpovršinske slojeve treba nekoliko nedelja, a za podzemne vode još više. Na urbanizovanim slivovima i na područjima sa stalnim snegom i ledom, učešće vode iz tla pre razmatrane epizode je manje, dok je učešće vode iz razmatrane epizode veće. Slično tome, pri topljenju snega na šumovitim slivovima u vlažnim umerenim klimama učešće vode iz razmatrane epizode je veće zahvaljujući većem površinskom oticaju sa smrznutog tla tokom zime i značajnom udelu oticaja sa zasićenih dolinskih delova sliva.

6.1.2 Bazni i direktni oticaj

Uloga pojedinih komponenti o kojima je bilo reči u prethodnom odeljku u formiranju ukupnog oticaja može biti veoma različita. Veoma je teško, ako ne i nemoguće, da se definiše način na koji se oticaj formira u svakom konkretnom slučaju. Iz tog razloga je uobičajeno da se ukupan oticaj deli prema brzini oticanja. Brzi deo ukupnog oticaja koji je direktna posledica padavina naziva se *direktni oticaj*, dok blago promenljivi protok u beskišnom periodu koje čine spore komponente oticaja predstavlja *bazni oticaj*. Direktni oticaj se sastoji od površinskog oticaja i brzog potpovršinskog oticaja, dok bazni oticaj potiče od sporog potpovršinskog i od podzemnog oticaja.

S obzirom da spore komponente koje čine bazni oticaj stižu u vodotokove sa velikim zakašnjenjem u odnosu na kišu od koje su nastale, one su te koje obezbeđuju da se u vodotokovima nađu određene količine vode i u periodu između kišnih epizoda. U dužim sušnim periodima bazni oticaj se praktično sastoji samo od podzemnog oticaja, odnosno od padavina koje su se infiltrirale u tlo i ponirale do podzemnih voda.

Ako je nivo podzemnih voda takav da preseca korito vodotoka, podzemni oticaj se drenira u korito vodotoka (slika 6.2 levo), pa se kaže da podzemne vode prihranjuju vodotok. Međutim, ako je nivo podzemnih voda ispod korita vodotoka (slika 6.2 desno), tada podzemni oticaj neće dospeti u korito, već će se voda iz korita infiltrirati u tlo i prihranjivati podzemne vode. U ovom slučaju vodotok može i da presuši. Vodotok koji prima podzemni oticaj naziva se *efluentni vodotok*, a onaj koji prihranjuje podzemne vode naziva se *influentni vodotok*. Jedan vodotok ne mora stalno da bude efluentan ili influentan, već može povremeno da menja status u zavisnosti od uslova na slivu.



Slika 6.2. Odnos nivoa podzemnih voda (NPV) i korita vodotoka. Levo: efluentni vodotok, koji prima podzemni oticaj kad NPV preseca korito; desno: influentni vodotok, koji prihranjuje podzemne vode kada je NPV ispod korita.

6.1.3 Efektivne padavine i gubici

Za deo padavina koji se pretvori u oticaj na izlaznom profilu sliva u razmatranom vremenu koristi se i termin *efektivne padavine* ili *sloj oticaja*. Preostali deo padavina koji ne dospe do vodotoka i izlaznog profila sliva naziva se *gubicima*. Radi se o gubicima sa gledišta oticaja u posmatranom vremenu, jer voda zapravo ne može da se izgubi u hidrološkom ciklusu. U opštem slučaju, gubitke čini voda koja se zadržava na vegetaciji (proces intercepcije) ili u površinskim depresijama i voda koja je isparila ili su je iskoristile biljke (evapotranspiracija). Ako se posmatra kraći period koji obuhvata jednu kišnu epizodu i talas oticaja, tada se i za infiltraciju može smatrati da je gubitak jer za tako kratko vreme upijena voda nije stigla podzemnim putem do vodotoka.

6.2 Tečenje u vodotoku

Kada površinski, potpovršinski i podzemni oticaj stignu do vodotoka, oni u njima formiraju ukupni oticaj koji će putovati nizvodno kroz rečnu mrežu. Rečnu mrežu čine svi površinski (otvoreni) tokovi na jednom slivu. Po pravilu, u višim delovima sliva dominiraju bujični vodotokovi koje odlikuju veliki podužni nagibi i koji mogu da budu povremenog ili stalnog karaktera. Varijacije protoka u njima mogu da budu značajne, a velike vode su im nagle i kratkotrajne. Idući od gornjih tokova ka izlaznom profilu sliva, podužni nagibi vodotoka se smanjuju, rečna korita postaju razuđena, a doline šire. Varijacije protoka se takođe smanjuju. U donjem delu sliva podužni nagibi reka su najmanji, a doline su najšire. Pored promenljivog podužnog nagiba, prirodne vodotoke karakteriše nepravilan oblik poprečnog preseka i neprizmatično korito (tj. korito čiji se poprečni presek menja duž toka).

Složenosti tečenja vode u prirodnim vodotokovima doprinosi i promena geomorfoloških karakteristika rečnog korita kroz vreme. Pod ovim karakteristikama se podrazumevaju podužni profil toka, poprečni profili i oblici korita u horizontalnoj projekciji (Jovanović, 2008). Te promene se dešavaju zbog erozionih procesa u slivu, pri čemu u gornjim delovima sliva dolazi do produkcije nanosa koji se transportuje kroz rečnu mrežu, da bi se sa smanjenjem nagiba taložio u donjim delovima sliva. Lokalni uslovi (npr. lokalno povećanje ili smanjenje brzine vode, ili nepovoljan geološki sastav tla) takođe mogu da dovedu do erozije ili zasipanja pojedinih deonica, pa se na njima poprečni profili mogu značajno menjati u smislu da pri istom protoku nivo vode može biti različit.

6.2.1 Vrste tečenja u otvorenom toku

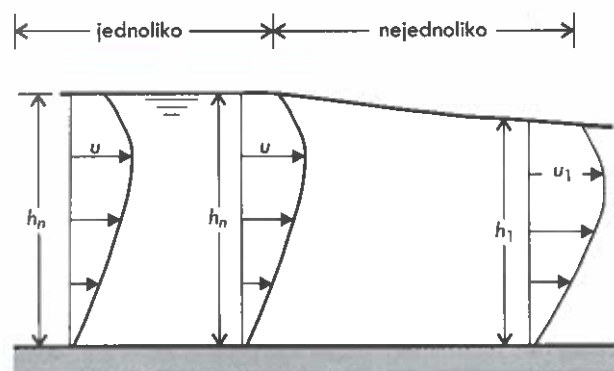
Za tečenje vode u otvorenim tokovima u opštem slučaju važe hidrodinamički zakoni, odnosno jednačine održanja mase, količine kretanja i energije, koji se izučavaju u mehanici fluida i hidraulici otvorenih tokova (Ivetić, 2000; Jovanović, 2008; Prodanović, 2013; Kapor, 2015). Pomoću ovih zakona mogu se računati nivoi vode, brzine, protok, energija i druge relevantne veličine u poprečnim presecima i duž toka.

Postoji više podela tečenja u otvorenim tokovima. Ako se razmatra promenljivost brzina i dubina vode duž vodotoka, tečenje u otvorenim tokovima može biti jednoliko ili nejednoliko. Jednoliko tečenje je tečenje sa istom dubinom i istim rasporedom brzina u svim presecima toka (slika 6.3). Ovakvo tečenje bi bilo moguće samo na dugačkim deonicama sa istim poprečnim presekom korita i istom hrapavošću duž celog toka. Ono se retko ostvaruje u prirodnim vodotokovima, ali predstavlja koristan koncept za izučavanje tečenja u otvorenim tokovima. Tečenje kod kojeg se dubine i brzine vode menjaju iz preseka u presek duž toka naziva se nejednoliko ili promenljivo tečenje. Promena dubine vode duž toka može biti blaga ili nagla, pa se govori o blago promenljivoj ili naglo promenljivoj tečenju.

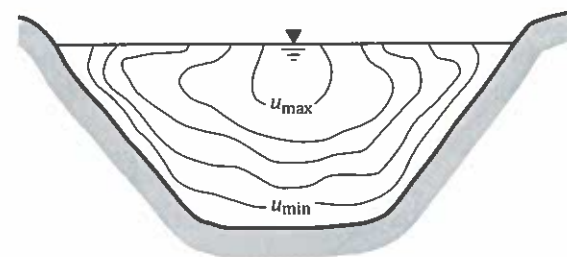
Ako se posmatra promenljivost dubina i brzina vode u određenoj tački toka kroz vreme, tečenje može biti ustaljeno ili neustaljeno. U prirodnim vodotokovima tečenje se može smatrati približno ustaljenim osim u situacijama nailaska talasa velikih voda, kada se dubine vode u određenom preseku brzo menjaju zbog prolaska talasa, ili pri naglom ispuštanju vode iz akumulacija. U određenim hidrotehničkim zadacima (npr. u projektovanju regulacionih radova na rekama) hidraulički proračuni se najčešće sprovode uz pretpostavku da je tečenje ustaljeno.

Tečenje fluida se generalno deli na laminarno i turbulentno u zavisnosti od odnosa sile inercije i viskoznosti, tj. u zavisnosti od Reynoldsovog broja. Međutim, u otvorenim tokovima koji su od interesa za inženjerske zadatke, laminarno tečenje se veoma retko javlja, pa se praktično uvek može pretpostaviti turbulentno tečenje.

Još jedna važna podela tečenja je na mirno i burno (ili silovito) tečenje. U mirnom tečenju brzine toka su male, a dubine veće. S druge strane, u burnom tečenju brzine toka su velike, a dubine male. O mirnom i burnom režimu tečenja više se govori u odeljku 6.2.3.



Slika 6.3. Jednoliko i nejednoliko tečenje na deonici.



Slika 6.4. Tipičan raspored brzina u poprečnom preseku toka (prema Bedient i sar., 2008)

U najvećem broju inženjerskih zadataka tečenje u vodotoku se izučava kao linijsko ili jednodimenzionalno tečenje (osrednjeno po poprečnom preseku), a u složenijim slučajevima kao ravansko ili dvodimenzionalno tečenje (osrednjeno po dubini). Po pravilu, prostorno ili trodimenzionalno tečenje je rezervisano za najsloženije probleme, kao npr. za rečna ušća (Đorđević, 2013).

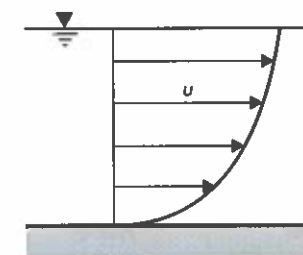
6.2.2 Raspored brzina u poprečnom preseku, protok i srednja brzina

Brzina vode u poprečnom preseku otvorenog toka nije konstantna, a njen raspored zavisi od više faktora. Na taj raspored najviše utiče oblik poprečnog preseka toka, nepravilne promene oblika korita, hrapavost korita, kao i krivudanje rečnog toka. Na slici 6.4 prikazan je primer rasporeda brzina u poprečnom preseku toka. U opštem slučaju, maksimalna brzina se obično javlja malo ispod površine vode i pri sredini (tj. matici) toka na dubinama od 5% do 25% pune dubine (Massey, 1983). Brzine opadaju ka čvrstoj granici, na kojoj su jednake nuli. Srednja brzina u poprečnom preseku obično iznosi oko 85% brzine na površini i javlja se na 60% dubine ispod površine vode.

U turbulentnom režimu tečenja koji je karakterističan za otvorene tokove, raspored brzina po dubini u opštem slučaju ima logaritamski oblik (Jovanović, 2008):

$$u = \frac{u_*}{\kappa} \ln \left(\frac{z}{z_0} \right)$$

gde je u_* smičuća brzina (pokazatelj smičućeg napona), $\kappa = 0.4$ je fon Karmanova konstanta, z je rastojanje od dna, a z_0 rastojanje na kome je brzina efektivno jednaka nuli (okvirno odgovara hrapavosti dna). Logaritamski raspored brzina po dubini prikazan je na slici 6.5.



Slika 6.5. Logaritamski raspored brzina po dubini toka.

Za poprečni presek toka u kome su strujnice pravolinijske i paralelne, svakoj elementarnoj površini dA poprečnog preseka odgovara neka brzina vode u . Protok vode Q kroz taj poprečni presek predstavlja integral brzine u po poprečnom preseku A :

$$Q = \int_A u \, dA \quad (6.1)$$

Srednja brzina v u poprečnom preseku se dobija deljenjem protoka sa površinom poprečnog preseka:

$$v = \frac{Q}{A} \quad (6.2)$$

6.2.3 Energija vode u preseku otvorenog toka i režimi tečenja

Ako su strujnice toka približno pravolinijske i paralelne, onda u jednom poprečnom preseku važi hidrostatički raspored pritisaka (linearni rast pritisaka od površine vode ka dnu), osim kod izuzetno strmih korita. Pod tim uslovima, energija po jedinici težine vode u poprečnom preseku toka je tada:

$$E = \Pi + \frac{v^2}{2g} = z + h + \frac{v^2}{2g}$$

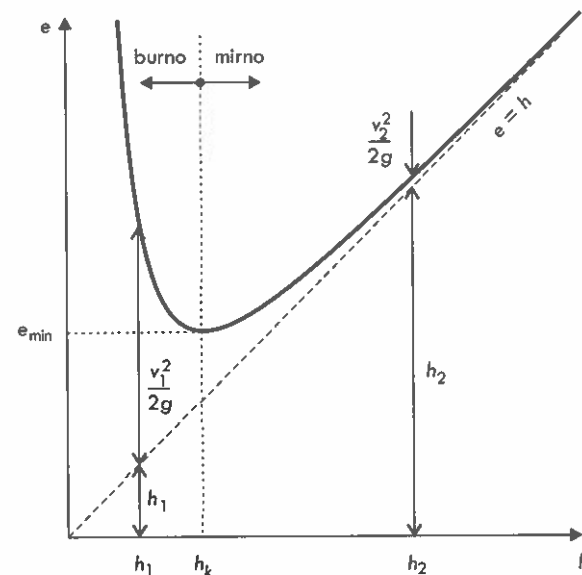
gde je Π pijezometarska kota, tj. kota nivoa vode iznad referentne ravni, a v srednja brzina u razmatranom preseku. Pijezometarska kota Π predstavlja potencijalnu energiju, a $v^2/(2g)$ kinetičku energiju toka (obe po jedinici težine vode). Pijezometarsku kotu Π u nekom preseku čine kota dna korita z i dubina vode h ($\Pi = z + h$).

Specifična energija toka u nekom preseku se definiše kao energija po jedinici težine vode u odnosu na dno korita (tj. ukupna energija ako bi se u nekom preseku referentna ravan postavila na dno korita):

$$e = h + \frac{v^2}{2g}$$

Specifična energija se može shvatiti kao „lokalna“ energija vode u jednom poprečnom preseku, sastavljena od potencijalne energije h i kinetičke energije $v^2/(2g)$. Na slici 6.6 je prikazan dijagram promene specifične energije sa dubinom vode pri istom protoku kroz poprečni presek. Prava linija na ovom dijagramu predstavlja liniju $e = h$, tj. samo potencijalnu energiju, dok rastojanje između ove prave linije i krive specifične energije predstavlja kinetičku energiju $v^2/(2g)$. Imajući u vidu da se protok kroz poprečni presek može izraziti kao $Q = vA$, odnosno kao proizvod srednje brzine u poprečnom preseku v i površine poprečnog preseka A , jasno je da se isti protok može ostvariti kroz različite kombinacije brzine i dubine (tj. površine poprečnog preseka). Kao što dijagram na slici 6.6 pokazuje, što je dubina u preseku manja, to je brzina (i kinetička energija) veća; obrnuto, što je dubina veća, to je brzina (i kinetička energija) manja.

Funkcija specifične energije ima minimum za dubinu koja se naziva *kritična dubina*. Kritičnoj dubini h_k odgovara i kritična brzina v_k , a tečenje u takvim uslovima se na-

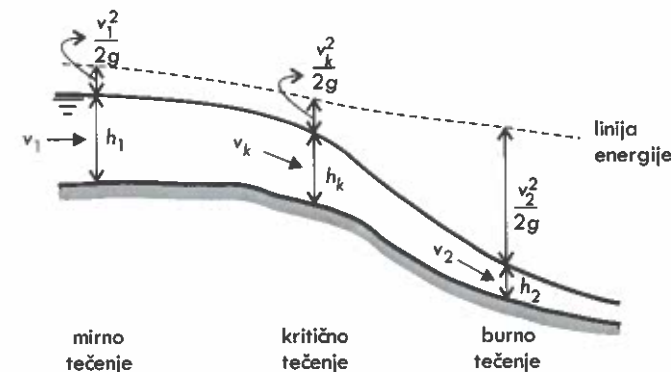


Slika 6.6. Dijagram specifične energije u preseku toka.

ziva kritično. Pri kritičnom tečenju Frudov broj je jednak jedinici ($Fr = 1$), čime se dobija jednačina za izračunavanje kritične dubine:

$$Fr = \frac{v^2 B}{gA} = \frac{Q^2 B}{gA^3} = 1$$

gde je B širina vodenog ogledala. Kritična dubina deli oblast mogućih rešenja gornje jednačine na dva različita režima tečenja. Kada su dubine u nekom preseku manje od kritične, a brzine veće od kritične, ostvaruje se burno tečenje ($Fr > 1$). Obrnuto, kada su dubine u preseku veće od kritične, a brzine manje od kritične, ostvaruje se mirno tečenje ($Fr < 1$). Na slici 6.6 zona malih dubina i velike kinetičke energije odgovara burnom tečenju, a zona velikih dubina i male kinetičke energije mirnom tečenju.



Slika 6.7. Ostvarivanje kritične dubine (h_k) na prelazu iz mirnog u buran režim tečenja.

Frudov broj Fr predstavlja odnos sila inercije i gravitacije. U mirnom režimu tečenja (kada je $Fr < 1$) brzine toka su male tako da manji poremećaj u tečenju može da se prenese uzvodno i da utiče na uzvodne uslove. S druge strane, u burnom tečenju (kada je $Fr > 1$) brzine toka su velike tako da se manji poremećaj ne može prostirati uzvodno, već putuje nizvodno sa vodenom strujom. Ako je $Fr = 1$, za tečenje se kaže da je kritično (slika 6.7).

6.2.4 Jednačina održanja energije duž toka

Na slici 6.8 prikazana je jedna deonica toka na kojoj su definisane osnovne hidrauličke veličine. Jednačina održanja energije vode između dva preseka toka glasi:

$$z_1 + h_1 + \alpha_1 \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + h_2 + \alpha_2 \frac{v_2^2}{2g} + \Delta E$$

gde je ΔE gubitak energije na razmatranoj deonici dužine L . Odnos $\Delta E/L$ predstavlja gubitak energije po jedinici dužine toka, odnosno nagib linije energije I_E :

$$I_E = \frac{\Delta E}{L}$$

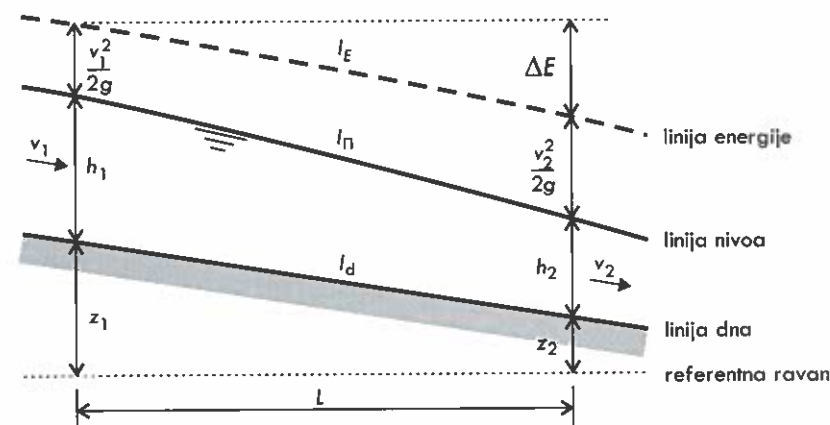
Zbog neravnomernosti brzine u poprečnom preseku, računanje kinetičke energije $v^2/(2g)$ na osnovu srednje brzine u poprečnom preseku može dati potcenjene vrednosti, pa se uz kinetičku energiju dodaje korektivni koeficijent α (koeficijent neravnomernosti brzine, koeficijent kinetičke energije ili Koriolisov koeficijent). Ovaj koeficijent se kreće od 1.03 do čak 1.6 za male i nepravilne prirodne tokove (Massey, 1983). Kada je ovaj koeficijent veliki, odnosno kada je raspored brzina u poprečnom preseku izrazito neravnomeran, linijski model tečenja nije preporučljivo koristiti.

6.2.5 Ustaljeno jednoliko i nejednoliko tečenje

Jednoliko tečenje je tečenje vode u prizmatičnom koritu konstantnog nagiba i konstantne hrapavosti sa jednakom dubinom duž celog toka. Pri tome i raspored brzina ostaje isti duž toka, pa je i srednja brzina u preseku konstantna duž toka. Linija nivoa tada je paralelna sa linijom dna, a takođe i sa linijom energije. Dakle, za jednoliko tečenje važi:

$$I_E = I_\Pi = I_d$$

Jednoliko tečenje je moguće samo na dugačkim deonicama na kojima nema uticaja uzvodnih ili nizvodnih graničnih uslova koji bi doveli do promene dubine duž toka, i to kada nema značajnih promena protoka (tj. tokom beskišnih perioda). Za određeni oblik poprečnog preseka korita, podužni nagib i hrapavost korita, pri datom protoku postoji samo jedna dubina za koju se može ostvariti jednoliko tečenje. Ta dubina se naziva *normalna dubina* (h_n). Takođe, nagib dna korita pri kome bi se jednoliko tečenje ostvarilo sa normalnom dubinom koja je jednaka kritičnoj dubini naziva se kritični nagib dna.



Slika 6.8. Definicije veličina u jednačini održanja energije za otvoreni tok.

Za jednoliko tečenje glavne hidrauličke veličine su povezane Šezi-Maningovom formulom:

$$Q = \frac{1}{n} AR^{2/3} \sqrt{I_d} \quad (6.3)$$

gde je Q protok vode, n Maningov koeficijent hrapavosti (u $m^{-1/3}s$), A površina poprečnog preseka vodotoka, R hidraulički radijus (količnik površine poprečnog preseka A i okvašenog obima O) i I_d nagib linije dna. Maningov koeficijent hrapavosti opisuje otpor korita tečenju i zavisi od karakteristika korita, odnosno od krupnoće materijala na dnu korita i od vegetacije. Njegove tipične vrednosti za otvorene tokove se mogu videti u poglavlju 9.4.

U *nejednolikom tečenju* dubine i brzine se menjaju duž toka usled promenljive geometrije korita (promenljivog poprečnog preseka, promenljivog nagiba ili postojanja neke prepreke) ili promenljive hrapavosti dna. Za isti protok postoji bezbroj kombinacija dubine i brzine u poprečnom preseku (što je veća dubina vode, to je brzina manja i obrnuto). Zbog promenljive dubine duž toka pri nejednolikom tečenju linija nivoa nije paralelna liniji dna. Takođe, zbog promenljive brzine duž toka, a time i promenljive kinetičke energije, linija energije nije paralelna ni sa linijom nivoa ni sa linijom dna. Za nejednoliko tečenje zato važi:

$$I_E \neq I_\Pi \neq I_d$$

Takođe, u nekom preseku će se ostvariti mirno ili burno tečenje ako je dubina vode u njemu veća ili manja od kritične. Duž kanala može doći do prelaza iz mirnog u burno tečenje i obrnuto, ali se taj prelaz dešava naglo na kratkom rastojanju. Prelaz iz mirnog u burno tečenje je prikazan na slici 6.7, dok je prelaz iz burnog u mirno tečenje moguć samo kroz hidraulički skok.

Poznavanje dubine i brzine vode u pojedinim poprečnim presecima vodotoka je jedan od osnovnih zadataka hidraulike otvorenih tokova. Taj zadatak podrazumeva da treba odrediti liniju nivoa duž toka. Za blago promenljivo nejednoliko tečenje u priz-

matičnom koritu, jednačina održanja energije i jednačina održanja količine kretanja daju sledeću diferencijalnu jednačinu linije nivoa:

$$\frac{dh}{dx} = \frac{I_d - I_E}{1 - Fr}$$

gde je x koordinata usmerena u pravcu tečenja. Rešenje ove diferencijalne jednačine zavisi od odnosa nagiba linije dna i linije energije, kao i da li je tečenje mirno i burno. Tako je moguće da dh/dx bude i pozitivno i negativno, što daje više mogućih oblika linije nivoa (videti u knjigama Prodanovića (2013) i Katora (2015)). U gornjoj jednačini se takođe vidi da u slučaju kada je $I_E = I_d$, sledi da je $dh/dx = 0$, što znači jednoliko tečenje sa konstantnom dubinom. Ova jednačina se rešava numerički.

U nejednolikom tečenju, I_E se može proceniti pomoću Šezi-Maningove formule (6.3) uz zamenu nagiba linije dna nagibom linije energije. Dakle, za nejednoliko tečenje u koritu približno konstantnog preseka važi Šezi-Maningova formula u obliku:

$$Q = \frac{1}{n} AR^{2/3} \sqrt{I_E} \quad (6.4)$$

6.2.6 Neustaljeno tečenje

Neustaljeno tečenje u rečnoj mreži nastaje kao posledica formiranja talasa direktnog oticaja u periodima kada do vodotoka dospeva oticao od kiše ili topljenja snega. Na početku tih padavinskih epizoda formiraju se brze komponente oticaja koje izazivaju povećanje protoka u vodotokovima. Po prestanku kiše ili topljenja snega direktan oticao opada, dok sporo promenljivi bazni oticao nastavlja da lagano pristiže u vodotok. Talas koji je na taj način nastao propagira se nizvodno, a tokom putovanja on se rasplinjava (smanjuje se vršni protok, a povećava baza talasa). Ova transformacija talasa može nastati u većoj ili manjoj meri, u zavisnosti od promene oblika i podužnog nagiba korita. Do većeg rasplinjavanja će doći na deonicama gde vodotok ulazi iz brdskog predela u dolinu jer se tada smanjuje podužni nagib rečnog toka i širi korito reke, dok će na deonicama kanjonskog tipa rasplinjavanje biti minimalno. Potpuno rasplinjavanje talasa je moguće u prirodnim ili veštačkim jezerima, pod uslovom da ova jezera mogu da prime celu zapreminu talasa.

Proračun linijskog neustaljenog tečenja u otvorenim tokovima podrazumeva rešavanje sistema Sen-Venanovih jednačina (jednačine održanja mase i količine kretanja). Ovaj sistem parcijalnih diferencijalnih jednačina se rešava numerički uz određene početne i granične uslove. Pune Sen-Venanove jednačine opisuju tzv. dinamički talas, dok se izostavljanjem pojedinih članova mogu formirati i jednostavniji modeli, kao što su kinematički talas i difuzioni talas. Uprošćene metode transformacije talasa u rečnoj mreži, koje se zasnivaju samo na jednačini kontinuiteta (tj. na bilansu voda), često se nazivaju „hidrološkim“ metodama. O ovim metodama se više govori u poglavlju 9.4.

6.3 Hidrološka merenja na otvorenim tokovima

Pod pojmom *hidrometrija* najčešće se podrazumeva merenje nivoa, brzina i protoka vode u profilu vodotoka (Shaw i sar., 2011). Iako je protok najvažnija veličina kada su u pitanju vodotokovi, njegovo direktno merenje nije moguće u većini slučajeva.

Na izvorima i na veoma malim tokovima protok se može meriti zapreminski (*vo-lumetrijska metoda*), tj. zahvatanjem određene količine vode uz merenje vremena zahvatanja Δt , zatim merenjem zapremine zahvaćene vode ΔV i proračunom protoka Q kao zapremine u jedinici vremena ($Q = \Delta V/\Delta t$). Pri tome se mora zahvatiti voda koja prolazi kroz ceo proticajni profil. Na iole većim potocima i rekama zapreminsko merenje protoka nije moguće. Indirektno merenje protoka se najčešće obavlja merenjem dubina i brzina vode u profilu vodotoka, na osnovu kojih se protok određuje računski integracijom polja brzina po površini poprečnog preseka (*metoda brzina-površina*). U novije vreme koriste se mobilni ultrazvučni uređaji (engl. *Acoustic Doppler Current Profiler* ili ADCP), koji se kreću po liniji poprečnog profila vodotoka i mere brzine toka na osnovu rasipanja ultrazvučnog signala koji emituju, dok se protok dobija integracijom polja brzina.

Još jedan pristup za indirektno merenje protoka jeste *metoda praćenja rastvaranja trasera*, gde se kao traser koriste so, boja, ili radioaktivne supstance. U ovoj metodi poznata masa trasera se upušta u vodotok u jednom (uzvodnom) profilu, dok se u drugom (nizvodnom) meri koncentracija trasera. Rastojanje između ova dva profila treba da bude takvo da se postigne potpuno mešanje trasera sa vodom po širini nizvodnog profila. Protok vode se onda određuje na osnovu poznate ukupne mase trasera i registrovanog talasa povećanih koncentracija trasera u nizvodnom profilu.

Na manjim vodotokovima moguće je konstruisati *merne objekte*, kao što su suženja ili prelivi, na kojima se može uspostaviti jednoznačna veza između dubina i protoka definisana poznatim jednačinama. Za ove objekte mora postojati period *tariranja ili kalibracije*, tj. paralelnog merenja dubina i protoka na alternativan način da bi se utvrdili koeficijenti koji figurišu u odgovarajućim jednačinama (npr. koeficijent preliivanja).

Kontinualno merenje protoka na rečnim profilima na osnovu kontinualnog merenja brzina je praktično nemoguće. Iz tog razloga na rekama se kontinualno mere nivoi vode (odnosno *vodostaji*), dok se brzine toka u poprečnom preseku mere povremeno i protok dobija računskim putem. Tako dobijeni protoci i odgovarajući vodostaji se dovode u vezu koja se naziva *kriva protoka*, koja služi za određivanje protoka na osnovu kontinualnog merenja vodostaja (videti i odeljak 6.3.4).

Poželjno je da se hidrometrijska merenja obavljaju u rečnom profilu u kome se može obezbediti stabilna veza između protoka vode i nivoa vode, odnosno stabilna kriva protoka. To je slučaj rečnih deonica sa relativno prizmatičnim koritom i mirnim (približno) jednolikim tečenjem, pa se za takav slučaj kaže da krivu protoka definiše (kontrolniše) data deonica. Na deonicama na kojima tečenje nije jednoliko, jednoznačna veza između protoka i nivoa vode može se naći na mestima na kojima se ostvaruje kritična dubina, kao što su brzaci sa uzvodnim tišakom. Tada se kaže da krivu protoka definiše (kontrolniše) dati presek. Poprečni presek toka u kome se ostvaruje kritična dubina može se postići i veštački, izgradnjom već pomenutih mernih objekata. U oba slučaja protok je jednoznačna funkcija kritične dubine, a time i nivoa vode uzvodno od kontrolnog preseka, pod uslovom da je tečenje u tom preseku nepotopljeno. Do potop-

ljenog tečenja može doći ako se nizvodno ostvare viši nivoi vode, pri čemu dubina u kontrolnom preseku više ne bi bila kritična. Merenje protoka u ovakvim profilima je dakle moguće samo za vrednosti protoka pri kojima ne dolazi do potopljenog tečenja.

Sprovođenje hidrometrijskih merenja u našoj zemlji propisano je „Pravilnikom o načinu primene metoda hidroloških merenja i osmatranja“³. Ovaj pravilnik obuhvata metode osmatranja i merenja vodostaja, protoka vode, temperature i suspendovanog nanosa površinskih voda, kao i nivoa, izdašnosti i temperature podzemnih voda, a u skladu sa važećim domaćim i međunarodnim metodama i standardima. U dodatku B nabrojani su svi trenutno važeći standardi iz ove oblasti.

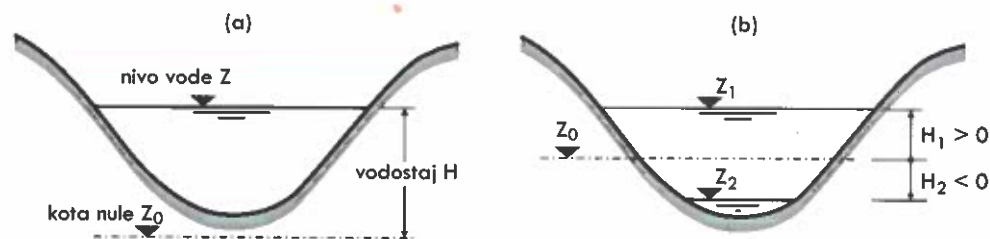
6.3.1 Merenje nivoa vode odnosno vodostaja

Vodostaj H se definiše kao razlika između kote nivoa vode Z i neke referentne kote Z_0 (slika 6.9-a):

$$H = Z - Z_0 \quad (6.5)$$

Referentna kota Z_0 se naziva *kota nule*. To je fiksirana kota sa poznatom nadmorskom visinom. Vodostaj se meri u odnosu na kotu nule i izražava u cm. Ako se nivo vode nalazi na koti nule, vodostaj je 0. Kota nule se obično postavlja ispod najnižeg opaženog nivoa vode kako bi vodostaji imali pozitivne vrednosti (slika 6.9-a). Ukoliko dođe do produbljivanja korita, može se desiti da se javljaju i nivoi vode ispod kote nule, pa vodostaji mogu biti i negativni (slika 6.9-b).

Referentni instrument za merenje vodostaja je *vodomerna letva* (slika 6.10). Ona se postavlja tako da njena kota nule bude ispod najnižeg opaženog vodostaja. Ako se korito produbi, ispod postojeće letve postavlja se tzv. negativna letva. Uobičajeno je da se letva postavlja vertikalno, ali se može postaviti i kao kosa letva na obali (slika 6.10 desno). Za kosu letvu je potrebno korigovati očitavanja zbog nagnutosti letve (vodostaj je tada jednak proizvodu očitavanja sa kose letve i kosinusa ugla za koji letva odstupa od vertikale). Letva je gradušana podeocima od 2 cm, tako da je tačnost očitavanja 1 cm. U okviru redovnih osmatranja na vodomernim stanicama sa letvama vodostaji se očitavaju jednom dnevno (u 6 sati), a po potrebi i više puta dnevno (u periodima nailaska talasa velikih voda).

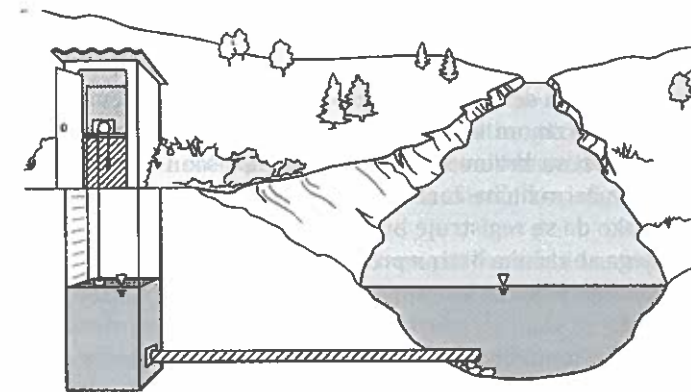


Slika 6.9. Definicija vodostaja i kote nule: (a) vodostaji se mere od kote nule do nivoa vode; (b) ako se mogu javiti nivoi vode ispod kote nule, vodostaj je pozitivan za nivo vode iznad kote nule, a negativan za nivo vode ispod kote nule.

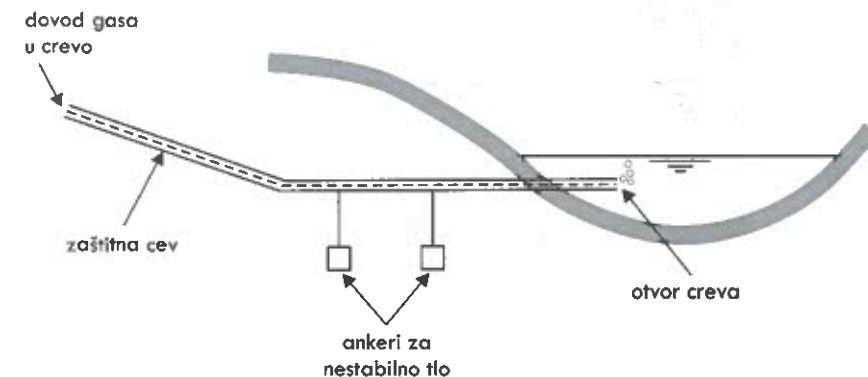
³ Na osnovu Zakona o meteorološkoj i hidrološkoj delatnosti („Službeni glasnik RS” broj 88/10), ovaj pravilnik donosi Republički hidrometeorološki zavod Srbije.



Slika 6.10. Vodomerna letva kao uređaj za merenje vodostaja. Na desnoj slici su prikazane kosa i vertikalna vodomerna letva na hidrološkoj stanici Mionica na reci Ribnici.



Slika 6.11. Princip rada limnigrafa kao uređaja za merenje vodostaja.



Slika 6.12. Merenje vodostaja gasnom tehnikom (prema standardu SRPS ISO 4373:2005).

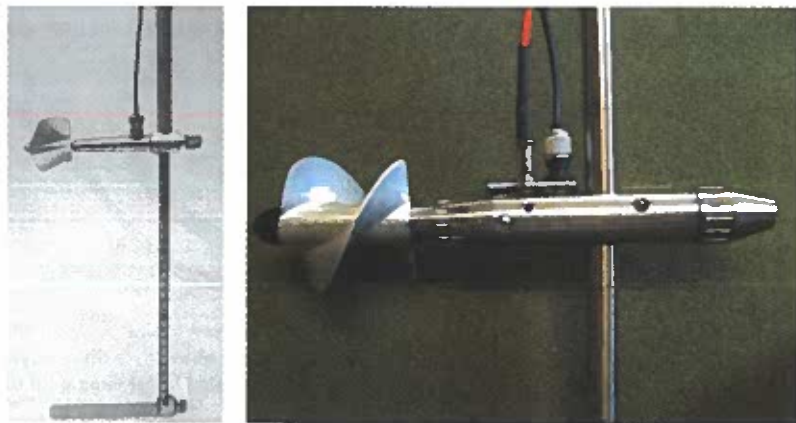
Od uređaja za kontinualno merenje nivoa vode najčešće se koristi *limnigraf* sa plovkom. Ovaj uređaj se smešta u plitak bunar pored reke koji ima poprečnu vezu sa rekam, tako da je nivo vode u bunaru jednak nivou vode u reci (slika 6.11). Uređaj u bunaru se sastoji od plovka, užeta na čijoj jednoj strani se nalazi plovak, kotura preko koga prelazi uža i kontratega na drugoj strani užeta. Pomeranje plovka se prenosi na papirnu traku, tako da se dobija kontinualni zapis promene vodostaja.

U novije vreme sve više su prisutni *gasni uređaji* za merenje nivoa vode, kojima se mehurići gasa (azota ili vazduha) iz rezervoara pod pritiskom ispuštaju u vodotok kroz crevo čiji je otvor veoma blizu dna vodotoka (slika 6.12). Gas se dozira tako da se stvara malo mehurića, čime se izjednačavaju pritisci na dva kraja creva. Merenjem pritiska sa strane creva u instrumentu zapravo se meri hidrostatički pritisak vode u vodotoku, a time se dolazi do dubine i nivoa vode. Ovakva tehnika je veoma pogodna za kontinualno merenje nivoa vode i digitalno zapisivanje izmerenih vrednosti, pa se sve više koristi na evropskim rekama.

6.3.2 Merenje brzina

Standardni instrument za merenje brzina u prirodnim vodotokovima jeste *hidrometrijsko krilo*. Njegov glavni deo je elisa na osovini koja je pričvršćena na metalnu šipku, odnosno držač (slika 6.13). Kada se krilo spusti u vodu tako da se vodena struja kreće ka elisi, elisa će se okretati brzinom koja zavisi od brzine vodene struje. Broj obrtaja elise je u funkcionalnoj vezi sa brzinom, a ta veza je najčešće višestruka (za različite raspone broja obrtaja važe različite formule). Osovina elise je povezana sa električnim brojačem obrtaja, tako da se registruje broj obrtaja u određenom vremenskom intervalu, a na osnovu njega se računa brzina prema odgovarajućoj formuli. Veličina elise može biti različita; manje elise se koriste za manje brzine i vodotokove, a veće za veće brzine i vodotokove.

Umesto hidrometrijskog krila, u novije vreme se koriste i *elektromagnetne sonde* ili *elektromagnetna krila* (slika 6.14) koje takođe mere brzinu vode u tački u kojoj je sonda postavljena.



Slika 6.13. Hidrometrijsko krilo (fotografije: RHMZ).



Slika 6.14. Elektromagnetna sonda za merenje brzina vode u otvorenim tokovima (fotografije: RHMZ).

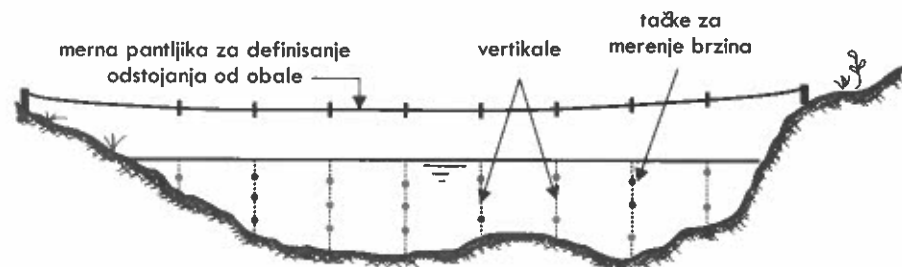
U zavisnosti od veličine vodotoka, krilo ili sonda se može spuštati u vodu na različite načine. U potocima u koje se može zagaziti (pri dubinama manjim od 1 m), osmatrač spušta držač krila u pojedine tačke poprečnog preseka toka (slika 6.15). Po širini profila se razapne uža kako bi se fiksirala mesta, tj. *vertikale* u kojima se mere brzine (slika 6.16), dok se dubina može odrediti pomoću gradacije na držaču krila. Držač krila se može spuštati u tok i sa mosta. Kod većih vodotoka merenja se moraju izvoditi iz čamca vođenog čeličnim užetom razapetim po širini toka ili pomoću žičare (slika 6.18). Mesta merenja brzina na veoma velikim vodotokovima moraju se odrediti geodetskim metodama, a umesto krila sa elisom koristi se torpedo (dužine oko 2 m) koje vuče brod pomoću čelične užadi.

Broj tačaka u kojima treba izmeriti brzine hidrometrijskim krilom ili elektromagnetnom sondom zavisiće od veličine vodotoka. Prema standardu SRPS ISO 748:2003, rastojanje između dve vertikale ne treba da bude veće od $1/20$ širine vodotoka. Za dubine veće od 1 m, na vertikali se obično uzima pet tačaka u kojima se mere brzine: pri površini, na dubinama $0.2h$, $0.6h$, $0.8h$ od površine i pri dnu, gde je h dubina vode na datoj vertikali. Za manje dubine se uzima manje tačaka. Merenje krilom u svakoj tački treba da traje 1 minut. U uslovima u kojima je potrebno brzo merenje, a to je u uslo-

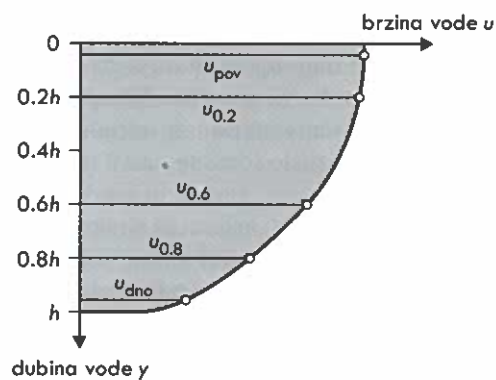


Slika 6.15. Merenje brzina na malim vodotokovima u koje se može zagaziti (fotografije: RHMZ).

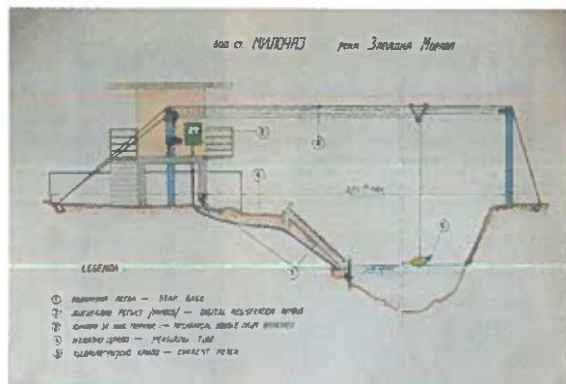
vima brze promene protoka (npr. pri nailasku poplavnog talasa), postupak se može skratiti merenjem brzine samo na dubini od $0.6h$ od površine vode (prema SRPS ISO 9825: 2005). Smatra se da su brzine na ovoj dubini najpribližnije prosečnoj brzini na vertikali. Na slici 6.17 prikazan je tipičan očekivani raspored brzina po vertikali u nekom poprečnom preseku reke, na kome je označeno pet karakterističnih tačaka u kojima se standardno meri brzina vode.



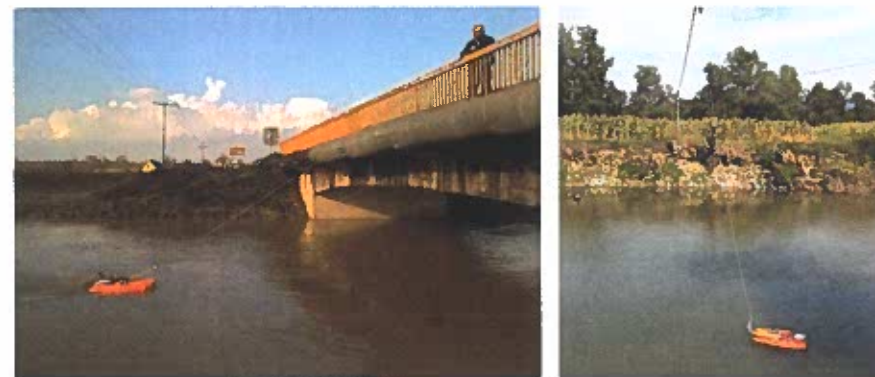
Slika 6.16. Tačke za merenje brzine u poprečnom preseku vodotoka nalaze se na vertikalama na različitim odstojećima od obale.



Slika 6.17. Pet karakterističnih tačaka za merenje brzina u profilu brzina po dubini otvorenog toka.



Slika 6.18. Skica hidrološke stanice Miločaj na Zapadnoj Moravi koja je opremljena žičarom namenjenom merenju brzina vode u profilu stanice (autori skice su osmatrači RHMZ-a).



Slika 6.19. Akustički Doplerov uređaj (ADCP) na malom trimaranu za merenje brzina vode. Levo: merenje sa mosta u profilu hidrološke stanice Lešnica na reci Jadar. Desno: merenje pomoću žičare na stanici Miločaj na Zapadnoj Moravi (fotografija levo: RHMZ; desno: J. Plavšić).

Ultrazvučne sonde mere brzinu vode na Doplerovom principu. One emituju zvučne signale i mere eho koji se odbija od čestica u vodi (kao što je suspendovani nanos). Promena frekvencije primljenog signala u odnosu na emitovani je proporcionalna brzini vode. Na istom principu rade i noviji akustički Doplerovi uređaji poznati pod skraćenicom ADCP (engl. *Acoustic Doppler Current Profiler*). Ovi uređaji se postavljaju na manja ili veća plovila (slika 6.19) koja se kreću po liniji poprečnog preseka vodotoka i na taj način veoma detaljno mere raspored brzina na putanji kojom se kreću. Da bi se obezbedila tačnost merenja, smatra se da su potrebna bar četiri prelaza plovila sa uređajem po poprečnom preseku.

6.3.3 Proračun protoka na osnovu izmerenih brzina

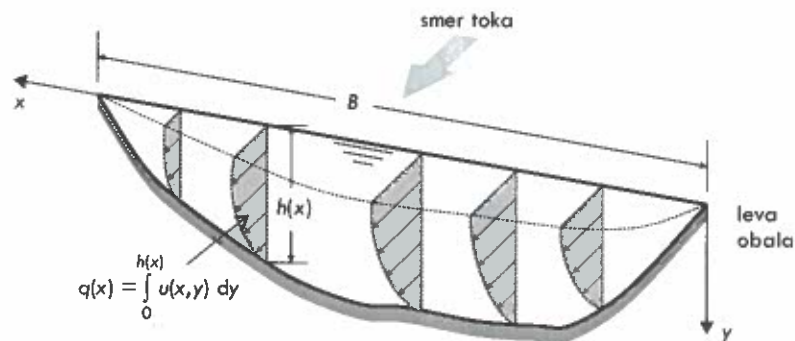
Merenja brzina vode, ili hidrometrijska merenja, sprovode se sa glavnim ciljem da se odredi protok u profilu stanice pri nekom vodostaju. Protok se određuje integrisanjem polja brzina u poprečnom preseku vodotoka:

$$Q = \int_A u(x, y) dA = \int_{x=0}^B \int_{y=0}^{h(x)} u(x, y) dx dy \quad (6.6)$$

gde je A površina poprečnog preseka vodotoka, x rastojanje od leve obale, B širina vodenog ogleđala, y dubina vode merena od površine, a $h(x)$ ukupna dubina na rastojanju x od leve obale. U praktičnim proračunima protoka na osnovu izmerenog polja brzina, najpre se vrši integracija po dubini za svaku vertikalu (slika 6.20). Tako dobijena veličina naziva se *elementarni protok* (q):

$$q(x) = \int_{y=0}^{h(x)} u(x, y) dy \quad (6.7)$$

Elementarni protok predstavlja protok po jedinici širine korita i ima dimenziju L^2T^{-1} . Na osnovu njega može se odrediti *srednja brzina na vertikali* na rastojanju x od leve obale:



Slika 6.20. Integracija brzina po dubini na vertikalama.

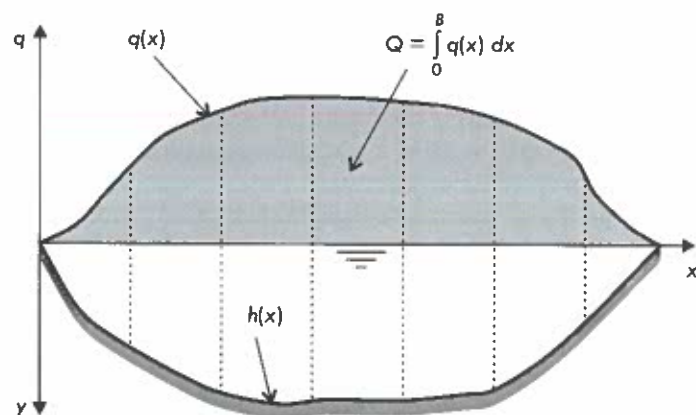
$$v_v(x) = \frac{q(x)}{h(x)} \quad (6.8)$$

Da bi se elementarni protok odredio računski, ne preporučuje se primena trapeznog pravila zbog mogućnosti da se napravi velika greška. Umesto toga, preporučuje se grafička približna integracija tako što se izmerene brzine nanese na milimetarski papir u zavisnosti od dubine, a kroz tačke se zatim ručno provuče očekivani profil brzina. Potom se do vrednosti elementarnog protoka dolazi brojanjem kvadratića mreže milimetarskog papira unutar profila brzina.

U drugom koraku integrišu se elementarni protoci po širini korita (u širini vodenog ogledala B) kako bi se dobio ukupni protok (slika 6.21):

$$Q = \int_{x=0}^B q(x) dx \quad (6.9)$$

U ovom slučaju približna integracija se može sprovesti trapeznom pravilom uz dovoljnu tačnost. Na osnovu sračunatog protoka može se odrediti i srednja brzina u poprečnom preseku:



Slika 6.21. Proračun protoka integracijom dijagrama elementarnih protoka.

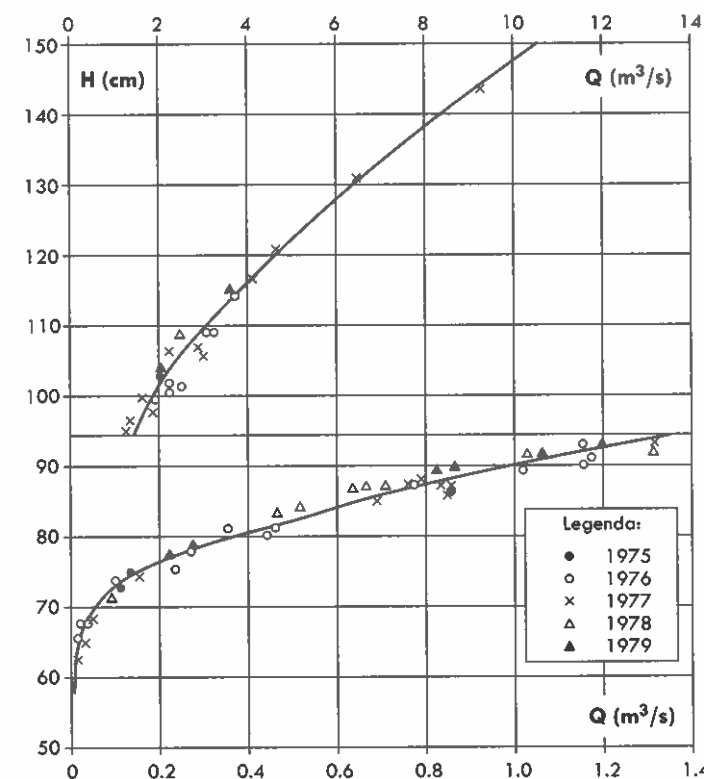
$$v = \frac{Q}{A} \quad (6.10)$$

Opisani postupak proračuna protoka u mernom profilu na osnovu izmerenih brzina u literaturi se naziva i *metoda brzina-površina*.

6.3.4 Kriva protoka

Uspostavljanje pouzdane veze između osmotrenih vodostaja i odgovarajućih protoka je od suštinskog značaja za hidrološke analize. Zavisnost između vodostaja i protoka za neku hidrološku stanicu naziva se *kriva protoka*. Ona se formira na osnovu rezultata merenja brzina i proračuna protoka u poprečnom profilu stanice pri trenutnom vodostaju. Kako bi se pokrio ceo dijapazon mogućih protoka i vodostaja, hidrometrijska merenja treba sprovoditi pri različitim vodostajima. Uobičajena je praksa da se ova merenja obavljaju 10–12 puta godišnje.

Kada se parovi vrednosti osmotrenih vodostaja i sračunatih protoka nanese na dijagram $Q-H$ (slika 6.22), oni će se grupisati oko neke krive linije, ali će se neizbežno pojaviti rasipanje tačaka usled grešaka u merenjima i nepreciznosti u proračunu pro-



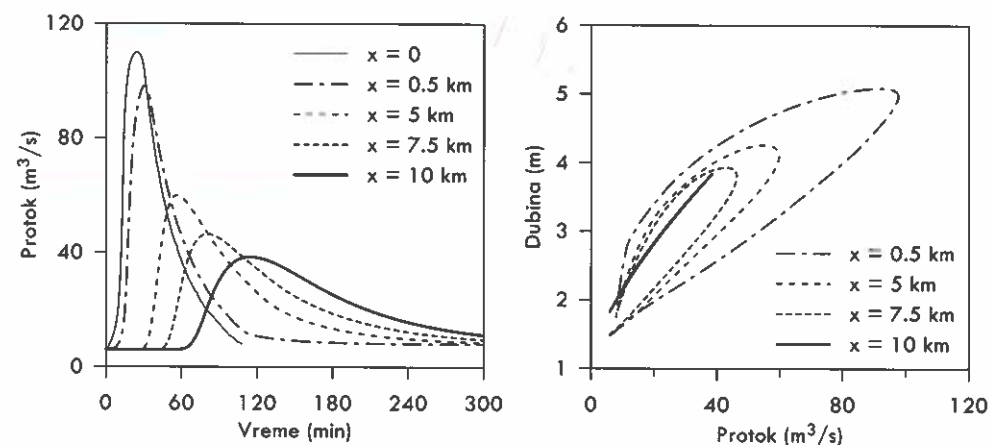
Slika 6.22. Kriva protoka za vodomernu stanicu Borač na Boračkoj reci (prema Jovanoviću, 1989). Dijagram je podeljen na dva dela sa različitim razmerama za protok u zoni nižih i viših vodostaja.

toka. Provlačenje krive linije kroz tačke može se obaviti matematički uz pomoć regresione analize, mada se u praksi često radi i ručno jer ovaj postupak zahteva iskustvo. Kriva koja se provuče kroz tačke može se onda definisati na sledeće načine: a) grafički, na dijagramu $Q-H$, b) tabelarno, sa parovima odgovarajućih vrednosti vodostaja i protoka („pisana kriva protoka“), i c) analitički, u obliku $Q = Q(H)$. Najčešći analitički oblici krive protoka su stepene funkcije oblika $Q = aH^b$ ili $Q = a(H - H_0)^b$, gde su a i b regresioni koeficijenti, a H_0 vodostaj za koji je protok jednak 0.

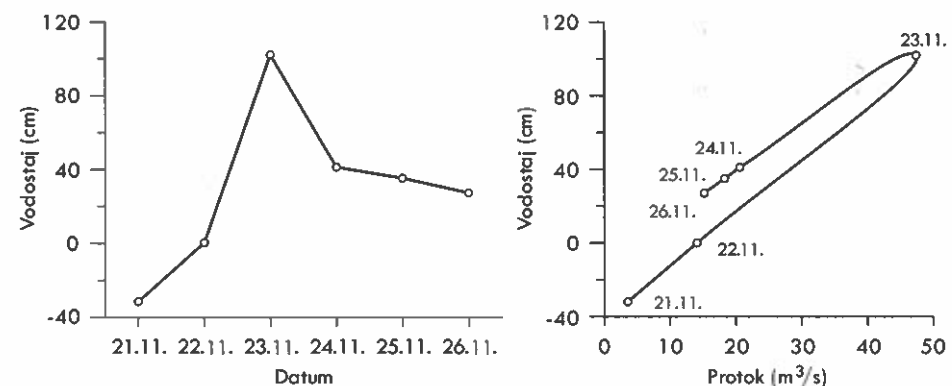
Korita prirodnih vodotokova su najčešće nestabilna jer pod dejstvom vodene struje dolazi do produbljivanja ili zasipanja korita, čime se menja i njegova hrapavost. Zbog toga vezu $Q(H)$ treba često proveravati. Jedna kriva protoka može važiti za neki profil duže ili kraće vreme, u zavisnosti od nestabilnosti korita. Za svaki profil najčešće postoji čitava familija krivih protoka.

Pored nestabilnosti korita, promena nagiba linije nivoa tokom neustaljenog tečenja takođe se odražava na zavisnost $Q(H)$. U ustaljenom jednolikom tečenju nagib dna i nagib linije nivoa su jednaki, pa je veza između protoka i dubina (ili vodostaja) jednoznačna i data Manningovom formulom. U neustaljenom tečenju, kao što je prolazak poplavnog talasa duž deonice, ova veza nije jednoznačna jer se nagib linije nivoa menja (slika 6.23). Tokom nailaska poplavnog talasa protoci i nivoi vode rastu, pa je nagib linije nivoa veći od nagiba dna; pri povlačenju poplavnog talasa je obrnuto. Rezultat je pojava petlje (tj. histerezisa) u zavisnosti $Q(H)$, gde su za isti vodostaj protoci veći pri nailasku poplavnog talasa nego pri povlačenju talasa. U primeru na slici 6.24 vidi se i petlja u zavisnosti $Q(H)$ u profilu jedne hidrološke stanice tokom prolaska talasa.

Ekstrapolacija krive protoka. S obzirom da se merenja protoka obavljaju relativno retko, kao i da su uslovi u mernom profilu promenljivi, za razmatrani profil obično je na raspolaganju mali broj parova vrednosti Q i H na osnovu kojih bi se definisala kriva protoka $Q(H)$. Zbog toga se može desiti da kriva protoka nije definisana za neke rasponne vrednosti vodostaja. To je najčešće slučaj sa velikim vodostajima, jer se hidro-



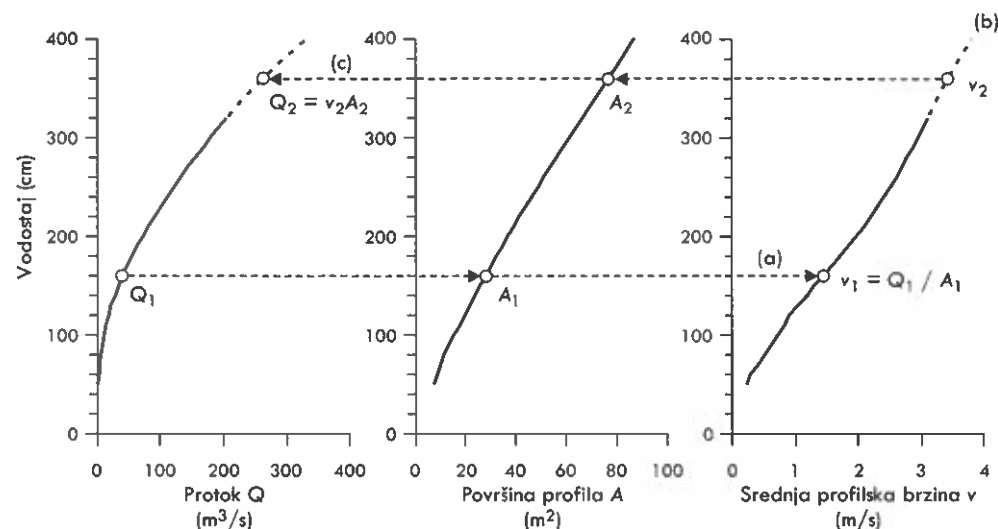
Slika 6.23. Najjednoznačna kriva protoka u neustaljenom tečenju: na levom dijagramu su hidrografi u različitim presecima duž deonice, a desno su odgovarajuće veze protoka i dubine vode (prema Petrović i sar., 1994).



Slika 6.24. Pojava petlje na krivoj protoka tokom prolaska poplavnog talasa na profilu stanice Slovac na Kolubari tokom novembra 1996. godine.

metrijska merenja veoma teško obavljaju u periodu velikih voda. Zato se javlja potreba da se ustanovi veza $Q(H)$ produži izvan opaženih vrednosti vodostaja kako bi se omogućilo očitavanje protoka i za velike vodostaje. Ova ekstrapolacija krive protoka se mora uraditi sa velikom pažnjom, jer može dovesti do velikih grešaka u procenjenim protocima velikih voda.

Ukoliko se kriva protoka nacrtana na dijagramu u logaritamskoj razmeri prikaže kao prava linija, tada se ona najlakše može ekstrapolovati za visoke vodostaje. Ipak, smatra se da ovakvu ekstrapolaciju treba raditi do vrednosti protoka koje su za 20% veće od najvećih opaženih protoka, dok iznad te vrednosti rezultate treba proveriti i drugim metodama (Shaw i sar., 2011).



Slika 6.25. Ekstrapolacija krive protoka $Q(H)$ korišćenjem zavisnosti površine poprečnog preseka A i srednje profilske brzine v od vodostaja H : (a) konstrukcija krive srednje profilske brzine na osnovu poznatog protoka; (b) ekstrapolacija krive srednje profilske brzine; (c) konstrukcija ekstrapolovanog dela krive protoka.

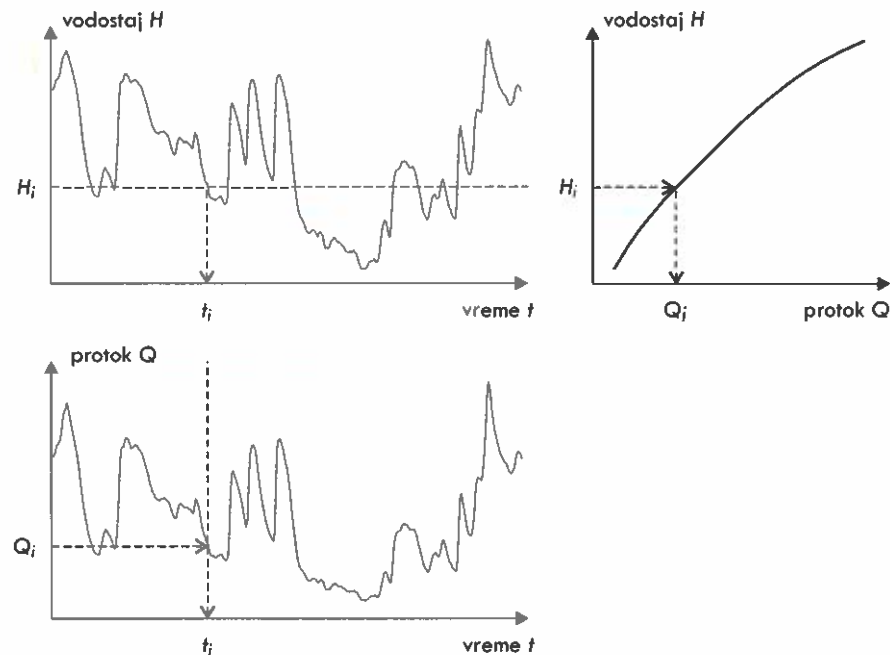
Ekstrapolacija zasnovana na jednačini kontinuiteta $Q = vA$, gde je v srednja profilska brzina i A površina poprečnog preseka, sprovodi se tako što se za zadati profil najpre konstruiše kriva zavisnosti površine poprečnog preseka od vodostaja $A(H)$. Ova zavisnost se može odrediti iz geodetskog snimka profila. Zatim se za vrednosti protoka iz raspona izmerenih vrednosti računaju srednje profilske brzine i konstruiše dijagram zavisnosti $v(H)$ (videti sliku 6.25). Smatra se da je ekstrapolacija ove zavisnosti pouzdanija od ekstrapolacije same krive protoka. Korišćenjem ekstrapolovanih brzina i poznatih površina poprečnog preseka za visoke vodostaje, dolazi se i do ekstrapolovanih vrednosti protoka za te vodostaje.

Postoje i druge metode za ekstrapolaciju krivih protoka o kojima se može više naći kod Jovanovića i sar. (1977) i u standardu SRPS ISO 1100-2:2005.

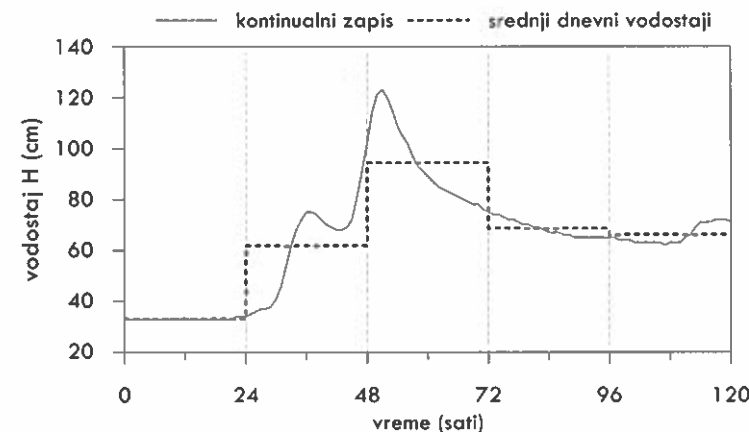
6.4 Obrada hidroloških podataka

6.4.1 Nivogrami i hidrogrami

U prethodnom potpoglavlju o hidrološkim merenjima rečeno je da je kontinualno merenje protoka praktično nemoguće i da se, umesto protoka, na rekama kontinualno mere nivoi vode, odnosno vodostaji. Kontinualni zapis vodostaja sa neke hidrološke stanice može da posluži za dobijanje kontinualnog zapisa protoka ukoliko za profil stanice postoji ustanovljena zavisnost između vodostaja i protoka, odnosno ustanovljena kriva protoka. Ovaj postupak je prikazan na slici 6.26.



Slika 6.26. Postupak određivanja kontinualnog zapisa protoka (hidrograma) $Q(t)$ na osnovu kontinualnog osmatranja vodostaja (nivograma) $H(t)$ i krive protoka $Q(H)$.



Slika 6.27. Primer osrednjavanja kontinualnog zapisa vodostaja po danima.

Grafički prikaz promene nivoa vode u vremenu, kao što je dijagram gore levo na slici 6.26, naziva se *nivogram*. Grafički prikaz promene protoka kroz vreme, kao što je donji dijagram na slici 6.26, naziva se *hidrogram*. Hidrogram se, dakle, konstruiše iz nivograma korišćenjem krive protoka.

Kontinualni zapis vodostaja najčešće je na raspolaganju kao zapis na limnigrafskim trakama koje je potrebno digitalizovati, ili kao digitalni zapis sa uređaja za merenje vodostaja u određenim malim vremenskim intervalima. Za potrebe hidroloških analiza i praktičnih proračuna, kontinualni zapis vodostaja se diskretizuje u izabranim vremenskim intervalima. Za analize kratkotrajnih epizoda oticaja, kontinualni zapis se diskretizuje u časovnim ili kraćim vremenskim intervalima. U Republičkom hidrometeorološkom zavodu sprovodi se standardna obrada zapisa vodostaja na dnevnom nivou, gde se iz ovih kontinualnih zapisa određuju *dnevni vodostaji* (slika 6.27). Diskretizovani nizovi vodostaja prevode se, pomoću krive protoka, u nizove protoka sa istom vremenskom diskretizacijom. Tako se npr. časovni vodostaji prevode u časovne protoke, a dnevni vodostaji u dnevne protoke.

Prikupljeni podaci dnevnih vodostaja i protoka objavljuju se u Hidrološkim godišnjacima Republičkog hidrometeorološkog zavoda⁴. Na slici 6.28 prikazani su primeri godišnjih pregleda vodostaja i protoka na stanici Valjevo na reci Kolubari. Centralni delovi ovih tabelarnih pregleda sadrže dnevne vodostaje i protoke, dok se u donjim delovima nalaze minimalne, srednje i maksimalne vrednosti po mesecima. Pri dnu tabele daju se minimalne, srednje i maksimalne godišnje vrednosti.

6.4.2 Zapremina oticaja i srednji protok

Količina vode koja protekne kroz profil vodotoka u nekom intervalu vremena je *zapremina oticaja* i dobija se integraljenjem protoka u razmatranom intervalu vremena $[t_0, t_0 + T]$, tj. kao površina ispod hidrograma za taj interval vremena:

⁴ Ovi godišnjaci su dostupni na internet strani Republičkog hidrometeorološkog zavoda.

Станица: Ваљево Кота "0" (т н.ј.м.) 179.65
 Река: Колубара Удаленост од ушћа (km) 95.4
 Шифра: 45005 Површина слива (km²): 340

ВОДОСТАЈИ ЗА 2010. ГОДИНУ

ДАН	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
1	48	26	58	50	36	88	150	28	14	20	32	83
2	80	25	55	46	35	70	100	24	16	20	29	73
3	70	24	50	48	34	64	70	20	16	20	27	60
4	84	26	52	44	32	58	60	20	14	18	26	58
5	54	27	59	42	30	54	56	20	14	18	25	48
6	80	42	54	42	30	54	50	18	14	20	24	42
7	58	50	51	45	30	48	45	18	14	30	23	41
8	55	44	50	44	28	44	40	16	14	30	23	38
9	52	41	48	44	28	40	40	20	14	28	23	38
10	50	38	47	42	24	38	38	18	24	28	25	39
11	48	38	46	40	24	36	36	18	30	28	24	36
12	42	38	47	41	24	34	34	20	38	24	23	36
13	40	38	52	42	24	32	30	20	34	24	22	36
14	38	37	56	40	24	30	28	20	32	24	22	35
15	38	41	60	42	23	28	18	22	24	21	33	33
16	31	37	62	44	30	26	24	18	28	30	21	31
17	30	41	66	42	34	24	24	18	25	34	20	30
18	30	77	81	40	104	23	22	18	24	34	22	31
19	29	91	81	38	90	26	26	18	28	42	21	31
20	28	97	81	86	60	40	22	16	50	68	23	33
21	30	78	80	66	54	38	20	16	40	52	23	44
22	28	84	80	56	52	80	18	16	34	46	31	53
23	28	80	61	54	78	200	18	14	30	43	52	52
24	28	58	55	50	80	100	18	14	24	40	64	48
25	28	99	52	49	82	70	34	14	22	38	58	44
26	25	77	49	48	56	82	30	14	22	40	51	41
27	24	71	48	46	50	94	24	14	20	48	44	38
28	24	64	66	46	63	110	20	12	18	42	38	36
29	24	58	38	56	78	18	12	12	40	36	38	38
30	27	53	42	50	75	18	12	20	38	41	38	31
31	27	51	42	62	16	12	12	37				
min	24	18	45	38	23	23	18	12	14	18	20	28
дане	27	3	10	19	15	18	24	28	1	4	16	31
сред.	38	52	55	47	45	50	37	17	24	33	31	43
max	70	115	74	86	104	220	150	28	50	68	66	100
дане	3	25	28	20	18	23	1	1	20	20	24	1
Годишњи мин.	12		Средњи годишњи		Годишњи макс.		220					
Датум	28.08		Датум		Датум		23.08					

Станица: Ваљево Кота "0" (т н.ј.м.) 179.65
 Река: Колубара Удаленост од ушћа (km) 95.4
 Шифра: 45005 Површина слива (km²): 340

ПРОТОЦИ ВОДЕ ЗА 2010. ГОДИНУ

ДАН	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
1	7.36	1.85	10.8	7.50	3.62	24.0	89.3	2.15	506	950	2.84	27.7
2	11.0	1.70	9.55	6.26	3.43	16.2	31.5	1.55	854	950	2.30	17.8
3	14.6	1.55	7.50	6.28	3.23	13.4	16.2	950	850	850	2.00	11.8
4	13.4	1.85	8.32	5.84	2.84	10.8	11.8	950	506	802	1.85	9.98
5	9.14	2.00	11.2	5.02	2.45	9.14	9.98	950	508	802	1.70	6.88
6	11.8	5.02	9.14	5.02	2.45	9.14	7.50	802	506	950	1.55	5.02
7	10.8	7.50	7.91	8.88	2.45	8.88	5.95	802	506	2.45	1.40	4.71
8	9.55	5.84	7.50	5.84	2.15	5.84	4.40	854	508	2.45	1.40	4.01
9	8.32	4.71	8.88	5.84	2.15	4.40	4.40	950	506	2.15	1.40	4.01
10	7.50	4.21	6.57	5.02	1.55	4.01	3.82	802	1.55	2.15	1.70	4.21
11	6.26	4.21	6.26	4.40	1.55	3.62	3.62	802	2.45	1.85	1.55	3.62
12	5.02	4.21	6.57	4.71	1.55	3.23	3.23	950	4.01	1.55	1.40	3.82
13	4.40	4.21	6.32	5.02	1.55	2.84	2.45	950	3.23	1.55	1.25	3.62
14	4.21	3.82	9.98	4.40	1.55	2.45	2.15	950	2.84	1.55	1.25	3.43
15	4.01	4.71	11.8	5.02	1.40	2.15	1.85	802	2.84	1.55	1.10	3.04
16	2.65	3.82	12.5	5.64	2.45	1.85	1.55	654	2.15	2.45	1.10	2.85
17	2.45	4.71	14.4	5.02	3.23	1.55	1.55	802	1.70	3.23	950	2.45
18	2.45	19.8	12.1	4.40	34.1	1.40	1.25	802	1.55	3.23	1.25	2.85
19	2.30	28.8	12.1	4.01	28.0	1.85	1.85	802	1.85	5.02	1.10	2.85
20	2.15	29.9	12.1	24.0	11.6	4.40	1.25	854	7.50	15.3	1.40	3.04
21	2.45	20.0	11.8	15.3	9.14	4.01	950	854	4.40	8.32	1.40	5.84
22	2.15	13.4	11.8	10.8	10.8	21.0	802	654	13.4	6.26	6.85	8.73
23	2.15	11.6	12.1	9.14	19.1	11.8	802	506	2.45	5.33	6.32	8.32
24	2.15	10.8	9.55	7.50	21.0	31.5	654	506	1.55	4.40	13.4	6.88
25	1.85	31.0	8.32	7.19	12.5	18.2	3.23	508	1.25	4.21	10.8	5.84
26	1.70	19.8	7.19	8.88	9.98	22.0	2.45	506	1.25	4.40	7.91	4.71
27	1.55	16.7	6.88	8.28	7.50	28.2	1.55	950	6.26	5.84	4.01	
28	1.55	13.4	14.4	6.26	13.0	38.0	950	358	802	5.02	4.21	3.82
29	1.55	9.98	4.01	9.98	19.1	802	358	950	4.40	3.62	4.01	
30	2.00	8.73	5.02	7.50	18.6	802	358	950	4.21	4.71	4.01	
31	2.00	7.91	12.5			654	358		3.82	4.71	2.85	
min	1.55	1.55	6.26	4.01	1.40	1.40	654	358	508	802	950	2.45
дане	27	3	11	19	15	18	24	28	1	4	17	17
сред.	5.17	9.93	9.65	6.79	7.80	14.9	8.41	7.74	1.81	3.50	3.11	5.96
max	14.6	41.5	18.1	24.0	34.1	142	89.3	2.15	7.50	15.3	14.4	37.4
дане	3	25	28	20	18	23	1	1	20	20	24	1
Годишњи мин.	358		Средњи годишњи		Годишњи макс.		142					
Датум	28.08		Датум		Датум		23.08					

Слика 6.28. Пример годишњих pregleda vodostaja (gore) i protoka (dole) u godišnjacima RHMZ.

$$V = \int_{t_0}^{t_0+T} Q(t) dt \quad (6.11)$$

Srednji protok u istom intervalu vremena tada je jednak:

$$\bar{Q} = \frac{V}{T} \quad (6.12)$$

Uobičajeno je da se računaju mesečne i godišnje zapremine oticaja i odgovarajući srednji protoci, ali je to moguće i za bilo koji interval vremena od interesa.

Godišnja zapremina oticaja je zapremina vode koja tokom jedne godine protekne kroz profil vodotoka i predstavlja integral godišnjeg hidrograma na tom profilu:

$$V_{god} = \int_0^{T_{god}} Q dt \quad (6.13)$$

gde je T_{god} vreme u razmatranoj godini (u neprestanoj godini $T_{god} = 365 \text{ dana} \times 24 \text{ sata} \times 3600 \text{ sekundi}$). U praktičnim proračunima, ova zapremina se najčešće određuje na osnovu dnevnih protoka:

$$V_{god} = \sum_{i=1}^N Q_i T_d \quad (6.14)$$

gde je N broj dana u godini (365, odnosno 366 u prestupnoj godini), a $T_d = 24 \times 3600 = 86400 \text{ s}$.

Slično tome, mesečna zapremina oticaja iznosi:

$$V_m = \int_0^{T_m} Q(t) dt \quad (6.15)$$

gde je T_m vreme u mesecu m (u januaru $T_m = 31 \times 86400 \text{ s}$, i slično u ostalim mesecima). Jasno je da se godišnja zapremina može dobiti i sabiranjem svih mesečnih zapremina oticaja:

$$V_{god} = \sum_{m=1}^{12} V_m \quad (6.16)$$

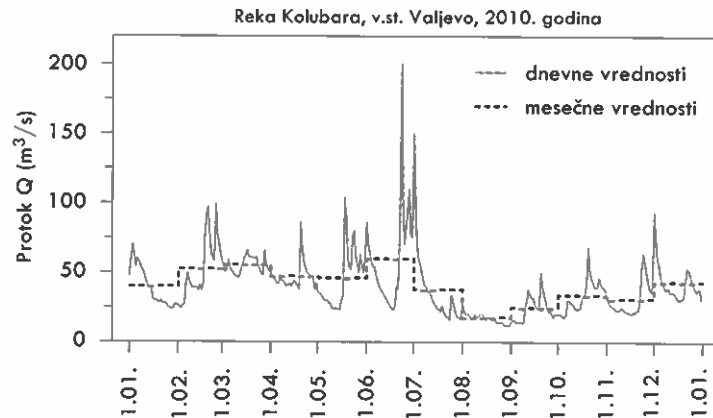
Godišnji protok kao prosečni protok za datu godinu dobija se deljenjem ukupne godišnje zapremine oticaja sa vremenom tokom godine:

$$Q_{god} = \frac{V_{god}}{T_{god}} \quad (6.17)$$

a može se dobiti i kao aritmetička sredina svih dnevnih protoka u datoj godini:

$$Q_{god} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N Q_i \quad (6.18)$$

gde je N broj dana u godini.



Slika 6.29. Godišnji hidrogram dnevnih i mesečnih protoka.

Mesečni protok je prosečni protok u jednom mesecu i dobija se deljenjem mesečne zapremine oticaja sa vremenom tokom tog meseca:

$$Q_m = \frac{V_m}{T_m} \quad (6.19)$$

Važno je napomenuti da se, u slučajevima kada se raspolaze samo mesečnim protocima, tačna vrednost godišnjeg protoka ne može dobiti kao prosek 12 mesečnih protoka, već samo kombinovanjem formula (6.16) i (6.19).

Na slici 6.29 prikazan je godišnji hidrogram sa dnevnim i sa mesečnim protocima za istu stanicu. Ovakav hidrogram daje uvid u unutargodišnji režim protoka na razmatranom profilu.

6.4.3 Kriva trajanja

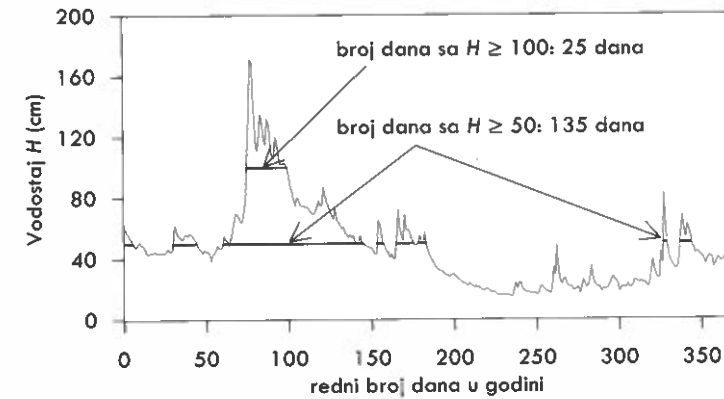
Trajanje vodostaja t se definiše kao broj dana u godini sa vodostajima H jednakim ili većim od razmatrane vrednosti h :

$$t(h) = \text{broj dana sa } H \geq h$$

Na isti način definiše se i trajanje protoka, odnosno broj dana sa protocima Q jednakim ili većim od razmatrane vrednosti q :

$$t(q) = \text{broj dana sa } Q \geq q$$

Na slici 6.30 prikazano je kako se definiše trajanje na primeru vodostaja od $H_1 = 50$ cm i $H_2 = 100$ cm na jednoj hidrološkoj stanici. Sa slike se vidi da se trajanje smanjuje sa povećanjem vodostaja i obrnuto. Tako niski vodostaji imaju dugačko trajanje, jer su tokom većeg dela godine prevaziđeni. S druge strane, visoki vodostaji imaju kratko trajanje jer se takve vrednosti prevazilaze u malom broju dana tokom godine. Najkraće trajanje od jednog dana ima najveća osmotrena dnevna vrednost H_{\max} , a najduže trajanje od 365 dana (ili 366 u prestupnoj godini) ima najniži opaženi vodostaj H_{\min} .



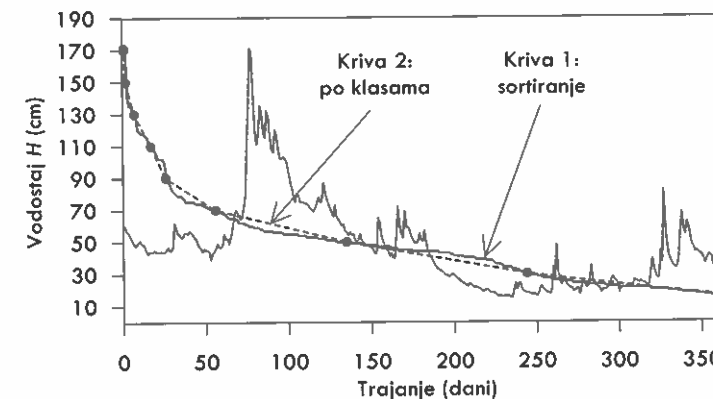
Slika 6.30 Definicija trajanja na primeru vodostaja na stanici Arilje na Moravici 1988. godine.

Da bi se trajanje nekog vodostaja ili protoka x odredilo, potrebno je prebrojati u koliko dana u godini su se javile vrednosti veće od razmatrane vrednosti x . Najlakši način da se to uradi jeste da se niz od 365 (ili 366) dnevnih vrednosti uredi u opadajući niz. Tada redni broj podatka k u tom nizu predstavlja i broj dana u kojima je vodostaj ili protok bio veći ili jednak od k -tog člana uređenog niza x_k :

$$t(x_k) = \text{broj dana sa } X \geq x_k = k$$

Ukoliko je potrebno da se trajanje proceni za neku proizvoljnu vrednost x , tada se ono može izračunati interpolacijom između trajanja dve vrednosti x_k i x_{k+1} između kojih se vrednost x nalazi.

Kriva trajanja vodostaja ili protoka je grafička predstava zavisnosti između vrednosti vodostaja ili protoka i njihovih trajanja. Ona se može konstruisati jednostavnim uređivanjem niza u opadajući i crtanjem takvog dijagrama (kriva 1 na slici 6.31). Alternativni način za konstruisanje krive trajanja jeste da se vrednosti iz niza podele u prigodan broj klasa (videti formulu 7.26 u odeljku 7.2.2) i da se za svaku klasu odrede



Slika 6.31. Kriva trajanja vodostaja za nivogram sa slike 6.30 dobijena na dva načina, (1) sortiranjem u opadajući niz i (2) brojanjem elemenata po klasama širine 20 cm.

frekvencije, odnosno broj dana sa vrednostima u toj klasi. Sabiranjem frekvencija od najviše klase ka najnižoj formira se niz kumulativnih frekvencija. Da bi se nacrtala kriva trajanja, kumulativne frekvencije se nanose na donji kraj klase, jer one predstavljaju broj dana sa vodostajem (ili protokom) većim ili jednakim donjoj granici klase (kriva 2 na slici 6.31). Na taj način na donjoj granici najniže klase trajanje će iznositi ukupno 365 (ili 366) dana.

Za potrebe daljih analiza zavisnost trajanja i vodostaja ili protoka može se dati tabelarno za karakteristične vrednosti trajanja. Tada se trajanje najčešće izražava procentualno u odnosu na broj dana u godini. Na primer, protok trajanja 95% je protok koji se prevazilazi tokom 95% vremena godišnje, odnosno 347 dana godišnje; slično tome, protok trajanja 1% je onaj od koga se veći protok javlja u svega 3.65 dana godišnje.

Primer 6.1. Na osnovu podataka osmatranja protoka za 2010. godinu na hidrološkoj stanici Varvarin na Velikoj Moravi (tabela C.1 u dodatku C) odrediti krivu trajanja protoka. Tabelarno prikazati protoke sledećih karakterističnih trajanja: 1%, 5%, 10%, 20%, 50%, 80%, 90%, 95%.

Rešenje. Kriva trajanja protoka najlakše se određuje uređivanjem niza dnevnih protoka u opadajući niz, pri čemu se najvećem protoku dodeljuje redni broj 1, drugom najvećem protoku redni broj 2, i tako redom do poslednjeg, tj. najmanjeg protoka kome se dodeli redni broj 365. Trajanje protoka tada je jednako rednom broju odgovarajuće vrednosti protoka. U ovom primeru najveći protok iznosi 1740 m³/s, a najmanji 59.4 m³/s, a deo uređenog niza prikazan je u tabeli 6.1. Na slici 6.32 prikazani su osmotreni hidrogram u 2010. godini i kriva trajanja protoka kao opadajući niz protoka.

Protoci zadatih procentualnih trajanja određuju se očitavanjem iz tabele 6.1 ili linearnom interpolacijom između očitanih vrednosti. Na primer, trajanje od 1% vremena godišnje je trajanje od $0.01 \times 365 = 3.65$ dana. Protok tog trajanja određuje se interpolacijom između protoka trajanja 3 i 4 dana:

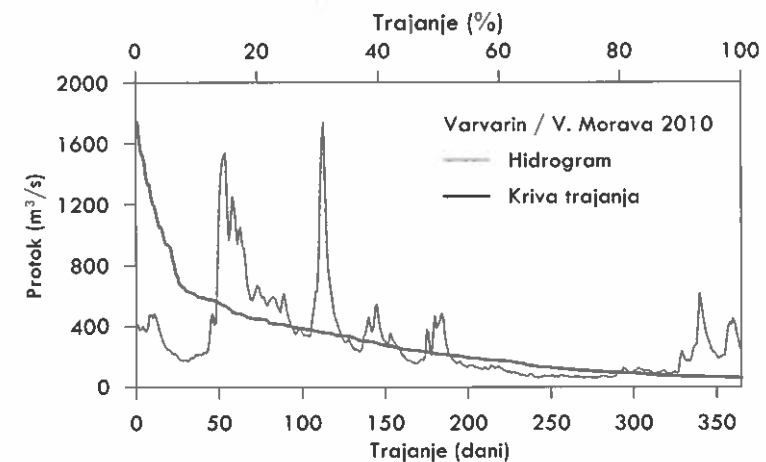
$$Q_{1\%} = Q(3.65) = Q(3) + \frac{Q(4) - Q(3)}{4 - 3} \cdot (3.65 - 3) = 1540 + (1520 - 1540) \cdot 0.65 = 1527 \text{ m}^3/\text{s} \quad (6.20)$$

Na sličan način određuju se i protoci ostalih procentualnih trajanja (tabela 6.2).

Tabela 6.1. Formiranje krive trajanja uređivanjem niza po opadajućem redosledu u primeru 6.1.

Niz protoka (u m ³ /s) ureden po opadajućem redosledu	redni broj = trajanje (u danima)
1740	1
1620	2
1540	3
...	...
654	29
635	30
...	...
59.4	365

Drugi način za određivanje krive trajanja jeste podela raspona izmerenih vrednosti na klase. Za ukupno 365 podataka, pogodan broj klasa iznosi od 9 do 13 (prema formulama 7.26 u odeljku 7.2.2). Raspon izmerenih protoka iznosi $1740 - 59.4 = 1680.6 \text{ m}^3/\text{s}$. Ako se raspon podeli na 9 klasa, širina klase bi bila $187 \text{ m}^3/\text{s}$, a ako se raspon podeli na 13 klasa, širina klase bi bila $129 \text{ m}^3/\text{s}$. Na osnovu ove preliminarne analize, usvaja se okvirna širina klase od $150 \text{ m}^3/\text{s}$. Prva klasa se definiše kao interval sa protocima $59.4 \leq Q < 200$, druga kao interval $200 \leq Q < 350$, i tako redom do poslednje klase koja predstavlja interval $1700 \leq Q \leq 1740$ (tabela 6.3). Zatim se prebroje protoci koji pripadaju pojedinim klasama (treća kolona tabele 6.3), dok se trajanje određuje uzastopnim sabiranjem frekvencija od poslednje klase ka prvoj (poslednja kolona tabele 6.3). Ova linija trajanja je prikazana na slici 6.33, gde treba obratiti pažnju da se trajanje iz tabele 6.3 nanosi na donju granicu klase (jer ovde trajanje predstavlja broj dana sa protocima većim ili jednakim od donje granice klase), kao i da je trajanje od 1 dana pridruženo i najvećoj izmerenoj vrednosti od $1740 \text{ m}^3/\text{s}$.



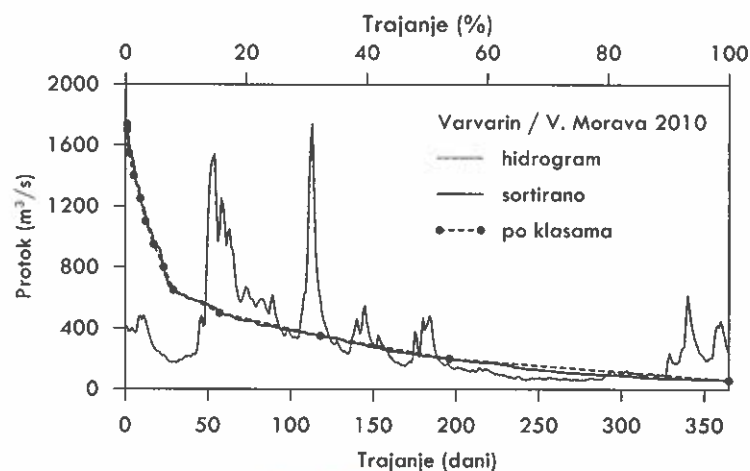
Slika 6.32. Hidrogram dnevnih protoka i kriva trajanja protoka u primeru 6.1.

Tabela 6.2. Protoci za karakteristične procentualne vrednosti trajanja u primeru 6.1.

Trajanje (%)	Trajanje (dani)	Protok (m ³ /s)
1	3.65	1527
5	18.25	938
10	36.5	603
20	73	450
50	182.5	217
80	292	94.5
90	328.5	70.6
95	346.75	67.3

Tabela 6.3. Određivanje krive trajanja u primeru 6.1 podelom raspona protoka na klase.

Klasa protoka (m ³ /s)		Frekvencija (broj protoka u klasi)	Trajanje (dani)
od	do		
59.4	200	169	365
200	350	78	196
350	500	61	118
500	650	28	57
650	800	6	29
800	950	6	23
950	1100	5	17
1100	1250	3	12
1250	1400	4	9
1400	1550	3	5
1550	1700	1	2
1700	1740	1	1



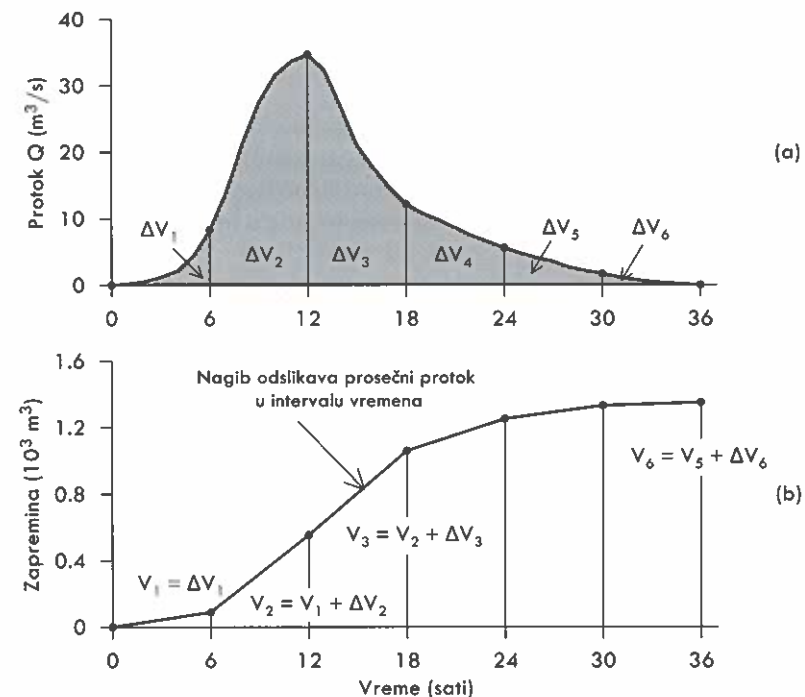
Slika 6.33. Kriva trajanja protoka u primeru 6.1 određena podelom na klase u odnosu na krivu trajanja dobijenu sortiranjem protoka u opadajući niz.

6.4.4 Sumarna linija zapremine

U nekim hidrološkim analizama korisne informacije daje *sumarna linija zapremine*.⁵ Za zadati hidrogram $Q(t)$ u nekom profilu, ova linija pokazuje koliko iznosi ukupna zapremina vode protekle kroz dati profil do posmatranog trenutka t . Drugim rečima, to je ukupna zapremina oticaja sa sliva datog profila do trenutka t . U matematičkom smislu, sumarna linija zapremine $V(t)$ je integralna funkcija hidrograma $Q(t)$:

$$V(t) = \int_0^t Q(s) ds \quad (6.21)$$

⁵ Pored termina *sumarna linija zapremine*, koriste se i termini *sumarna linija protoka* i *sumarna linija oticaja*.



Slika 6.34. Sumarna linija zapremine: (a) određivanje zapremina vode iz hidrograma u zadatim intervalima vremena; (b) konstrukcija sumarne linije zapremine.

U praktičnim proračunima, hidrogram se predstavlja vrednostima protoka Q_j u diskretnim vremenskim trenucima t_j ($j = 0, 1, 2, \dots, n$), kao što je prikazano na slici 6.34-a. Zapremina vode protekle kroz razmatrani profil u intervalu vremena (t_{j-1}, t_j) može se odrediti približnom integracijom (pomoću trapeznog pravila):

$$\Delta V_j = \int_{t_{j-1}}^{t_j} Q dt \approx \frac{Q_{j-1} + Q_j}{2} (t_j - t_{j-1}), \quad j = 1, 2, \dots \quad (6.22)$$

Za jednake vremenske intervale dužine Δt gornji izraz glasi:

$$\Delta V_j \approx \frac{Q_{j-1} + Q_j}{2} \Delta t, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (6.23)$$

Ordinata sumarne linije zapremine u trenutku t_j tada je jednaka zbiru svih priraštaja zapremine do tog trenutka:

$$V_j = \int_0^{t_j} Q dt \approx \sum_{k=1}^j \Delta V_k = V_{j-1} + \Delta V_j, \quad j = 1, 2, \dots \quad (6.24)$$

Za konstrukciju sumarne linije je važno naglasiti da je početna ordinata zapremine (u početnom trenutku t_0) jednaka nuli, a da se naredne ordinata dobijaju uzastopnim sabiranjem priraštaja zapremine (slika 6.34-b):

$$\begin{aligned} V_0 &= 0 \\ V_j &= V_{j-1} + \Delta V_j, \quad j=1,2,\dots,n \end{aligned} \quad (6.25)$$

S obzirom da sumarna linija zapremine predstavlja integralnu krivu protoka, tada se trenutni protok može shvatiti i kao izvod sumarne linije zapremine, odnosno kao njen nagib. U praktičnim proračunima taj nagib se računa približno kao količnik priraštaja zapremine i priraštaja vremena, što predstavlja prosečan protok u tom intervalu:

$$\bar{Q}_j = \frac{\Delta V_j}{\Delta t}, \quad j=1,2,\dots,n \quad (6.26)$$

Sledi da se iz sumarne linije zapremine može odrediti prosečan protok u intervalu vremena između dva proizvoljna trenutka t_1 i t_2 :

$$\bar{Q} = \frac{V(t_2) - V(t_1)}{t_2 - t_1} \quad (6.27)$$

Jedna od najčešćih primena sumarne linije oticaja je u proračunu bilansa voda u retenzionim prostorima (akumulacionim jezerima, retenzijama, rezervoarima za snabdevanje vodom itd.). Ako se formira sumarna linija dotoka, tj. ulaza u retenzioni prostor $V_U(t)$ i sumarna linija isticanja, tj. izlaza iz retenzionog prostora $V_I(t)$, tada se može pokazati da je stanje zapremine u retenzionom prostoru nekom trenutku t u odnosu na početno stanje jednako razlici sumarnih linija zapremina ulaza i izlaza:

$$V(t) = V_0 + V_U(t) - V_I(t) \quad (6.28)$$

gde je V_0 početna zapremina vode u retenzionom prostoru, a $V(t)$ je zapremina vode u retenzionom prostoru u trenutku t .

Primer 6.2. Na osnovu podataka o srednjim mesečnim protocima u 1979. godini na stanici Bogovađa na reci Ljig (tabela 6.4) odrediti i nacrtati sumarnu liniju zapremine za datu godinu. Odrediti i srednji godišnji protok na ovoj stanici, kao i prosečan protok u periodu jun-avgust.

Rešenje. Na osnovu raspoloživih podataka o srednjim mesečnim protocima (treća kolona tabele 6.4), mesečne zapremine oticaja na ovoj hidrološkoj stanici mogu se odrediti kao:

$$V_m = \bar{Q}_m T_m \quad m=1,2,\dots,12 \quad (6.29)$$

gde je \bar{Q}_m srednji mesečni protok za mesec m , a T_m dužina vremenskog intervala za taj mesec (četvrta kolona tabele 6.4). Mesečne zapremine su prikazane u petoj koloni tabele 6.4, a u šestoj ordinate sumarne linije zapremine koje se dobijaju prema izrazu (6.25), odnosno uzastopnim sabiranjem mesečnih zapremina. Dobijena sumarna linija prikazana je na slici 6.35.

Poslednja ordinata sumarne linije zapremine od $139.1 \times 10^6 \text{ m}^3$ predstavlja ukupnu godišnju zapreminu oticaja V_{god} do ove hidrološke stanice. Srednji godišnji protok tada je jednak (prema izrazu 6.17):

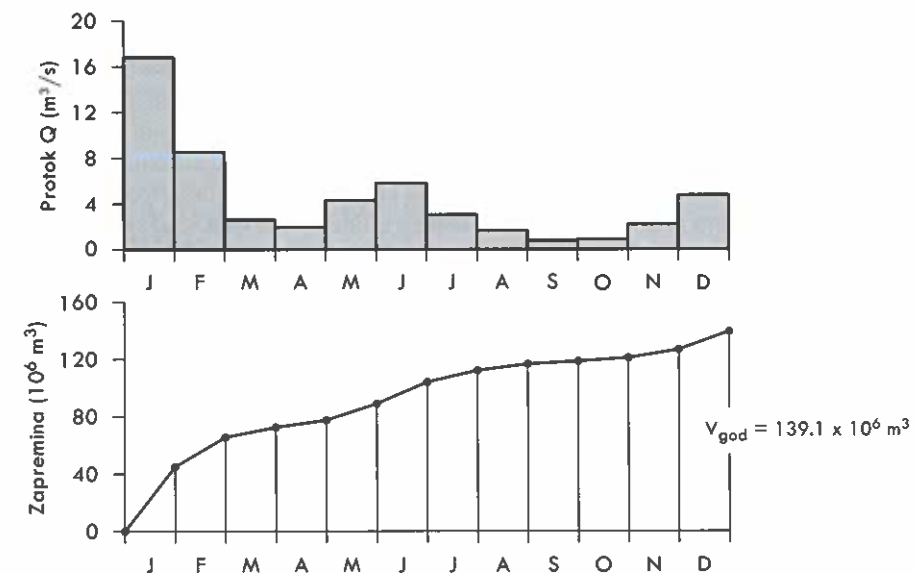
$$\bar{Q}_{\text{god}} = \frac{V_{\text{god}}}{T_{\text{god}}} = \frac{139.1 \cdot 10^6 \text{ m}^3}{365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 \text{ s}} = 4.41 \text{ m}^3/\text{s}$$

Prema izrazu (6.27), prosečan protok u periodu od jun-jul-avgust (JJA) se računa na osnovu ordinata sumarne linije na početku meseca juna (tj. na kraju maja) i na kraju avgusta:

$$\bar{Q}_{\text{JJA}} = \frac{V_8 - V_5}{T_8 - T_5} = \frac{(116.5 - 89) \cdot 10^6 \text{ m}^3}{(30 + 31 + 31) \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 \text{ s}} = 3.46 \text{ m}^3/\text{s}$$

Tabela 6.4. Proračun sumarne linije zapremine u primeru 6.2.

Mesec	m	\bar{Q}_m (m ³ /s)	T_m (dani)	V_m (10 ⁶ m ³)	V (10 ⁶ m ³)
	0				0
Januar	1	16.8	31	45.0	45.0
Februar	2	8.51	28	20.6	65.6
Mart	3	2.58	31	6.9	72.5
April	4	1.94	30	5.0	77.5
Maj	5	4.28	31	11.5	89.0
Jun	6	5.79	30	15.0	104.0
Jul	7	3.03	31	8.1	112.1
Avgust	8	1.65	31	4.4	116.5
Septembar	9	0.75	30	1.9	118.5
Oktobar	10	0.88	31	2.4	120.8
Novembar	11	2.18	30	5.7	126.5
Decembar	12	4.73	31	12.7	139.1



Slika 6.35 Sumarna linija zapremine tokom 1979. godine na stanici Bogovađa na reci Ljig u primeru 6.2. Poslednja ordinata predstavlja ukupnu godišnju zapreminu oticaja.

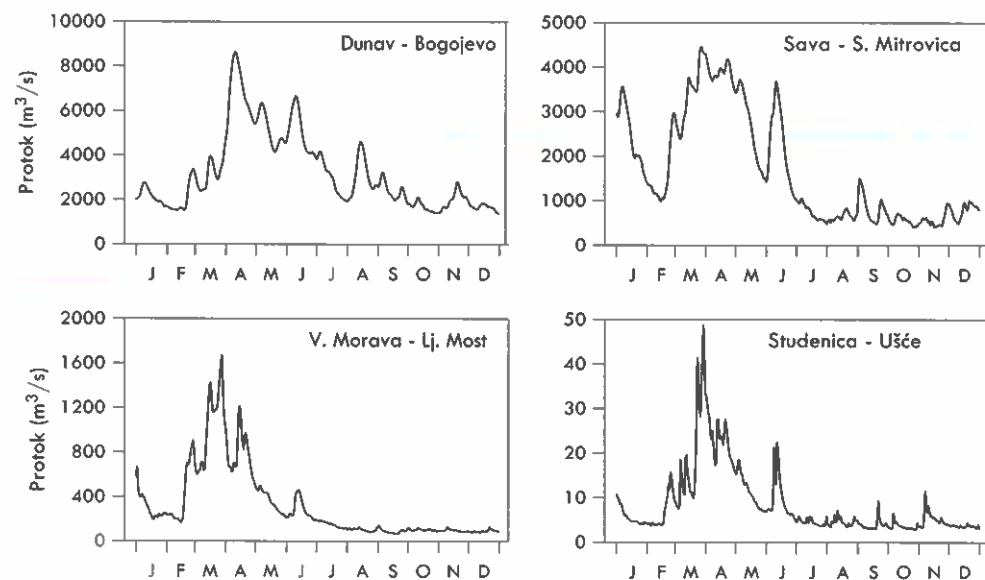
6.5 Hidrogrami oticaja

Hidrogram oticaja prikazuje promene protoka u nekom profilu reke tokom vremena. Hidrogram istovremeno opisuje ponašanje sliva u ciklusu oticaja i odslikava vezu između padavina i oticaja na tom slivu.

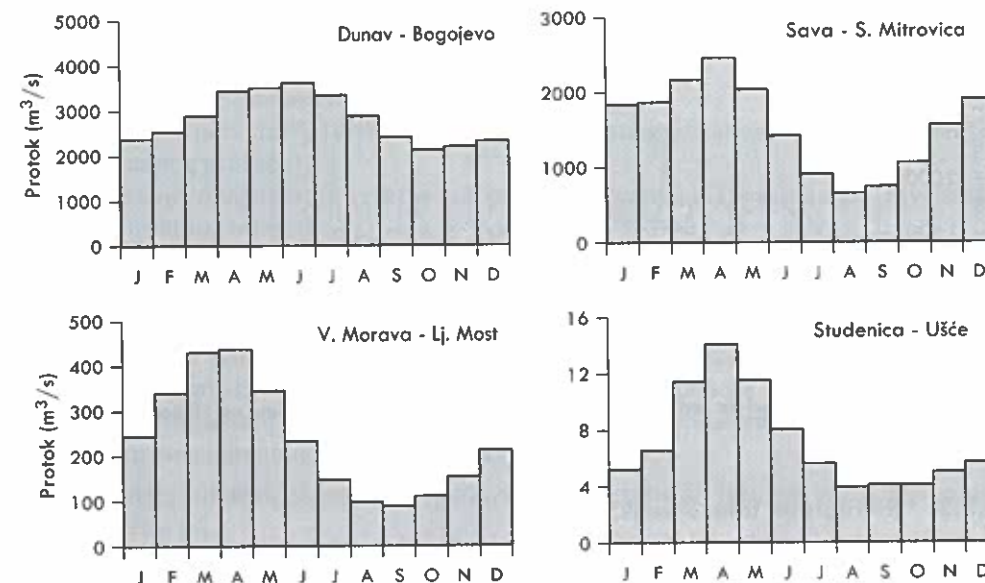
Oticaj ima značajne varijacije u vremenu koje su posledica varijacija u padavinama i drugim meteorološkim elementima od značaja za ciklus oticaja. Te varijacije se mogu posmatrati na različitim nivoima, odnosno u različitim vremenskim razmerama. Kao posledica neke kišne epizode, protok na izlaznom profilu sliva se menja iz minuta u minut ili iz sata u sat (u zavisnosti od veličine sliva). U analizama takvih epizoda potrebno je posmatrati promene protoka sa npr. časovnim vremenskim korakom. Promene oticaja iz meseca u mesec, odnosno po sezonama, mogu se analizirati na hidrogramima dnevnih ili mesečnih protoka, dok se višegodišnje varijacije mogu opisati hidrogramima srednjih godišnjih protoka.

6.5.1 Godišnji hidrogram oticaja

Ako se posmatra *godišnji hidrogram*, odnosno promena protoka unutar godine na nekom slivu, može se uočiti priroda unutargodišnjeg režima oticaja. Na slici 6.36 dati su primeri godišnjih hidrograma na nekim našim rekama, formirani na osnovu podataka o dnevnim protocima. U našem podneblju unutargodišnji režim oticaja generalno karakteriše malovodni period tokom leta i rane jeseni i pojava velikih voda u proleće. Na prikazanim godišnjim hidrogramima mogu se uočiti talasi direktnog oticaja kao značajnijih kišnih epizoda ili naglog topljenja snega, dok je bazni protok uočljiv od septembra do novembra.



Slika 6.36. Primeri godišnjih hidrograma dnevnih protoka tokom 2006. godine.

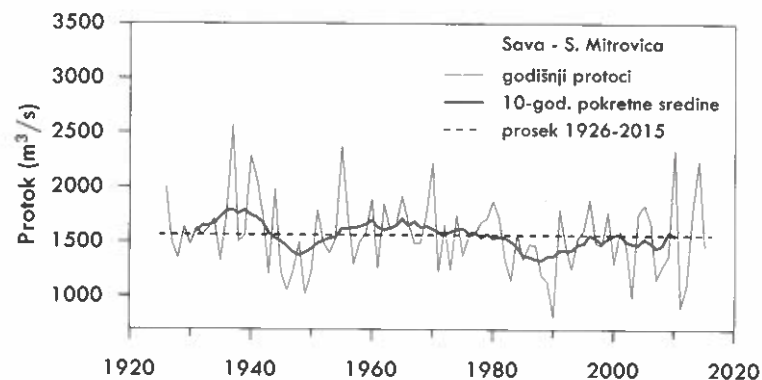


Slika 6.37. Srednji mesečni protoci za period 1950-2016.

Unutargodišnja raspodela oticaja uočava se i na hidrogramima mesečnih protoka, koji predstavljaju filtrirane informacije iz hidrograma dnevnih protoka i omogućavaju lakše opisivanje unutargodišnjeg režima oticaja. Na slici 6.37 prikazani su srednji mesečni protoci na nekoliko hidroloških stanica u Srbiji za period 1950-2016. Većina slivova na unutrašnjim rekama ima sličan režim sa velikim vodama koje se javljaju u proleće i malim vodama u kasno leto i ranu jesen. Izuzeci su stanice na Dunavu na kojima je režim drugačiji zbog različitog vremena pristizanja oticaja usled topljenja snega sa različitih delova Dunavskog sliva.

Režime oticaja na rekama na globalnom nivou Haines i sar. (1988) su klasifikovali u 15 grupa na osnovu podataka sa 969 rečnih profila širom sveta. Prema ovoj klasifikaciji, skoro cela Srbija pripada 14. grupi sa velikim vodama koje se javljaju u rano i srednje proleće bilo kao posledica padavina bilo usled topljenja snega, dok se najmanji protoci javljaju tokom leta sa ponovnim porastom u kasnu jesen. Ovakav režim je zastupljen i na Iberijskom poluostrvu, u maloj Aziji, na istočnoj obali SAD i u pojedinim zemljama južne hemisfere.

Hidrogrami oticaja u višegodišnjem periodu mogu da ukažu na višegodišnja kolebanja režima oticaja i na eventualne promene do kojih je došlo u slivu usled prirodnih ili antropogenih uticaja. Na slici 6.38 prikazani su godišnji protoci reke Save za profil hidrološke stanice Sremska Mitrovica u periodu 1926-2015, koji pokazuje da su se srednji godišnji protoci kretali u rasponu od 813 m³/s 1990. godine do 2570 m³/s 1937. godine, dok je prosečan protok u celokupnom periodu bio 1570 m³/s. Na istom dijagramu prikazana je linija pokretnih sredina (videti odeljak 10.2.4) u desetogodišnjim intervalima koja pokazuje da su se na ovoj stanici tokom 85 godina osmatranja smenjivali ciklusi vodnih i sušnih godina.



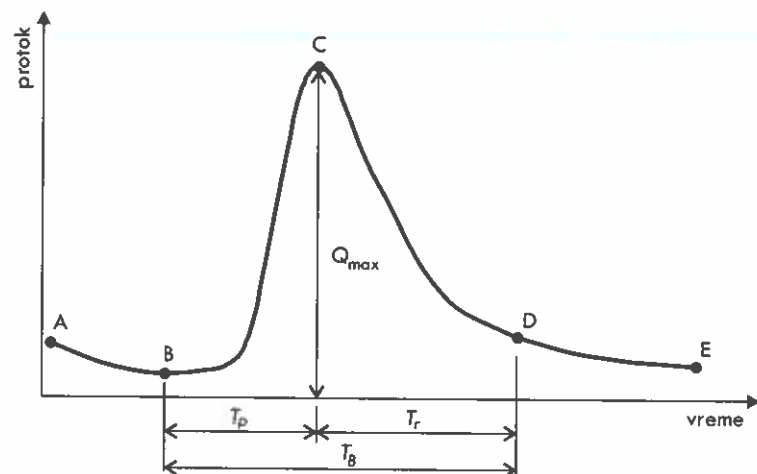
Slika 6.38. Godišnji protoci na reci Savi kod Sremske Mitrovice, pokretne sredine na 10 godina i višegodišnji proseki.

6.5.2 Hidrogrami talasa velikih voda

Talasi protoka koji su posledica kišnih epizoda ili topljenja snega (ili kombinacije ovih pojava) obično se izdvajaju iz godišnjeg hidrograma da bi se na njima proučavala veza između padavina i oticaja. Na hidrogramu oticaja usled jedne kišne epizode (slika 6.39) mogu se uočiti neke karakteristične tačke: direktan oticaj počinje u tački B, dostiže maksimum u tački C, a završava se u tački D. Delovi hidrograma između ovih karakterističnih tačaka nazivaju se:

- rastuća grana direktnog oticaja (segment BC),
- opadajuća grana direktnog oticaja (segment CD),
- recesiona grana baznog oticaja (segmenti AB i DE).

Recesiona grana baznog oticaja odslikava bazni protok koji se javlja u vodotoku kada nema padavina.



Slika 6.39. Elementi hidrograma usled jedne kišne epizode.

Karakteristični elementi hidrograma direktnog oticaja su sledeće veličine:

- maksimalni protok Q_{max} ,
- baza hidrograma T_B (trajanje direktnog oticaja),
- vreme porasta T_p (vreme od početka direktnog oticaja do dostizanja maksimalnog protoka),
- vreme opadanja T_r (vreme od pojave maksimalnog protoka do završetka direktnog oticaja).

6.5.3 Faktori koji utiču na oblik hidrograma oticaja

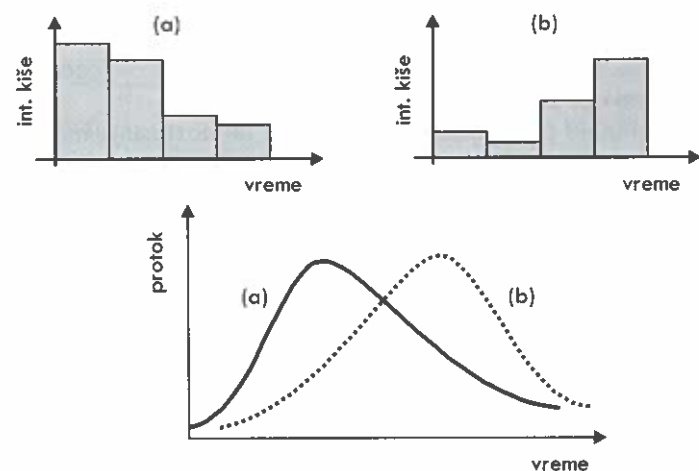
Hidrogram oticaja na izlaznom profilu sliva je zbirni rezultat velikog broja procesa koji se dešavaju na slivu i samim tim zavisi od više faktora. S obzirom da oticaj pre svega formira od dela padavina koji se nije vratio u atmosferu putem evapotranspiracije, količina i dinamika otekle vode zavisiće od:

- meteoroloških parametara (padavina, temperatura, vlažnosti vazduha, brzine vetra itd.),
- fizičkih karakteristika sliva, i
- antropogenih uticaja na slivu.

Na dinamiku oticanja pre svega utiče vrsta padavina. Ukoliko se padavine javljaju u obliku snega i ukoliko se formira snežni pokrivač, sliv neće imati direktnu reakciju na te padavine kao u slučaju značajnijih kiša. Dinamika topljenja snega zavisi od temperature vazduha, ali do oticaja zapravo neće doći sve dok topljenje snega ne izazove zasićenje tla ispod snežnog pokrivača.

Kada je u pitanju oticaj usled kišnih epizoda, tada na količinu i dinamiku oticaja utiču različite karakteristike kiša, kao što su ukupna visina, trajanje kiše, intenzitet kiše i njegova promena kroz vreme. Kiše male ukupne visine na prirodnim slivovima praktično ne mogu da izazovu oticaj jer će se najveći deo pale kiše potrošiti na intercepciju (zadržavanje na vegetaciji) i na evapotranspiraciju. Formiranje oticaja od kiša male ukupne visine može se očekivati samo na nepropusnim površinama kao što su delovi urbanih slivova ili putna infrastruktura. Ako su kiše slabijeg ili umerenog intenziteta, trajanje kiše utiče na sličan način kao i ukupna visina jer se za kratko vreme ne može postići značajnija visina kiše (Petrović i Despotović, 1998). Ako su u pitanju kratkotrajne jake kiše kao što su letnji pljuskovi, tada njihov veliki intenzitet (npr. preko 1 mm/min) može da nadmaši infiltracioni kapacitet tla i da izazove značajan direktan oticaj. Na nepropusnim površinama na kojima nema infiltracije niti drugih značajnih gubitaka, kratkotrajne kiše velikog intenziteta izazivaju veoma brz odgovor sliva i nagli porast protoka na izlaznom profilu.

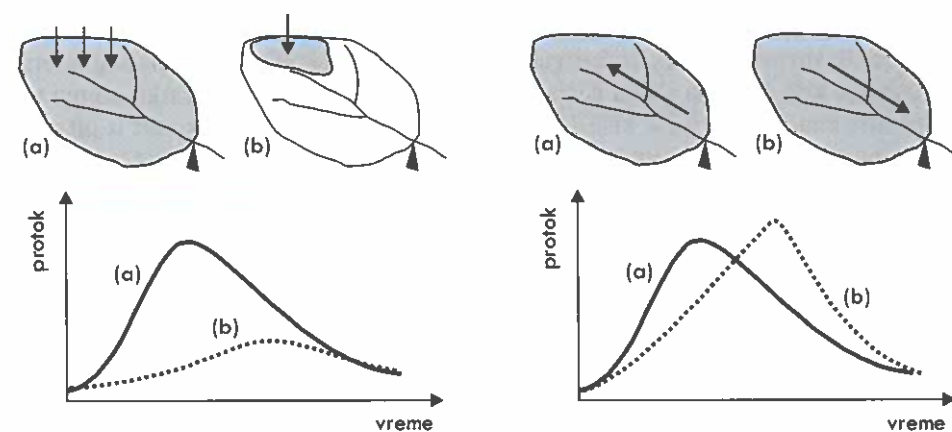
Vremenski raspored intenziteta kiše tokom epizode može imati različit uticaj na oblik hidrograma oticaja. Slika 6.40 pokazuje razlike u obliku hidrograma za kiše sa većim intenzitetima na početku epizode (tzv. rani oblik kiše) u odnosu na kišu sa slabijim intenzitetima na početku koje prate veći intenziteti pri kraju epizode (tzv. kasni oblik kiše). Oba hidrograma su prikazana pod pretpostavkom iste početne vlažnosti tla na slivu. Veliki početni intenziteti kiše mogu da prevaziđu infiltracioni kapacitet tla i da proizvedu značajan oticaj bez obzira na početne gubitke. U drugom slučaju, slabiji



Slika 6.40. Uticaj vremenskog rasporeda intenziteta kiše na hidrogram oticaja na izlaznom profilu.

početni intenziteti se „troše“ na gubitke i doprinose povećanju vlažnosti tla, tako da pri pojavi većih intenziteta pri kraju epizode može doći do značajnog oticaja.

Prostorni raspored kiša ima značajnu ulogu i za količinu i za dinamiku oticaja. Kiša koja pada na celu površinu sliva daje veću količinu oticaja na izlaznom profilu nego kiša koja je zahvatila samo deo sliva (slika 6.41 levo). Vreme porasta hidrograma i maksimalna ordinata za sliv delimično zahvaćen kišom zavisice od toga koji je deo sliva zahvaćen i koliko je vreme putovanja vode sa tog dela sliva. Kretanje olujnih sistema sa pomeranjem jezgra sa najvećim padavinama preko sliva takođe utiče na oblik hidrograma oticaja u zavisnosti od toga da li se oluja kreće u smeru od nizvodnog kraja sliva ka uzvodnom ili obrnuto (slika 6.41 desno). Oblik hidrograma tada zavisi od brzine putovanja vode sa dela sliva koji je najpre zahvaćen olujnim sistemom.



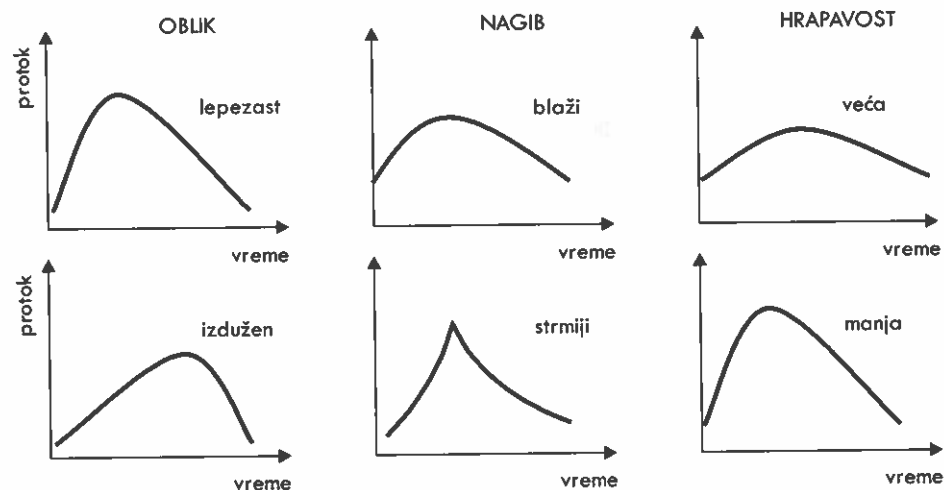
Slika 6.41. Uticaj prostornog rasporeda kiše (levo) i kretanja oluje (desno) na hidrogram oticaja na izlaznom profilu.

S obzirom da je evapotranspiracija najveći gubitak sa gledišta oticaja, svi meteorološki parametri koji utiču na intenzitet isparavanja i transpiracije takođe imaju uticaj i na formiranje oticaja. Ovi faktori su detaljno opisani u poglavlju 4.1. Najveći uticaj evapotranspiracija ima u dužim sušnim periodima, kada se gube zalihe vode (površinske i podzemne) u slivu. Međutim, u kraćim vremenskim intervalima tokom jačih kišnih epizoda i prolaska talasa oticaja, uticaj evapotranspiracije se može zanemariti.

Fizičke karakteristike sliva koje utiču na formiranje i oblik hidrograma oticaja su mnogobrojne, počevši od veličine sliva, njegovog oblika, nagiba, vrste i karakteristika pokrivača, geološkog sastava tla i njegove vodopropustljivosti, karakteristika površinskih slojeva tla i sadržaja vode u njemu, podzemnih voda, kao i razgranatosti rečne mreže i njenih morfoloških i hidrauličkih karakteristika. Neki od ovih faktora su praktično nepromenljivi, dok se neki menjaju brže (npr. sadržaj vlage u površinskom sloju, vegetacija), sporije (nivoi podzemnih voda) ili tokom veoma dugih perioda (rečna morfologija).

Veličina sliva ima ključni uticaj na količinu oticaja i njegovu dinamiku. Ne postoji jasna granica između malih i velikih slivova, ali je gradacija uvek prisutna. Kao najmanji slivovi mogu se zamisliti male slivne površine u gradskim sredinama, kao što su krovovi, parkinzi, delovi ulica između dva slivnika itd. Ovako mali slivovi su interesantni zato što su praktično nepropusni, zbog čega će sva voda koja na njih dospe i da otekne. Na malim slivovima, kako urbanim tako i prirodnim, vreme putovanja vode na slivu je kratko, što znači da se oticaj brzo pojavljuje na izlaznom profilu sliva. Iz tog razloga mali bujični slivovi su kritičniji sa gledišta brze reakcije u odbrani od velikih voda. Kraće vreme putovanja vode na slivu istovremeno ukazuje na to da su za ovakve slivove kritičnije kiše kraćeg trajanja i velikog intenziteta ukoliko se centar oluje nađe baš na razmatranom slivu, kao i nagli porasti temperature koji bi doveli do brzog otapanja snega i još bržeg formiranja oticaja.

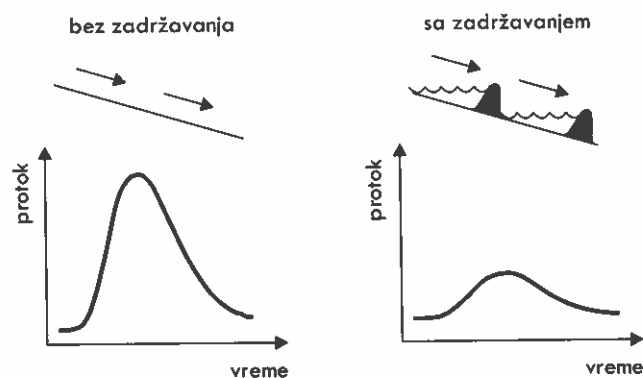
S druge strane, veliki slivovi su po svojoj prirodi veoma heterogeni po raznim fizičkim parametrima (prema pokrivaču, reljefu, geološkom sastavu, itd.) i imaju razgranatu rečnu mrežu sa jasno definisanim pritokama i njihovim podslivovima. Zato je odgovor velikih slivova na padavine rezultat superpozicije oticaja sa različitih delova sliva različitih karakteristika, a naročito različitih vremena putovanja vode do izlaznog profila. S obzirom da voda sa pojedinih delova velikog sliva dugo putuje, na izlaznom profilu takvog sliva se ne očekuju nagle promene protoka kao na malim slivovima sa kratkim vremenom putovanja. Pored toga, na velikim slivovima se retko očekuje ravnomerni prostorni raspored padavina kao na manjim slivovima, zbog čega je moguće da se oticaj formira samo na delu sliva i da na izlaznom profilu ne bude značajnijeg povećanja protoka. Sa ove tačke gledišta, za velike slivove su kritičnije dugotrajne kiše frontalnog tipa koje po svojoj prirodi zahvataju veća područja. Takve kiše će, čak i pri slabijim intenzitetima, najpre doprinositi povećanju vlažnosti tla i eventualno dovesti i do njegovog zasićenja na velikom delu sliva, posle čega se može formirati značajan oticaj na izlaznom profilu. Na velikim slivovima je takođe moguće da se na njegovom većem delu formira snežni pokrivač, a dinamika njegovog topljenja će zavisiti od prostornih varijacija temperature na slivu. Tako se može desiti da oticaj od topljenja snega sa različitih visokih delova sliva stigne u različito vreme, dok bi istovremeno topljenje snega dovelo do značajnih velikih voda.



Slika 6.42. Uticaj oblika, nagiba i hrapavosti površina na slivu na hidrogram oticaja na izlaznom profilu.

Uticaj oblika, nagiba i hrapavosti sliva prikazan je na slici 6.42. Na ovoj slici se vidi da izduženi slivovi imaju „razvučeniji“ hidrogram oticaja u odnosu na lepezast oblik sliva zbog dužeg vremena putovanja vode do izlaznog profila. Strmiji slivovi će imati i strmiji hidrogram oticaja sa većim maksimumom i kraćim vremenom porasta u odnosu na slivove sa blažim nagibom. Hrapavost terena kao otpor tečenju takođe ima uticaj na maksimalnu ordinatu i vreme porasta: na glađim površinama kao što su nepropusne urbane površine ili snežni pokrivač sa ledenom pokoricom imaće strmije hidrograme u odnosu na površine sa većom hrapavošću kao što su prirodni tereni. Hrapavost terena se može značajno promeniti obradom zemljišta ili nakon požara, čime će se promeniti i karakter oticanja sa razmatranog sliva.

Zadržavanje vode na slivu takođe utiče na dinamiku i preraspodelu oticaja (slika 6.43). Sliv može imati veće ili manje prirodne mogućnosti za zadržavanje vode, koje se najviše ogledaju kroz karakteristike tla u pogledu vodopropustljivosti, od čega zavisi vreme putovanja potpovršinskog oticaja do izlaznog profila sliva. Pored toga, na slivu



Slika 6.43. Uticaj zadržavanja vode u slivu na hidrogram oticaja na izlaznom profilu.

moгу postojati prirodne depresije u kojima se oticaj zadržava, kao i stalna jezera ili močvare. Samo rečno korito takođe može imati sposobnost za zadržavanje vode na mestima većih proširenja korita. Osim prirodnog zadržavanja vode, izgrađeni objekti sa retenzionim prostorima namenjeni za zadržavanje ili čuvanje vode (akumulaciona jezera, retenzije i sl.) takođe transformišu hidrogram oticaja tako da on ima duže vreme porasta i manji maksimum.

6.6 Analiza hidrograma oticaja

6.6.1 Odvajanje baznog i direktnog oticaja

Iako je podela na bazni i direktni oticaj na današnjem nivou razvoja hidrologije samo konceptualna, da bi se omogućili praktični proračuni samo sa baznim ili samo sa direktnim oticajem u literaturi su predložene različite metode za razdvajanje ove dve vrste oticaja.

Smatra se da bazni protoci, tj. protoci u sušnom periodu, opadaju eksponencijalno s vremenom i da se recesiona grana hidrograma može aproksimirati funkcijom:

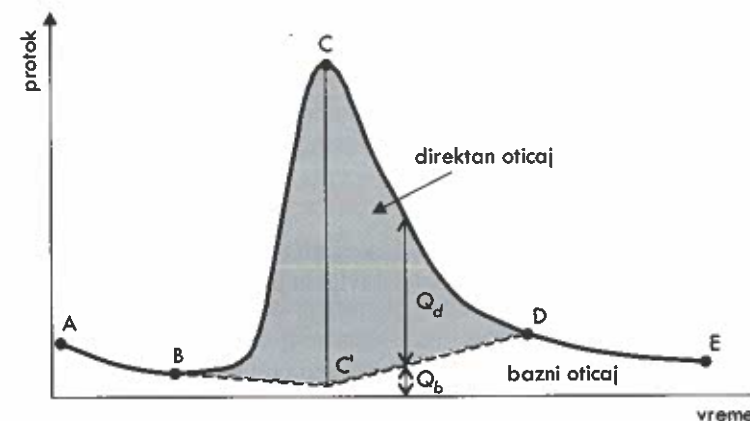
$$Q(t) = Q_0 e^{-(t-t_0)/k} \quad (6.30)$$

gde je Q_0 protok u trenutku t_0 , a k recesioni koeficijent koji ima dimenziju vremena. Gornji izraz ukazuje da su logaritmi protoka linearno zavisni od vremena:

$$\ln Q(t) = \ln Q_0 - (t - t_0) / k \quad (6.31)$$

Drugim rečima, recesiona grana hidrograma biće prava linija ako se hidrogram nacrtava u semi-logaritamskoj razmeri (sa protocima u logaritamskoj, a vremenom u linearnoj razmeri). Ova činjenica se koristi da se na hidrogramu odrede tačke početka i prestanka direktnog oticaja.

Jedna od mogućih metoda za odvajanje baznog od direktnog oticaja (slika 6.44) počinje identifikacijom tačke B kao početka direktnog oticaja na mestu gde počinje



Slika 6.44. Jedna metoda za odvajanje baznog i direktnog oticaja.

porast protoka. Segment AB se produžava do vremena pojave maksimalnog protoka (tačka C') u skladu sa opadanjem protoka prethodne recesione grane. Zatim se određuje tačka D, tj. prestanak direktnog oticaja, kao tačka u kojoj opadajuća grana hidrograma u semi-logaritamskoj razmeri postaje prava linija, i ona se spaja sa tačkom C'.

Prikazana metoda, kao i druge grafičke metode za odvajanje baznog od direktnog oticaja podložne su subjektivnim procenama. U novije vreme su tražene automatske metode za odvajanje baznog od direktnog oticaja, pri čemu se one primenjuju na ceo hidrogram oticaja u dužem periodu, a ne samo na pojedine talase. Jedna od takvih metoda je metoda rekurzivnog filtriranja podataka, koja potiče iz teorije obrade digitalnih signala. Ova metoda se često primenjuje u hidrologiji (npr. Nathan & McMahon, 1990; Serinaldi & Grimaldi, 2011).

6.6.2 Zapremina otekle vode, efektivne padavine i koeficijent oticaja

Ukupna zapremina oticaja V_o u nekom vremenskom intervalu dužine T predstavlja površinu ispod hidrograma oticaja u razmatranom intervalu i može se odrediti integracijom protoka u vremenu:

$$V_o = \int_0^T Q(t) dt \quad (6.32)$$

Ukupna visina efektivnih padavina P_e jednaka je sloju oticaja, odnosno zapremini oticaja po jedinici površine sliva:

$$P_e = \frac{V_o}{A} \quad (6.33)$$

Ukupni gubici su razlika ukupnih (bruto) padavina P i efektivnih (neto) padavina P_e :

$$P_g = P - P_e \quad (6.34)$$

Odnos visina efektivnih i ukupnih padavina naziva se *koeficijent oticaja*:

$$\eta = \frac{P_e}{P} \quad (6.35)$$

Koeficijent oticaja η je ujedno i odnos zapremina otekle vode (zapremine oticaja) i zapremine pale vode:

$$\eta = \frac{P_e \cdot A}{P \cdot A} = \frac{V_o}{V_p} \quad (6.36)$$

U analizama direktnog oticaja, odnosno talasa epizoda velikih voda, od interesa je površina ispod hidrograma direktnog oticaja, koja predstavlja zapreminu direktnog oticaja V_d za jednu kišnu epizodu:

$$\bar{V}_d = \int_0^{T_g} Q(t) dt \quad (6.37)$$

U kratkotrajnom periodu koji obuhvata samo bazu hidrograma direktnog oticaja, efektivna kiša se može odrediti kao sloj direktnog oticaja, odnosno kao:

$$P_{e,d} = \frac{V_d}{A} \quad (6.38)$$

6.7 Slivovi i njihove karakteristike

6.7.1 Granica i izlazni profil sliva

Sliv je osnovna jedinica u analizi oticaja i kao takav zaslužuje posebnu pažnju. Sliv se definiše kao deo terena sa koga voda otiče do određenog profila na vodotoku ili do ušća reke u drugu reku, jezero ili more. Taj profil se naziva *izlazni profil sliva*.

Granica sliva ili *vododelnica* je linija koja razdvaja jedan sliv od okolnih slivova (WMO & UNESCO, 2012). Granica sliva se može odrediti kao *topografska granica* ako se odredi prema reljefu tako da sva voda koja padne na površinu terena dospe do izlaznog profila sliva. U tom slučaju granica sliva prati vrhove brda i planina (odnosno najviše tačke reljefa), odakle voda gravitira ka razmatranom izlaznom profilu. Ovakva definicija sliva i njegove granice nije uvek odgovarajuća, jer ne uključuje podzemne puteve vode. Stvarna linija razdvajanja dva sliva se ne mora uvek preklapati sa topografskom vododelnicom. Takav slučaj se, na primer, može javiti ako se u tlu na slivu nalazi proslojak nepropusne stenske mase čija je konfiguracija takva da se potpovršinski oticaj usmerava ka drugom topografskom slivu (slika 6.45). Ako je moguće da se odredi stvarna linija razdvajanja dva sliva, onda se takva granica naziva *hidrološka granica* sliva. Složena geološka struktura, a naročito prisustvo karsta, omogućava da voda sa jednog topografskog sliva otekne u drugi, što stvara problem ne samo sa gledišta definisanja površine sliva, već sa gledišta pouzdanog određivanja bilansa voda na slivu.

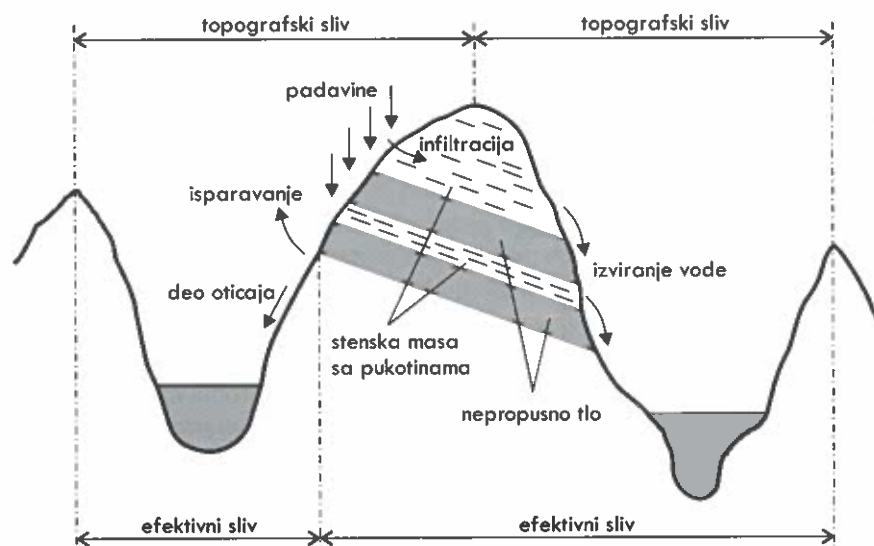
Na slivovima u kojima postoje izgrađeni objekti neophodno je da se granica sliva odredi u skladu sa uticajem tih objekata na oticaj. Na primer, put koji preseca padinu približno po izohipsi preseca i put površinskog oticaja. Značajnije izmene puteva vode su prisutne i na slivovima sa značajnim prebacivanjem vode iz jednog u drugi sliv u potrebe vodosnabdevanja ili hidroenergetike. Ovakve intervencije ne samo da menjaju granice sliva, već i njegov vodni bilans.

Kao osnova za određivanje topografske vododelnice mogu da posluže topografske karte ili digitalni modeli terena. Za sagledavanje hidrološke vododelnice korisne su i geološke i hidrogeološke podloge.

6.7.2 Geomorfološke karakteristike slivova

Glavni morfološki faktori koji utiču na oticaj sa jednog sliva su površina sliva, njegov oblik, nagib, orijentacija, kao i sama rečna mreža. Pored morfoloških faktora, veoma važnu ulogu imaju vrsta tla i zemljišni pokrivač.

Veličina sliva. Količina otekle vode zavisi od veličine sliva kao površine sa koje se voda sakuplja da bi se pojavila na izlaznom profilu. Površina sliva se može odrediti



Slika 6.45. Primer za situaciju u kojoj se topografska vododelnica ne poklapa sa stvarnom hidrološkom vododelnicom (prema Musy & Higy, 2011).

planimetrisanjem (bilo digitalizacijom granica sliva u nekom prigodnom softveru ili postavljanjem kvadratne mreže preko topografske karte i brojanjem elemenata mreže).

Reljef. Uticaj reljefa na oticaj je očigledan zbog toga što reljef diktira puteve vode, kao i zbog toga što padavine i temperature, kao glavne meteorološke veličine koje utiču na količine oticaja, zavise od nadmorske visine. Karakteristike reljefa u kontekstu oticaja se najčešće prikazuju preko krive zastupljenosti nadmorskih visina na slivu. Ta kriva se naziva *hipsometrijska kriva* i pokazuje na apscisi koji deo površine sliva ima nadmorske visine jednake ili veće od visine Z na ordinati (slika 6.46). Najmanja nadmorska visina na slivu odgovara tački izlaznog profila sliva, dok najveća nadmorska visina odgovara najvišoj tački na slivu.

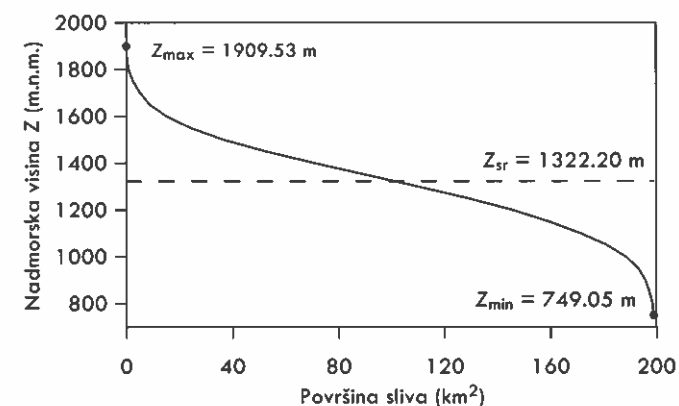
Prosečna nadmorska visina na slivu može se odrediti iz hipsometrijske krive kao:

$$Z_{sr} = \frac{\sum \Delta A_i \cdot Z_i}{A} \quad (6.39)$$

gde je A ukupna površina sliva, ΔA_i površina između dve izohipse, a Z_i reprezentativna nadmorska visina na toj površini (najčešće prosek između nadmorskih visina dve izohipse). Ako se raspoložuje digitalnim modelom terena u rasterskom obliku, prosečna nadmorska visina na slivu se može odrediti kao aritmetička sredina nadmorskih visina iz svih elemenata rasterske mreže.

Hipsometrijske krive se koriste u hidrološkim analizama za određivanje prosečne visine kiše na slivu, kao i u proračunima topljenja snega.

Nagib sliva ima značajnu ulogu s obzirom da je gravitacija glavni pokretač kretanja vode na slivu. Prosečan nagib sliva I_{SL} se može približno proceniti kao (Musy & Higy, 2011):



Slika 6.46. Hipsometrijska kriva sliva reke Ljubatske ukupne površine 198 km².

$$I_{SL} = \frac{L \cdot \Delta Z}{A} \quad (6.40)$$

gde je L ukupna dužina izohipsi na slivu, ΔZ ekvidistanca između izohipsi i A ukupna površina sliva. Znatno tačnija vrednost prosečnog nagiba sliva može se dobiti iz digitalnog modela terena.

Podužni profil vodotoka se može konstruisati uz pomoć topografske karte tako što se očitaju dužine deonica vodotoka između susednih izohipsi. Ako se raspoložuje digitalnim modelom terena i digitalizovanim glavnim tokom nekog sliva, podužni profil se može odrediti i presecanjem ("transektom") digitalnog modela terena linijom glavnog toka. Primer podužnog profila prikazan je na slici 6.47.

Prosečan nagib glavnog toka dobija se kao odnos razlike između nadmorske visine „izvora“ (najudaljenije tačke na glavnom toku) Z_{max} i nadmorske visine izlaznog profila sliva Z_0 , i dužine glavnog toka L :

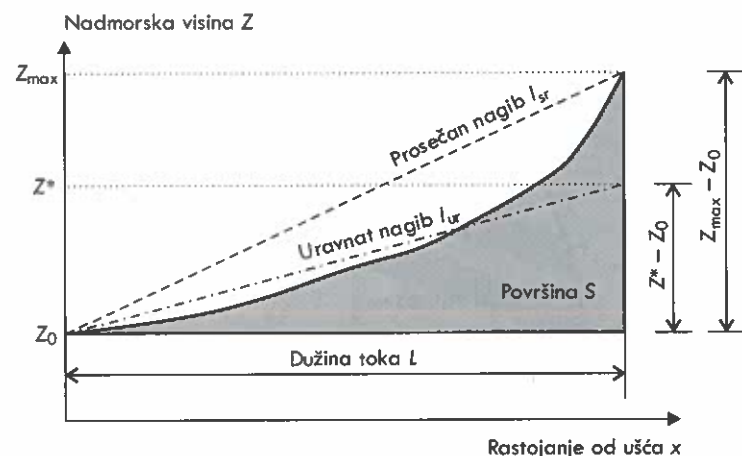
$$I_{sr} = \frac{Z_{max} - Z_0}{L} \quad (6.41)$$

Uravnati nagib glavnog toka određuje se iz podužnog profila kao nagib prave linije koja se crta tako da površina ispod nje bude jednaka površini S ispod linije podužnog profila (slika 6.47). Da bi se odredila kota Z^* koja definiše ovu pravu zajedno sa kotom izlaznog profila Z_0 , postavlja se uslov:

$$S = \int_0^L (Z - Z_0) dx = \frac{1}{2} (Z^* - Z_0) L \quad (6.42)$$

Kada se ova kota odredi, uravnati nagib glavnog toka jednak je:

$$I_{ur} = \frac{Z^* - Z_0}{L} \quad (6.43)$$



Slika 6.47. Primer podužnog profila reke i definicije prosečnog i uravnatog nagiba.

6.7.3 Primena GIS-a za određivanje karakteristika sliva

Fizičke karakteristike slivova se danas uobičajeno analiziraju uz pomoć alata kao što su geografski informacijski sistemi (GIS). Geoprostorni podaci se u GIS-u predstavljaju u digitalnom obliku na dva osnovna načina. Rasterski prikaz podrazumeva mrežu kvadratnih elemenata (piksela) sa odgovarajućim vrednostima. Ovaj prikaz je pogodan za nadmorske visine, karte padavina, vegetacije, namene površina i slično. Vektorski prikaz podataka obuhvata tačke, linije i poligone, a pogodan je za prikazivanje rečne mreže, granica slivova, lokacija mernih stanica itd. Geoprostorni podaci se u GIS-u organizuju u slojeve koji se međusobno mogu preklapati da bi se dobio željeni prikaz ili da bi se sprovela neka analiza. Na primer, za prikaz nekog sliva rasterski sloj sa nadmorskim visinama može se preklapati sa vektorskim slojevima sa granicom sliva i rečnom mrežom. Ili, za određivanje prosečnih padavina na slivu, rasterski prikaz padavina se može preklapati sa granicom sliva.

Pod digitalnim modelom terena se podrazumeva skup podataka koji opisuje reljef terena. Digitalni model terena može da bude rasterski, tj. u obliku kvadratne mreže, kada se zove digitalni model visina. Veličina kvadratnog piksela u rasterskom digitalnom modelu terena utiče na kvalitet modela. Što je veličina piksela manja, model bolje opisuje teren i kaže se da ima finiju rezoluciju; obrnuto, modeli grublje rezolucije su manje tačni u opisivanju reljefa. Potrebna rezolucija za prikaz reljefa nekog sliva zavisi od veličine sliva i zadatka koji se rešava. Za veće slivove od više hiljada km² može biti dovoljna i rezolucija od 1 km x 1 km, dok za male slivove je neophodna finija rezolucija. Za gradske slivove potrebna je najfinija moguća rezolucija kako bi se pravilno odredile granice i putevi tečenja vode u odnosu na objekte. Digitalni model terena može da bude i vektorski u obliku mreže trouglova, kada se naziva TIN model (od engl. *triangulated irregular network*). Temena trouglova u TIN modelu mogu da budu na nejednakim rastojanjima, što omogućava da se neki kritični delovi reljefa, kao što su doline reka, bolje opišu.

Tipična primena GIS-a u hidrologiji počinje od pripreme digitalnog modela terena. Postoje javno dostupni digitalni modeli terena (npr, SRTM⁶), ali treba proveriti da li njihova rezolucija i tačnost zadovoljavaju potrebe zadatka na konkretnom slivu. Digitalni modeli se mogu formirati i na osnovu izohipsi digitalizovanih sa topografskih karata. Rečna mreža i granice slivova se takođe mogu digitalizovati sa topografskih karata. U pojedinim softverskim paketima postoji mogućnost automatskog određivanja granice sliva i rečne mreže. U tom slučaju je neophodna kontrola i eventualna korekcija tako dobijenih rezultata jer algoritmi kojima se ove operacije obavljaju imaju ograničenja. Za uspešnu primenu tih algoritama za određivanje slivne površine i rečne mreže neophodno je da digitalni model terena nema „ponore“, odnosno depresije u koje voda može da uđe, ali ne i da izađe. Na osnovu digitalnog modela terena može se odrediti zastupljenost nadmorskih visina (hipsometrijska kriva), prosečna nadmorska visina, kao i lokalni ili prosečni nagib padina na slivu. Iz digitalne rečne mreže može se formirati podužni profil glavnog toka i odrediti karakteristične dužine i nagibi.

⁶ Najčešće korišćen javno dostupan digitalni model terena nastao je u okviru misije satelitskog snimanja *Shuttle Radar Topography Mission* (SRTM; Farr i sar., 2007) i ima rezoluciju od jedne do tri lučne sekunde (oko 30 do 90 m). Nešto kasnije, na osnovu snimanja radiometrom ASTER sa satelita Terra napravljen je i GDEM (Global Digital Elevation Model), iste rezolucije kao SRTM ali sa većom pokrivenošću Zemljine kugle.

7 VEROVATNOĆA I STATISTIKA

Hidrološki procesi odvijaju se u prostoru i vremenu na delimično predvidljiv ili deterministički način, a delimično na slučajan način. Varijacije hidroloških procesa koje su slučajnog karaktera ponekad dominiraju nad varijacijama determinističkog karaktera, pa je tada posmatranje procesa kao čisto slučajnog opravdano. U čisto slučajnom procesu jedan podatak osmatranja procesa ne zavisi od prethodnih ili narednih podataka osmatranja, pa takve podatke nazivamo slučajnim ili međusobno nezavisnim.

Tretiranje hidroloških procesa kao potpuno slučajnih je pogodno za ekstremne hidrološke pojave kao što su velike ili male vode. U standardnoj inženjerskoj praksi najčešći cilj jeste da se odredi veza između veličine hidroloških ekstrema (velikih voda, malih voda ili padavina) i verovatnoće njihove pojave, a često se koriste i metode regresione analize (za popunjavanje i produžavanje nizova). Složeniji statistički modeli i elementi teorije slučajnih procesa koriste se kada je neophodno uzeti u obzir zavisnosti između podataka osmatranja, kao što je npr. generisanje dugačkih serija za hidroenergetske analize (Ilich & Despotović, 2008; Marković, 2016).

Statistička analiza hidroloških nizova zasniva se na teoriji verovatnoće i statistike kao matematičkih disciplina. Ona služi da se opiše slučajan karakter podataka osmatranja nekog hidrološkog procesa. Pri tome se pažnja usmerava na podatke, a ne na fizičke procese koji su ih proizveli. Zbog toga statistika služi kao sredstvo za opisivanje samog procesa, a ne za analizu uzročno-posledičnih veza.

U ovom poglavlju se najpre daje rekapitulacija osnovnih pojmova iz verovatnoće i statistike i pregled teorijskih raspodela verovatnoće koje se koriste u inženjerskoj hidrologiji. Osnovni pojmovi iz verovatnoće i statistike su neophodni ne samo za razumevanje postupaka koji se koriste u inženjerskoj hidrologiji, već i za razumevanje značaja koji probabilističko opisivanje hidroloških veličina ima za planiranje i projektovanje objekata. U sledećem poglavlju se najpre razmatra kako se u praksi formiraju nizovi za statističku analizu i uslovi koje ti nizovi treba da ispune, zatim postupak statističke analize nizova nezavisnih podataka, dok se na kraju daju elementi za sprovođenje regresione analize. Čitaoci zainteresovani za detaljniji uvid u primenu ovih metoda u hidrologiji upućuju se na knjige Jovanovića (1987), Vukmirovića (1988) ili Zelenhasića i Ruski (1991), kao i na mnogobrojnu inostranu literaturu (npr. Hirsch i sar., 1993; Stedinger i sar., 1993; Kottegoda & Rosso, 1997; Rao & Hamed, 2000; Helsel & Hirsch, 2002; Katz i sar., 2002).

7.1 Osnovni pojmovi iz teorije verovatnoće

7.1.1 Slučajni događaji i verovatnoća

Teorija verovatnoće je matematička disciplina koja proučava i objašnjava zakonitosti vezane za slučajne pojave. Centralni koncept u teoriji verovatnoće je *eksperiment*, stvaran ili zamišljen, čiji je rezultat neizvesan, tj. nepoznat unapred, jer je pod uticajem slučajnih faktora. Rezultat eksperimenta se naziva *ishod*. Ako se eksperiment ponavlja mnogo puta pod istim uslovima, pojavljuje se određena zakonomernost u ishodima. Verovatnoća je tada kvantitativna mera kojom se procenjuje mogućnost ili nemogućnost nastupanja određenih ishoda eksperimenta.

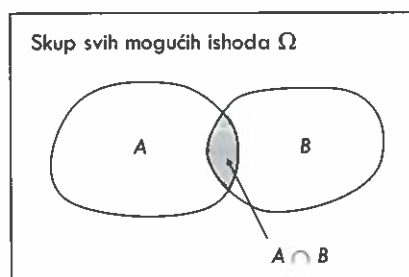
Elementarni ishod eksperimenta ili *elementarni događaj* je primarni pojam u teoriji verovatnoće i ne definiše se (Jevremović i Mališić, 2002). Skup svih mogućih ishoda u nekom eksperimentu se naziva *prostor elementarnih ishoda* i označava se sa Ω .

Podskupovi prostora elementarnih ishoda nazivaju se *slučajni događaji* (slika 7.1). Ako je slučajni događaj prazan skup, tj. ne sadrži nijedan elementarni događaj, onda je on *nemoguć događaj*. Takođe, ako je slučajni događaj jednak skupu svih elementarnih ishoda Ω , onda je on *siguran događaj*. Kao i svi skupovi, slučajni događaji mogu imati preseke, unije, razlike i komplementarne događaje. Na primer, u hidrologiji se proces osmatranja godišnje visine padavina može shvatiti kao slučajni eksperiment; kada se po isteku godine izmeri neka visina padavina, npr. 650 mm, dobija se ishod eksperimenta. Prostor elementarnih ishoda za godišnju visinu kiše teorijski obuhvata realne brojeve od nule do beskonačnosti (iako je visina kiše u stvarnosti veća od neke donje granice i manja od neke gornje granice), dok događaj može biti npr. pojava godišnjih padavina većih od 700 mm.

Ishodi eksperimenata i slučajni događaji realizuju se sa određenom verovatnoćom. Prema *klasičnoj definiciji* verovatnoće, verovatnoća događaja A se može izračunati kao količnik broja N_A elementarnih ishoda koji dovode do realizacije događaja A i broja N svih elementarnih ishoda:

$$P\{A\} = \frac{N_A}{N} \quad (7.1)$$

Ova definicija podrazumeva da svaki elementarni ishod ima istu verovatnoću $1/N$. Ako postoji beskonačno mnogo elementarnih ishoda (što je slučaj sa merenjem visine pa-



Slika 7.1. Događaji A i B su podskupovi skupa svih mogućih ishoda Ω .

davina), tada pojedini elementarni ishodi mogu imati verovatnoću koja je jednaka nuli a samo prebrojivo mnogo elementarnih ishoda može imati verovatnoću različitu od nule.

Pored klasične definicije verovatnoće, od značaja je i njena *statistička definicija*. Ako se eksperiment ponovi n puta i pri tome se n_A puta realizuju ishodi koji čine događaj A , broj n_A se naziva *učestalost* ili *frekvencija*. *Relativna frekvencija* događaja A tada je:

$$f_A^* = \frac{n_A}{n}$$

Što se eksperiment više puta ponavlja (što je veće n), to relativna frekvencija postaje bolja ocena verovatnoće događaja A . Statistička definicija verovatnoće događaja A je onda:

$$P\{A\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_A}{n} \quad (7.2)$$

Treba napomenuti da verovatnoće događaja koje se procenjuju na osnovu eksperimentalnih (empirijskih) podataka predstavljaju približne verovatnoće jer zavise od konkretnih ishoda u ograničenom broju eksperimenata.

Osnovne aksiomatske osobine verovatnoće su nenegativnost, normiranost i aditivnost. Osobina nenegativnosti znači da je $P\{A\} \geq 0$, a normiranost da je $P\{\Omega\} = 1$. Ove dve osobine postavljaju granice za verovatnoću između 0 i 1:

$$0 \leq P\{A\} \leq P\{\Omega\} = 1 \quad (7.3)$$

Osobina aditivnosti verovatnoće se odnosi na određivanje verovatnoće događaja koji se međusobno isključuju (tzv. disjunktnih događaja) tako što se verovatnoće pojedinih događaja sabiraju. Neke od važnih osobina verovatnoće događaja, koje proističu iz osnovnih aksioma teorije verovatnoće, opisuju se u nastavku.

Potpun sistem događaja. Ako se prostor elementarnih ishoda Ω podeli na M disjunktnih skupova, odnosno događaja A_1, A_2, \dots, A_M koji se međusobno isključuju, onda ti događaji čine potpun sistem događaja. Zbog osobine aditivnosti sledi:

$$P\{A_1\} + P\{A_2\} + \dots + P\{A_M\} = P\{\Omega\} = 1 \quad (7.4)$$

Na primer, pri bacanju kocke potpun sistem događaja čine događaji $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ koji se međusobno isključuju, jer dva broja ne mogu istovremeno biti rezultat bacanja kocke. Ujedno, ne postoji verovatnoća da se realizuju događaji izvan skupa Ω , pa je Ω siguran događaj sa verovatnoćom realizacije 1.

Unija događaja A i B je događaj koji se realizuje ako se realizuje ili događaj A ili događaj B . Verovatnoća unije događaja je jednaka:

$$P\{A \cup B\} = P\{A\} + P\{B\} - P\{A \cap B\}$$

Za verovatnoću unije međusobno isključivih (disjunktnih) događaja A i B važi:

$$P\{A \cup B\} = P\{A\} + P\{B\} \quad (7.5)$$

Komplementarnost. Ako je skup A^c komplement skupa A , tj. $A^c \cup A = \Omega$, onda je:

$$P\{A^c\} = 1 - P\{A\} \quad (7.6)$$

Komplementarni događaj A^c se naziva *suprotni događaj*, a $P\{A^c\}$ *suprotna verovatnoća*. Sledi i da je verovatnoća nemogućeg događaja (praznog skupa) jednaka nuli:

$$P\{\emptyset\} = 1 - P\{\Omega\} = 0 \quad (7.7)$$

Uslovna verovatnoća. Posmatrajmo dva događaja A i B , kao što je prikazano na slici 7.1. Događaj A može biti da padavine u jednoj godini budu manje od 600 mm, a događaj B da padavine u sledećoj godini budu manje od 600 mm. Njihov presek je $A \cap B$, koji će se realizovati ako se realizuju oba događaja A i B . U primeru sa godišnjim padavinama, $A \cap B$ predstavlja događaj da će visina padavina u dve uzastopne godine biti manja od 600 mm. Verovatnoća da će se realizovati događaj B pod uslovom da se događaj A već realizovao naziva se *uslovna verovatnoća* i obeležava kao $P\{B|A\}$. Ona je jednaka:

$$P\{B|A\} = \frac{P\{A \cap B\}}{P\{A\}}$$

U primeru sa godišnjim padavinama, verovatnoća $P\{B|A\}$ može predstavljati verovatnoću da visina padavina u jednoj godini bude manja od 600 mm *pod uslovom* da je u prethodne godine bila manja od 600 mm.

Nezavisnost događaja. Ukoliko realizacija događaja B ne zavisi od realizacije događaja A , za ove događaje se kaže da su *nezavisni*, pa je $P\{B|A\} = P\{B\}$. Za nezavisne događaje onda važi:

$$P\{A \cap B\} = P\{A\} \cdot P\{B\}$$

Ako se u prethodnom primeru mogu smatrati nezavisnim događaji da visina padavina u jednoj i u drugoj godini bude manja od 600 mm (odnosno da visina padavina u jednoj godini nije uslovljena visinom padavina u prethodnoj godini), tada je verovatnoća da visina padavina u dve uzastopne godine bude manja od 600 mm jednaka kvadratu verovatnoće da visina padavina u jednoj godini bude manja od 600 mm.

Formula potpune verovatnoće i Bajesova formula. Neka su H_1, H_2, \dots, H_M događaji koji čine potpun sistem događaja (međusobno se isključuju, a njihova unija čini prostor elementarnih ishoda Ω). Ovi događaji se nazivaju *hipoteze*. Formula potpune verovatnoće glasi:

$$P\{A\} = \sum_{j=1}^M P\{H_j\}P\{A|H_j\} = \sum_{j=1}^M P\{AH_j\} \quad (7.8)$$

Ova formula pokazuje da se verovatnoća događaja A može odrediti ako su poznate verovatnoće realizacije hipoteza i uslovne verovatnoće realizacije događaja A pod uslovom realizacije pojedinih hipoteza. Verovatnoće hipoteza se još nazivaju *apriorne verovatnoće*. Po realizaciji događaja A mogu se odrediti i *aposteriorne verovatnoće* pojedinih hipoteza prema:

$$P\{H_k|A\} = \frac{P\{H_k A\}}{P\{A\}} = \frac{P\{H_k\}P\{A|H_k\}}{\sum_{j=1}^M P\{H_j\}P\{A|H_j\}} \quad (7.9)$$

Ova formula se naziva *Bajesova formula*. Uzastopnom primenom formule potpune verovatnoće i Bajesove formule mogu se, sa pristizanjem novih osmatranja, ažurirati verovatnoće hipoteza. Zato Bajesova formula nalazi veliku primenu u vremenskim i hidrološkim prognozama. Na primer, ova formula omogućava da se odredi verovatnoća da će naredni dan biti kišan ako znamo uslovne verovatnoće pojave kišnog dana posle suvog ili kišnog. Sutradan se, po realizaciji suvog ili kišnog dana, mogu popraviti verovatnoće osnovnih hipoteza o suvom ili kišnom danu i napraviti nova prognoza za naredni dan.

7.1.2 Slučajne promenljive i njihove raspodele verovatnoće

Ako se ishodi eksperimenata predstavljaju kao brojne vrednosti, kao što je slučaj kod osmatranja hidroloških veličina, tada se može govoriti o preslikavanju prostora elementarnih ishoda u skup realnih brojeva. To preslikavanje se naziva *slučajna promenljiva* ili *slučajna veličina*. Vrednost koju će ta promenljiva uzeti u jednom eksperimentu ne može se predvideti sa sigurnošću, već sa određenom verovatnoćom.

Slučajna promenljiva je *prekidna* ili *diskretna* ako je skup njenih vrednosti konačan ili prebrojiv. Slučajna promenljiva je *neprekidna* ili *kontinualna* ako je skup njenih vrednosti neki interval realnih brojeva. Visine kiše, protoci i nivoi vode su primeri kontinualnih slučajnih promenljivih u hidrologiji. Primeri za diskretne slučajne promenljive su broj dana sa kišom, broj dana sa snegom, broj kišnih epizoda sa visinom kiše iznad neke vrednosti, broj talasa velikih voda iznad nekog praga itd.

Način na koji se određene verovatnoće pripisuju različitim ishodima x osmatranja slučajne promenljive X zove se *raspodela verovatnoće* (nekada i zakon raspodele verovatnoće). Na primer, ako je X godišnja visina padavina, raspodelom je određena verovatnoća da se visina padavina u posmatranoj godini nađe u nekom intervalu vrednosti, npr. između 600 i 700 mm, većem od 700 mm, itd. Drugim rečima, raspodela verovatnoće opisuje vezu između vrednosti koje slučajna promenljiva može da uzme i njihove verovatnoće.

Raspodela diskretne slučajne promenljive X , koja uzima vrednosti iz prebrojivog skupa, obično se predstavlja u obliku:

$$X: \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \dots \\ p_1 & p_2 & p_3 & \dots \end{pmatrix} \quad (7.10)$$

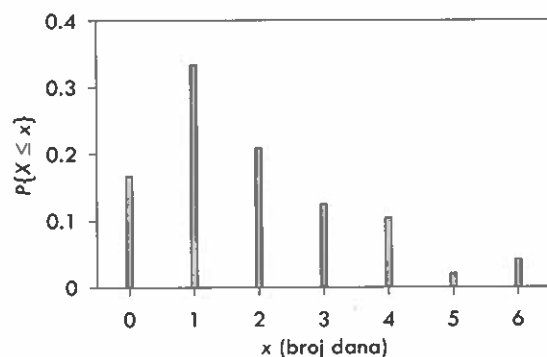
gde su p_k verovatnoće pojave vrednosti x_k , odnosno $p_k = P\{X = x_k\}$. Za p_k važi:

$$\sum_k p_k = 1$$

Grafički prikaz raspodele verovatnoće diskretne slučajne promenljive ima oblik štapićastog dijagrama (kao na slici 7.2) čime se ukazuje na to da samo celi brojevi imaju verovatnoću pojave, dok je za vrednosti između celobrojnih ta verovatnoća jednaka nuli.

Tabela 7.1. Učestalosti broja dana sa padavinama većim od 30 mm u primeru 7.1.

Broj dana x	0	1	2	3	4	5	6
Apsolutna frekvencija f	8	16	10	6	5	1	2



Slika 7.2. Grafički prikaz raspodele verovatnoće diskretne slučajne promenljive u primeru 7.1.

Primer 7.1. Neka je X slučajna promenljiva koja predstavlja broj dana u godini sa kišom većom od 30 mm na kišomernoj stanici Beograd-Vračar. Na osnovu osmatranja u periodu 1961-2008, ustanovljene su učestalosti pojave određenih vrednosti slučajne promenljive X date u tabeli 7.1. Proceniti verovatnoću da tokom godine bude dana sa kišom većom od 30 mm: a) nijedan, b) bar jedan, c) manje od tri.

Rešenje. Koristeći apsolutne frekvencije pojedinih vrednosti x iz tabele 7.1, verovatnoće njihove pojave mogu se proceniti pomoću relativnih frekvencija $f^* = f/n$, gde je n ukupan broj podataka koji iznosi 48. Raspodela verovatnoće slučajne promenljive X tada je data sa:

$$X: \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0.167 & 0.333 & 0.208 & 0.125 & 0.104 & 0.021 & 0.042 \end{pmatrix}$$

dok je grafički prikaz raspodele dat na slici 7.2.

a) Na osnovu raspodele, verovatnoća da tokom godine ne bude nijednog dana sa kišom većom od 30 mm iznosi:

$$P\{X = 0\} = 0.167$$

b) Suprotna verovatnoća, tj. verovatnoća da tokom godine bar jedan dan ima kišu veću od 30 mm može se odrediti na osnovu izraza (7.6) i jednaka je:

$$P\{X \geq 1\} = P\{X > 0\} = 1 - P\{X = 0\} = 1 - 0.167 = 0.833$$

c) Verovatnoća slučajnog događaja da tokom godine bude manje od tri dana sa kišom većom od 30 mm može se odrediti ako se ovaj događaj shvati kao unija događaja da se godišnje javi ili 0 ili 1 ili 2 dana sa kišom većom od 30 mm i primeni izraz (7.5) uzimajući u obzir da se međusobno isključuju događaji da se javi određen broj kišnih dana. Tada je:

$$P\{X \leq 2\} = P\{X = 0 \cup X = 1 \cup X = 2\} = P\{X = 0\} + P\{X = 1\} + P\{X = 2\} = 0.167 + 0.333 + 0.208 = 0.708$$

Na sličan način mogu se odrediti i verovatnoće ostalih događaja vezanih za promenljivu X .

Raspodela kontinualne slučajne promenljive se ne može prikazati na način kao za diskretnu promenljivu u (7.10) jer kontinualna promenljiva uzima vrednosti iz neprebrojivog skupa, što može biti jedan interval realnih brojeva, više takvih intervala, ili ceo skup realnih brojeva. Zbog toga se raspodela verovatnoće kontinualne promenljive prikazuje uz pomoć funkcije $f(x)$ koja se naziva *gustina raspodele*. Gustina raspodele $f(x)$ je nenegativna funkcija čiji integral nad celim domenom definisanosti slučajne promenljive predstavlja potpunu verovatnoću i jednak je jedinici:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

Gustina raspodele se može shvatiti i kao verovatnoća po jedinici slučajne promenljive. Integrisanjem ove funkcije nad određenim intervalom vrednosti slučajne promenljive dolazi se do verovatnoće da će slučajna promenljiva uzeti vrednost iz tog intervala. Na primer, verovatnoća da slučajna promenljiva X uzme vrednost iz intervala (a, b) predstavlja se na sledeći način:

$$P\{a < X < b\} = \int_a^b f(x) dx$$

Slično tome, verovatnoća prevazilaženja neke vrednosti a je integral gustine raspodele $f(x)$ na intervalu (a, ∞) :

$$P\{X > a\} = \int_a^{\infty} f(x) dx$$

Analogno se određuje i verovatnoća neprevazilaženja neke vrednosti a :

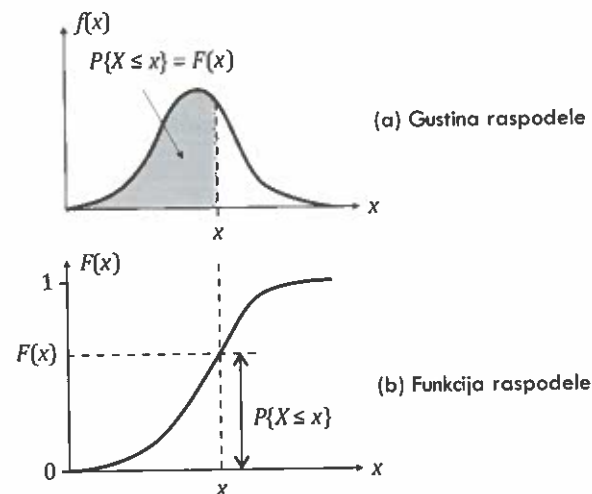
$$P\{X \leq a\} = \int_{-\infty}^a f(x) dx$$

Na ovaj način se može doći do definicije *funkcije raspodele*. Integral gustine raspodele $f(x)$ na podskupu $\{X \leq x\}$ je funkcija izabrane vrednosti x i naziva se funkcijom raspodele:

$$F(x) = P\{X \leq x\} = \int_{-\infty}^x f(u) du \quad (7.11)$$

Na osnovu definicije, gustina raspodele $f(x)$ predstavlja izvod funkcije raspodele $F(x)$:

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$



Slika 7.3. Gustina raspodele i funkcija raspodele kontinualne slučajne promenljive.

Funkcija gustine raspodele $f(x)$ i funkcija raspodele $F(x)$ su dva alternativna načina za prikazivanje zakona raspodele kontinualne slučajne promenljive. Slika 7.3 prikazuje odnos ove dve funkcije.

Treba napomenuti da ordinate gustine raspodele ne predstavljaju verovatnoću, već nju predstavlja površina ispod funkcije gustine. To znači da ordinate gustine raspodele imaju jedinice recipročne vrednosti slučajne promenljive X : kod protoka $(\text{m}^3/\text{s})^{-1}$, a kod padavina mm^{-1} . Međutim, uz ordinate gustine raspodele jedinice se obično ne navode.

Ako je poznata funkcija raspodele $F(x)$ jedne kontinualne slučajne promenljive, tada je moguće odrediti verovatnoće različitih slučajnih događaja vezanih za tu promenljivu. Iz prethodnih izraza sledi da je:

$$\begin{aligned} P\{X \leq x\} &= F(x) \\ P\{X > x\} &= 1 - F(x) \\ P\{x_1 < X \leq x_2\} &= F(x_2) - F(x_1) \end{aligned} \quad (7.12)$$

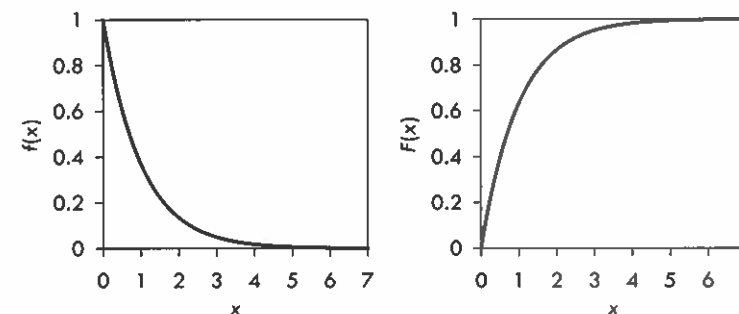
Primer 7.2. Posmatra se kontinualna slučajna promenljiva X koja ima eksponencijalnu raspodelu. Eksponencijalna raspodela definiše se gustinom koja glasi:

$$f(x) = e^{-x}, \quad x \geq 0$$

Odrediti izraz za funkciju raspodele, a potom i verovatnoće da promenljiva X uzme vrednosti iz uzastopnih intervala $[0, 1]$, $[1, 2]$, $[2, 3]$ i $[3, \infty)$.

Rešenje. Funkcija eksponencijalne raspodele $F(x)$ se dobija integraljenjem gustine $f(x)$ na osnovu (7.11):

$$F(x) = P\{X \leq x\} = \int_0^x e^{-u} du = -e^{-u} \Big|_0^x = 1 - e^{-x}, \quad x > 0$$



Slika 7.4. Eksponencijalna raspodela u primeru 7.2: gustina raspodele (levo) i funkcija raspodele (desno).

Slika 7.4 prikazuje ove dve funkcije. Dalje se na osnovu izraza (7.12) mogu odrediti verovatnoće sa kojima se slučajna promenljiva X može naći u određenim intervalima vrednosti. Na primer, verovatnoća da slučajna promenljiva bude manja od $x = 1$ jednaka je:

$$P\{X \leq 1\} = 1 - e^{-1} = 0.632$$

Slično tome, verovatnoće da se slučajna promenljiva X nađe u intervalima $[1, 2]$ i $[2, 3]$ jednake su:

$$P\{1 < X \leq 2\} = F(2) - F(1) = (1 - e^{-2}) - (1 - e^{-1}) = 0.865 - 0.632 = 0.233$$

$$P\{2 < X \leq 3\} = F(3) - F(2) = (1 - e^{-3}) - (1 - e^{-2}) = 0.950 - 0.865 = 0.085$$

Verovatnoća da slučajna promenljiva X bude veća od $x = 3$ jednaka je:

$$P\{X > 3\} = 1 - F(3) = 1 - (1 - e^{-3}) = 1 - 0.950 = 0.050$$

Zbir svih prethodno sračunatih verovatnoća je jednak:

$$\begin{aligned} P\{X \leq 1\} + P\{1 < X \leq 2\} + P\{2 < X \leq 3\} + P\{X > 3\} &= \\ &= 0.632 + 0.233 + 0.085 + 0.050 = 1 \end{aligned}$$

Kako su intervali posmatrani u prethodnim izrazima disjunktni, a njihova unija obuhvata sve moguće vrednosti slučajne promenljive X , to zbir svih izračunatih verovatnoća mora biti 1.

7.1.3 Višedimenzionalne slučajne promenljive

Često je od interesa da se u eksperimentima posmatra simultano ponašanje dve slučajne promenljive ili više njih. Tada se govori o višedimenzionalnim slučajnim promenljivim. Na primer, dvodimenzionalna slučajna promenljiva (X, Y) je uređeni par dve slučajne promenljive X i Y . Funkcija raspodele dvodimenzionalne kontinualne slučajne promenljive definiše se kao istovremena verovatnoća neprevazilaženja za te dve promenljive:

$$F(x, y) = P\{X \leq x \cap Y \leq y\} = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(u, v) du dv \quad (7.13)$$

gde je $f(u, v)$ gustina dvodimenzionalne raspodele. Raspodele promenljivih X i Y , označene sa $F_X(x)$ i $F_Y(y)$, nazivaju se *marginalne raspodele*. Za marginalne gustine raspodele važi:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy, \quad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx \quad (7.14)$$

Ako su dve slučajne promenljive nezavisne, tada je njihova dvodimenzionalna funkcija raspodele jednaka proizvodu marginalnih funkcija raspodele:

$$F(x, y) = F_X(x) \cdot F_Y(y) \quad (7.15)$$

Isto važi i za gustinu raspodele dvodimenzionalne slučajne promenljive:

$$f(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) \quad (7.16)$$

Za dvodimenzionalnu slučajnu promenljivu može se definisati *uslovna raspodela* jedne promenljive u odnosu na drugu. *Uсловna gustina* promenljive Y kada slučajna promenljiva ima vrednost $X = x$ jednaka je:

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)} \quad (7.17)$$

Analogno se mogu definisati i zajednička raspodela, marginalne i uslovne raspodele diskretne dvodimenzionalne promenljive.

U hidrologiji, dvodimenzionalne i višedimenzionalne promenljive su interesantne kada se izučava koincidencija (istovremena pojava) velikih ili malih voda, zajednička raspodela visine kiša i njihovog trajanja, zajednička raspodela maksimuma i za premina talasa velikih voda itd.

7.1.4 Osobine slučajnih promenljivih

Na osnovu raspodele verovatnoće, kojom se opisuje veza između vrednosti koje slučajna promenljiva može da uzme i njihove verovatnoće, mogu se izračunati neke karakteristične vrednosti slučajne promenljive. Takve numeričke (brojne) karakteristike posredno opisuju slučajnu promenljivu i njenu raspodelu verovatnoće i korisne su za njihovu interpretaciju.

U definisanju numeričkih karakteristika slučajne promenljive polazimo od pojma *matematičkog očekivanja*. Za diskretnu slučajnu promenljivu X sa zakonom raspodele datim u (7.10), matematičko očekivanje se definiše kao:

$$E(X) = \sum_k p_k x_k \quad (7.18)$$

pod uslovom da je red apsolutno konvergentan. Za kontinualnu slučajnu promenljivu X sa gustinom raspodele $f(x)$ matematičko očekivanje se definiše kao:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \quad (7.19)$$

pod uslovom da je integral apsolutno konvergentan. Iz prethodnih definicija se vidi da je matematičko očekivanje slučajne promenljive jedan broj, odnosno vrednost slučajne promenljive koja se „očekuje“ kao rezultat eksperimenta. U opštem slučaju, matematičko očekivanje neke funkcije $g(X)$ diskretne i kontinualne slučajne promenljive X je, redom:

$$E[g(X)] = \sum_k p_k g(x_k), \quad E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) dx \quad (7.20)$$

Kao numeričke karakteristike slučajne promenljive, koriste se dve vrste *momenta raspodele*: momenti oko koordinatnog početka i momenti oko sredine (ili centralni momenti). Momenti oko koordinatnog početka diskretne i kontinualne slučajne promenljive definišu se kao:

$$\mu'_r = E(X^r) = \sum_k p_k x_k^r \quad \text{i} \quad \mu'_r = E[X^r] = \int_{-\infty}^{\infty} x^r f(x) dx \quad (7.21)$$

Momenti oko sredine ili centralni momenti diskretne i kontinualne slučajne promenljive su:

$$\mu_r = E[(X - \mu)^r] = \sum_k p_k (x_k - \mu)^r \quad \text{i} \quad \mu_r = E[(X - \mu)^r] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^r f(x) dx \quad (7.22)$$

U gornjim izrazima μ je prvi momenat oko koordinatnog početka, odnosno matematičko očekivanje slučajne promenljive X :

$$\mu = \mu'_1 = E(X)$$

Matematičko očekivanje $\mu = E(X)$ se često naziva *sredina* ili *srednja vrednost*. U geometrijskom smislu srednja vrednost predstavlja koordinatu težišta površine ispod gustine raspodele na osi x (slika 7.5-a). Srednja vrednost je takođe i *mera centralne tendencije* raspodele jer pokazuje oko koje vrednosti slučajne promenljive je koncentrisan najveći deo verovatnoće.

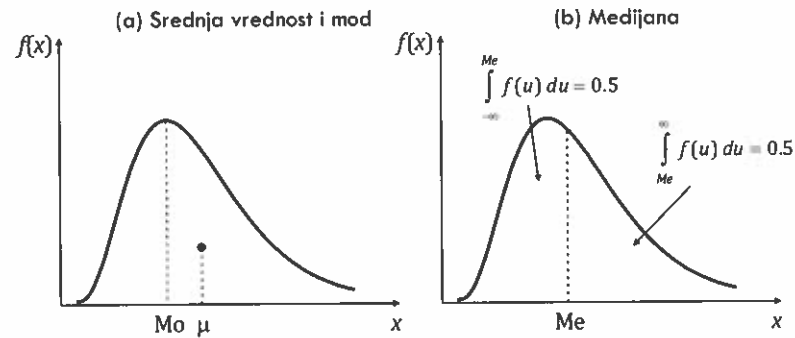
Vrednost slučajne promenljive za koju gustina raspodele ima maksimalnu vrednost naziva se *mod* i označava sa Mo (slika 7.5-a):

$$f(Mo) = f_{\max}$$

Još jedna mera centralne tendencije je *medijana*, koja se definiše kao vrednost slučajne promenljive za vrednost funkcije raspodele od 0.5 (slika 7.5-b):

$$F(Me) = \int_{-\infty}^{Me} f(u) du = \int_{Me}^{\infty} f(u) du = 0.5$$

Drugim rečima, to je vrednost koja deli površinu ispod gustine raspodele na dva jednaka dela.



Slika 7.5. (a) Srednja vrednost kao težište površine ispod gustine raspodele i definicija moda; (b) definicija medijane.

Drugi centralni momenat slučajne promenljive naziva se *dispersija* ili *varijansa* i označava se sa σ^2 :

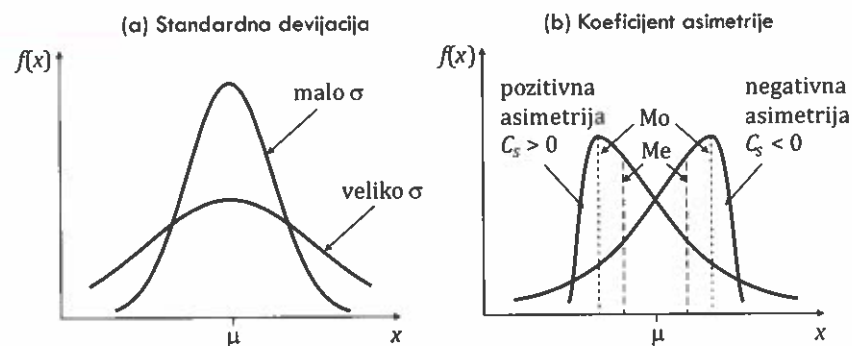
$$\sigma^2 = D(X) = E[(X - \mu)^2]$$

Dispersija je zapravo srednje kvadratno odstupanje od srednje vrednosti, pa predstavlja meru rasipanja slučajne promenljive oko srednje vrednosti. Dispersija ima dimenziju kvadrata slučajne promenljive. Pozitivni koren disperzije σ se naziva *standardna devijacija* i ona predstavlja meru odstupanja od srednje vrednosti u dimenziji slučajne promenljive. Na slici 7.6-a prikazan je uticaj standardne devijacije na oblik raspodele: što je ona veća, to je veće rasipanje promenljive u odnosu na srednju vrednost, tj. širi je interval vrednosti koji se mogu javiti sa određenom verovatnoćom.

Koeficijent varijacije je bezdimenzionalni pokazatelj odstupanja od srednje vrednosti i definiše se kao količnik standardne devijacije i srednje vrednosti:

$$C_v = \frac{\sigma}{\mu}, \quad \mu > 0$$

Još jedan pokazatelj odstupanja od srednje vrednosti je *indeks disperzije*, koji predstavlja odnos disperzije i srednje vrednosti:



Slika 7.6. Uticaj standardne devijacije i koeficijenta asimetrije na oblik gustine raspodele.

$$I_D = \frac{D(X)}{E(X)} = \frac{\sigma^2}{\mu}, \quad \mu > 0 \quad (7.23)$$

Asimetrija raspodele se meri trećim centralnim momentom, a bezdimenzionalni pokazatelj asimetrije naziva se *koeficijent asimetrije*:

$$C_s = \frac{E[(X - \mu)^3]}{\sigma^3}$$

Od koeficijenta asimetrije zavisi oblik raspodele (slika 7.6-b). Za raspodelu se kaže da ima pozitivnu asimetriju ($C_s > 0$) ako je njena gustina izdužena na desnu stranu, odnosno ako i velikim vrednostima slučajne promenljive pripada deo verovatnoće. Gustina negativno asimetrične raspodele je izdužena na levu stranu tako da i veoma male vrednosti imaju određenu verovatnoću pojave. Da li je asimetrija pozitivna ili negativna može se oceniti i na osnovu toga da li je mod (vrednost x za koju gustina dostiže maksimalnu vrednost) manji ili veći od srednje vrednosti.

Koeficijent spljoštenosti je količnik četvrtog centralnog momenta i kvadrata disperzije:

$$C_k = \frac{E[(X - \mu)^4]}{\sigma^4}$$

Ovaj koeficijent je mera ekstremnosti krajeva raspodele i ukazuje na mogućnost pojave izuzetnih vrednosti slučajne promenljive.

Kvantil raspodele reda q je vrednost slučajne promenljive x_q za koju važi:

$$F(x_q) = q \quad (7.24)$$

Kvantil se može shvatiti i kao inverzna funkcija raspodele:

$$x_q = F^{-1}(q) \quad (7.25)$$

Ako se verovatnoća izrazi u procentima, kvantil x_q se naziva i 100 q -ti percentil. Na primer, $x_{0.9}$ je 90-ti percentil.

Specijalni slučajevi kvantila su *kvantili*. Prvi kvartil se dobija za $q = 0.25$, drugi za $q = 0.5$, a treći za $q = 0.75$. Drugi kvartil je ujedno i medijana raspodele ($Me = x_{0.5}$). Razlika između trećeg i prvog kvantila $x_{0.75} - x_{0.25}$ je tzv. međukvartilni raspon koji daje informaciju o rasipanju slučajne promenljive oko medijane.

U hidrologiji se određeni kvantili često pominju. Kao merodavna veličina za projektovanje objekata za zaštitu od velikih voda često se uzima kvantil $x_{0.99}$ raspodele maksimalnih godišnjih protoka. Ovaj kvantil predstavlja tzv. 100-godišnju veliku vodu (videti odeljak 8.1.3). U oblasti zaštite voda česta merodavna veličina je kvantil $x_{0.05}$ raspodele minimalnih godišnjih 30-dnevnih protoka, koja predstavlja protok koji će biti prevaziđen sa verovatnoćom od 95%. Ova veličina se u hidrotehnici naziva minimalni protok obezbeđenosti 95%, što pokazuje obezbeđenost snabdevanja vodom.

7.2 Osnovni pojmovi iz statistike

Za razliku od teorije verovatnoće koja izučava matematičke modele stvarnih pojava, matematička statistika se bavi formiranjem modela na osnovu stvarnih pojava (Jevremović i Mališić, 2002). Drugim rečima, statistika podrazumeva analizu podataka osmatranja pojava od interesa i donošenje zaključaka na osnovu tih podataka.

7.2.1 Populacija i uzorak

Osnovni pojmovi u statistici su populacija i uzorak. *Populacija* je skup svih elemenata koje posmatramo u vezi sa nekom kvantitativnom ili kvalitativnom osobinom populacije koja se naziva *obeležje*. U kontekstu hidroloških procesa, obeležja su slučajne promenljive kao što je maksimalni godišnji protok, godišnja visina padavina itd. Populacija može da ima konačan ili beskonačan broj elemenata.

Uzorak je deo populacije, odnosno njen podskup. Ako je analiziranje nekog obeležja na celoj populaciji nemoguće ili veoma teško (što je slučaj sa hidrološkim procesima), onda se analiza sprovodi na uzorku i na osnovu nje se donose zaključci o populaciji. Broj elemenata u uzorku se naziva *obim uzorka*. U dobro isplaniranim eksperimentima, uzorak se pažljivo bira tako da bude reprezentativan, odnosno da reprezentuje populaciju na najbolji mogući način. Reprezentativnim uzorkom se smatra uzorak za koji su elementi iz populacije izabrani na slučajan način.

Prost slučajni uzorak je onaj u kome su elementi izabrani iz iste raspodele koju ima obeležje populacije na slučajan način. Formalna definicija prostog slučajnog uzorka jeste da je to n -dimenzionalna slučajna promenljiva (X_1, X_2, \dots, X_n) koju čine međusobno nezavisne promenljive i od kojih svaka ima istu raspodelu kao posmatrano obeležje populacije X . Ova dva uslova za prost slučajni uzorak se nazivaju *slučajnost* (nezavisnost elemenata) i *homogenost* (pripadnost istoj raspodeli). Prost slučajni uzorak omogućava najjednostavniju vrstu statističke analize hidroloških nizova, pa se ispunjenost ovih uslova proverava pre same analize.

Realizovani uzorak je konkretan niz vrednosti (x_1, x_2, \dots, x_n) obeležja koje su dobijene na elementima iz izabranog uzorka. Dakle, kada raspoložemo nizom podataka hidroloških osmatranja, raspoložemo realizovanim uzorkom razmatrane veličine (obeležja).

Raspodela slučajne promenljive koja predstavlja obeležje populacije može se opisati određenim *parametrima*, kao što su srednja vrednost ili disperzija raspodele obeležja. Ti parametri su fiksirani (tj. imaju konstantne vrednosti), ali su nam obično nepoznati jer ne poznajemo sve elemente populacije. Ukoliko se parametri određuju na osnovu elemenata uzorka, koristimo *statistike*. Statistike se računaju na osnovu slučajnih promenljivih u uzorku (X_1, X_2, \dots, X_n) , pa formalno predstavljaju novu slučajnu promenljivu kao funkciju promenljivih iz uzorka, npr. $Z = g(X_1, X_2, \dots, X_n)$. Kada se izračunaju za realizovani uzorak kao $z = g(x_1, x_2, \dots, x_n)$, statistike se mogu razlikovati od parametara populacije zato što se njihova vrednost zasniva na ograničenom broju podataka iz uzorka. Kako se osobine jednog uzorka mogu razlikovati od osobina drugih uzoraka, jasno je da realizovane statistike mogu imati različite vrednosti za različite realizovane uzorke. U tom smislu se govori o *neizvesnosti* u zaključivanju o populaciji na osnovu uzorka.

U hidrološkim osmatranjima i merenjima nismo u mogućnosti da ponavljamo eksperimente i tako dođemo do više uzoraka, jer su uslovi pod kojim merimo u nekom trenutku jedinstveni i ne može se očekivati da pri sledećem merenju budu isti. S obzirom da su statistike slučajne promenljive, a da mi raspoložemo jednim uzorkom i vrednostima statistika koje iz njega možemo da izračunamo, u pogledu rezultata statističke analize uvek treba imati u vidu i neizvesnosti koje iz toga mogu da proisteknu.

7.2.2 Analiza učestalosti

Podaci osmatranja čine niz od n vrednosti, koji se može urediti u rastućem poretku u niz (x_1, x_2, \dots, x_n) u kome je x_1 najmanja vrednost, a x_n najveća. Razlika $x_n - x_1$ se naziva *raspon* niza.

Ako je obim uzorka n mali, ili je broj različitih vrednosti u nizu mali, podaci se mogu analizirati po pojedinačnim osmotrenim vrednostima. Za veći obim uzorka ili za veći broj različitih vrednosti u uzorku, podaci se razvrstavaju u intervale ili *klase*. Broj klasa u koje treba razvrstati podatke ne sme da bude mali, ali ne treba da bude ni preveliki kako bi se u svakoj klasi našao dovoljan broj podataka. Broj klasa za niz od n podataka se može grubo odrediti kao $K = n^{1/2}$, ali ne treba da bude manji od 5 i veći od 25 (Kottegoda & Rosso, 2008). Preporučuje se da se najmanji broj klasa K za n podataka usvoji prema nekom od sledećih obrazaca (Jovanović, 1987; Jevremović i Mališić, 2002):

$$K = 5 \log_{10} n \quad \text{ili} \quad K = 1 + 3.3 \log_{10} n \quad (7.26)$$

Broj podataka u svakoj klasi naziva se *apsolutna frekvencija* ili *učestalost*. Ako se apsolutna frekvencija f_k u klasi k podeli sa ukupnim brojem podataka n , dobija se *relativna frekvencija*:

$$f_k^* = \frac{f_k}{n}$$

Zbir svih apsolutnih frekvencija iznosi n , a zbir svih relativnih frekvencija je 1. Frekvencije, kako apsolutne tako i relativne, prikazuju se grafički u obliku histograma. Primer histograma apsolutnih frekvencija može se videti na slici 7.8, a relativnih na slika 7.7-a i 7.9). Kada su širine klasa jednake, frekvencije se mogu prikazati i pomoću poligona kojima se spajaju vrhovi (zamišljenih) stubića histograma na sredini klase (primer takvog dijagrama prikazan je na slici 7.11).

Zbir relativnih frekvencija do određene klase k naziva se *kumulativna relativna frekvencija*:

$$F_k^* = \sum_{j=1}^k f_j^*$$

Kumulativne relativne frekvencije se grafički prikazuju u obliku stepenaste linije (slika 7.7-b i slika 7.9). Svaki „stepenik“, tj. skok na ovoj liniji predstavlja relativnu frekvenciju klase podataka koja se završava ispod stepenika, dok vrh stepenika na tom mestu predstavlja zbirnu frekvenciju podataka u toj klasi i svim prethodnim. Dakle, ordinata linije kumulativne relativne frekvencije za neku granicu klase x_k na gornjem kraju stepenika predstavlja relativni broj podataka koji su manji ili jednaki x_k (tj. $x \leq x_k$). Na po-

slednjem stepeniku, koji odgovara najvećoj osmotреноj vrednosti u nizu, kumulativna relativna frekvencija dostiže vrednost 1.

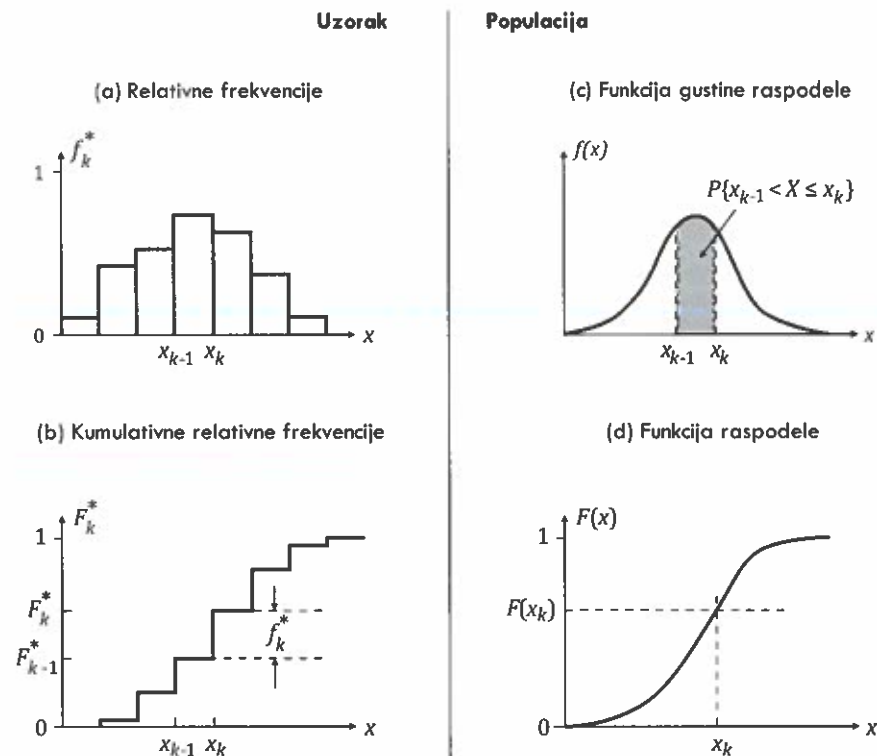
Relativna frekvencija se može shvatiti kao empirijska ocena verovatnoće da se slučajna promenljiva X nađe u klasi k :

$$f_k^* \approx P\{x_{k-1} < X \leq x_k\} = \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) dx$$

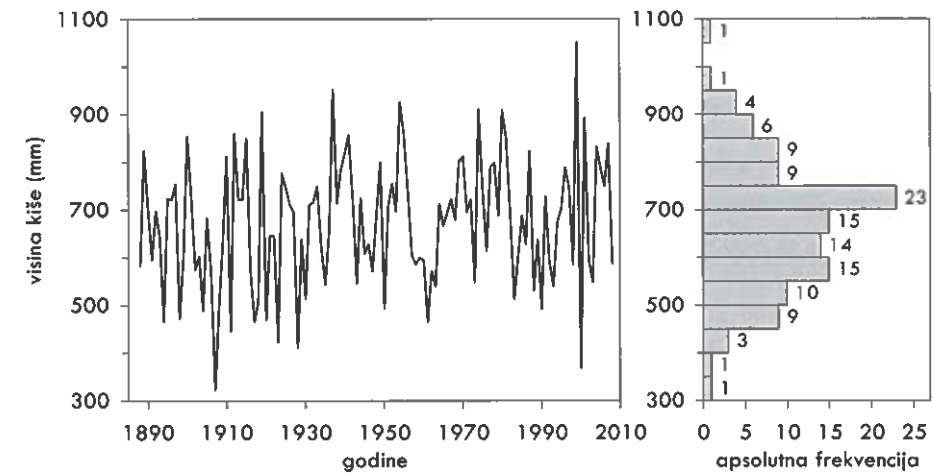
gde su x_{k-1} i x_k donja i gornja granica klase k . Kumulativna relativna frekvencija je onda približno jednaka verovatnoći da slučajna promenljiva dobije vrednost manju ili jednaku od gornje granice klase k :

$$F_k^* \approx P\{X \leq x_k\} = \int_{-\infty}^{x_k} f(x) dx \quad (7.27)$$

Odnos relativnih i kumulativnih relativnih frekvencija prema funkciji gustine raspodele i funkciji raspodele prikazan je na slici 7.7. Na histogramu relativnih frekvencija visina svakog stubića odslikava verovatnoću pojave vrednosti u toj klasi. Ako želimo da histogram učestalosti odslikava gustinu raspodele, tada je potrebno podeliti vrednosti relativnih frekvencija sa širinom klasnog intervala Δx .



Slika 7.7. Relativne frekvencije za uzorak i funkcija raspodele za populaciju (prilagođeno prema Chow i sar., 1988).



Slika 7.8. Godišnje visine kiša u Beogradu (meteorološka opservatorija Vračar) u periodu 1888–2008.

Primer 7.3. Godišnje visine padavina na stanici Beograd-Vračar u periodu od osnivanja meteorološke opservatorije 1888. godine do 2008. godine prikazane su na slici 7.8 levo. Na slici 7.8 desno date su apsolutne frekvencije u klasama od 50 mm, počev od 300 mm i zaključno sa 1100 mm (ukupno 16 klasa). Sprovesti analizu učestalosti i proceniti verovatnoću da će u jednoj godini padavine biti: a) manje od 600 mm, b) veće od 800 mm, c) između 600 i 800 mm.

Rešenje. Ukupan broj podataka o godišnjim padavinama je $n = 121$. U tabeli 7.2 su prikazane apsolutne frekvencije, relativne frekvencije, kumulativne relativne frekvencije i empirijska gustina raspodele (relativna frekvencija podeljena sa širinom klase). Na slici 7.9 prikazane su relativne frekvencije i kumulativne relativne frekvencije.

Neka je A događaj da je $X < 600$ mm, B događaj da je $X > 800$ mm, a C događaj da je $600 < X < 800$ mm. Broj podataka koji odgovaraju događaju A jednak je kumulativnoj frekvenciji na kraju klase 550-600, tj. $n_A = 39$. Na kraju iste klase kumulativna relativna frekvencija iznosi n_A/n , odnosno:

$$P\{A\} = P\{X < 600\} \approx \frac{n_A}{n} = \frac{39}{121} = 0.322$$

Sabiranjem apsolutnih frekvencija koje odgovaraju događajima B i C dobija se $n_B = 21$ i $n_C = 61$, pa je:

$$P\{B\} = P\{X > 800\} \approx \frac{21}{121} = 0.174,$$

$$P\{C\} = P\{600 < X < 800\} \approx \frac{61}{121} = 0.504$$

Verovatnoća događaja B može se odrediti i na osnovu kumulativnih relativnih frekvencija na sledeći način:

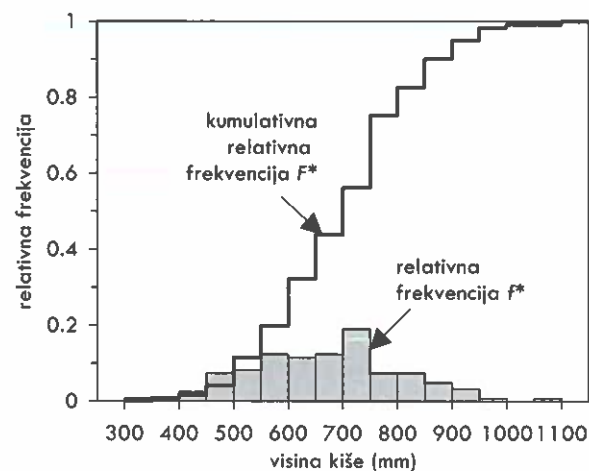
$$P\{B\} = P\{X > 800\} = 1 - P\{X < 800\} \approx 1 - 0.826 = 0.174$$

Slično, za verovatnoću događaja C može se napisati i:

$$P\{C\} = P\{600 < X < 800\} = P\{X < 800\} - P\{X < 600\} \approx 0.826 - 0.322 = 0.504$$

Tabela 7.2. Analiza frekvencija niza godišnjih padavina na stanici Beograd-Vračar u primeru 7.3.

Klasa	Apsolutna frekvencija	Kumulativna apsolutna frekvencija Σf	Relativna frekvencija f^*	Kumulativna relativna frekvencija F^*	Empirijska gustina $f^*/\Delta x$
od do	f				
300 300				0	
300 350	1	1	0.008	0.008	0.00017
350 400	1	2	0.008	0.017	0.00017
400 450	3	5	0.025	0.041	0.00050
450 500	9	14	0.074	0.116	0.00149
500 550	10	24	0.087	0.198	0.00165
550 600	15	39	0.124	0.322	0.00248
600 650	14	53	0.116	0.438	0.00231
650 700	15	68	0.124	0.562	0.00248
700 750	23	91	0.190	0.752	0.00380
750 800	9	100	0.074	0.826	0.00149
800 850	9	109	0.074	0.901	0.00149
850 900	6	115	0.050	0.950	0.00099
900 950	4	119	0.033	0.983	0.00066
950 1000	1	120	0.008	0.992	0.00017
1000 1050	0	120	0.000	0.992	0.00000
1050 1100	1	121	0.008	1.000	0.00017



Slika 7.9. Relativne frekvencije i kumulativne relativne frekvencije godišnje visine kiše u primeru 7.3.

7.2.3 Statistike uzorka

Uzoračka sredina ili uzoračka srednja vrednost je ocena srednje vrednosti neke slučajne promenljive na osnovu uzorka. Kao uzoračka sredina koristi se *aritmetička sredina* podataka iz uzorka:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

Aritmetička sredina predstavlja *nepristrasnu ocenu* srednje vrednosti populacije. To je ocena koja u proseku (iz više uzoraka) nema tendenciju da bude veća ili manja od stvarne vrednosti, odnosno ocena čija je očekivana vrednost jednaka vrednosti parametra populacije. Za aritmetičku sredinu se može pokazati da je $E(\bar{X}) = \mu$.

Ocena disperzije populacije na osnovu podataka iz uzorka ili uzoračka disperzija dobija se pomoću sledeće formule:

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

U gornjem izrazu u imeniocu stoji $n - 1$ umesto n kako bi se dobila nepristrasna ocena disperzije. Pozitivni koren uzoračke disperzije je uzoračka standardna devijacija:

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

Uzorački koeficijent varijacije je tada:

$$c_v = \frac{S}{\bar{x}}$$

Nepristrasna ocena koeficijenta asimetrije iz uzorka računa se prema sledećoj formuli:

$$c_s = \frac{n}{(n-1)(n-2)S^3} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^3$$

Ocena kvantila x_q iz uzorka se može dobiti iz niza podataka uređenog u rastućem poretku. Ako su $x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(n)}$ osmotrene vrednosti uređene u rastući niz (tj. $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(n)}$), tada se i -ti član uređenog niza $x_{(i)}$ može smatrati ocenom kvantila x_p za verovatnoću $p = i/(n + 1)$, dok se ocena kvantila x_q onda može dobiti interpolacijom između dva susedna podatka za željeno q . Na ovaj način je moguće oceniti kvantile za verovatnoće između $1/(n + 1)$ i $n/(n + 1)$, pri čemu te ocene mogu biti veoma loše ako se interpoluje na krajevima niza. Iz ovog razloga je mnogo bolje pronaći teorijsku funkciju raspodele koja se dobro prilagođava osmotrenim podacima i pomoću nje oceniti kvantil x_q koristeći jednačinu (7.24). O ovom postupku se govori u odeljku 8.2.

Uzoračka medijana za uzorak sa neparnim brojem elemenata je središnji član niza podataka uređenog u rastućem poretku. Ako niz ima paran broj članova, onda se medijana računa kao srednja vrednost dva središnja člana uređenog niza. Ovo se formalno može napisati kao:

$$\begin{aligned}x_{Me} &= x_{(n-1)/2}, & \text{za neparno } n \\x_{Me} &= (x_{(n/2)} + x_{(n/2+1)})/2, & \text{za parno } n\end{aligned}\quad (7.28)$$

Nabrojane statistike mogu se lako dobiti u raznim softverskim paketima. U dodatku D.1 date su neke najčešće korišćene statističke funkcije u Microsoft Excelu, među kojima su i funkcije za izračunavanje aritmetičke sredine, standardne devijacije, koeficijenta asimetrije i medijane.

Primer 7.4. Izračunati statistike uzorka godišnjih padavina na stanici Beograd-Vračar u periodu 1991-2000: srednju vrednost, standardnu devijaciju, koeficijent varijacije i koeficijent asimetrije. Podaci su dati u tabeli 7.3.

Rešenje. Sa podacima datim u drugoj koloni tabele 7.3 dobija se da srednja vrednost niza iznosi:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{6770.5}{10} = 677.1 \text{ mm}$$

Sa ovom vrednošću računaju se treća i četvrta kolona gornje tabele. Disperzija se dobija na osnovu sume kvadrata odstupanja od srednje vrednosti:

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \frac{291377.6}{9} = 32375 \text{ mm}^2$$

Standardna devijacija i koeficijent varijacije su tada:

$$s = \sqrt{32375} = 179.9 \text{ mm}$$

$$c_v = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{179.9}{677.05} = 0.266$$

Koeficijent asimetrije dobija se iz zbira kubnih odstupanja od srednje vrednosti:

$$c_s = \frac{n}{(n-1)(n-2)s^3} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^3 = \frac{10}{9 \cdot 8 \cdot 179.9^3} \cdot 20560527.2 = 0.490$$

Tabela 7.3. Proračun statistika uzorka godišnjih padavina u primeru 7.4.

Godina	Visina kiše x (mm)	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_i - \bar{x})^3$
1991	728.2	2616.3	133824.9
1992	589.8	7612.6	-664196.1
1993	539.1	19030.2	-2625216.4
1994	673.6	11.9	-41.1
1995	701.2	583.2	14084.8
1996	788.5	12421.1	1384331.9
1997	746.7	4851.1	337880.7
1998	584.5	8565.5	-792737.3
1999	1051.2	139988.2	52376593.4
2000	367.7	95697.4	-29603997.7
Zbir	6770.5	291377.6	20560527.2

7.2.4 Principi testiranja statističkih hipoteza

Kada se neko obeležje populacije analizira na uzorku, na osnovu takve analize se donose zaključci o raspodeli obeležja, njenim parametrima ili o nekim drugim pretpostavkama. Postupak testiranja statističkih hipoteza se bavi formulisanjem i proverom tih pretpostavki.

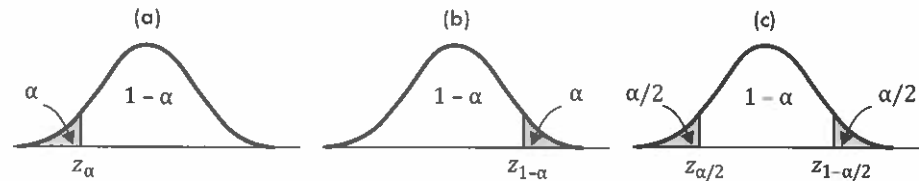
U postupku testiranja formulišu se nulta i alternativna hipoteza. Nulta hipoteza je tvrdnja koju treba da potvrdimo ili odbacimo u procesu testiranja. Ako podaci iz uzorka ne podržavaju postavljenu nultu hipotezu, ona se odbacuje u korist alternativne hipoteze. U suprotnom, ako empirijski podaci podržavaju postavljenu nultu hipotezu, ona se ne odbacuje. Treba naglasiti da se testiranjem neke hipoteze samo ukazuje na stepen saglasnosti te hipoteze i podataka iz uzorka, ali se ne dobija dokaz da je postavljena hipoteza tačna ili ne (Jevremović i Mališić, 2002).

Donošenje zaključka o nultoj hipotezi povezano je sa pojmom *praga značajnosti* α . Ako, na primer, testiramo da li je došlo do promene prosečnog protoka, tada se pragom značajnosti definiše da li je ta promena značajna ili nije značajna jer je rezultat očekivanog rasipanja podataka osmatranja. Prag značajnosti α je verovatnoća da odbacimo nultu hipotezu kada ona jeste tačna. Taj slučaj se zove greška I tipa, dok je greška II tipa da prihvatimo nultu hipotezu kada je tačna alternativna hipoteza. Prag značajnosti obično ima male vrednosti (npr. 0.01, 0.05 ili 0.1). Verovatnoća da se ne napravi greška tipa II naziva se *moć testa*.

Ako je hipoteza neka tvrdnja o parametrima nekog obeležja populacije, onda je ona *parametarska hipoteza*, a odgovarajući test *parametarski test*. Ako je hipoteza neka tvrdnja o raspodeli obeležja, onda je ona *neparametarska hipoteza*, a odgovarajući test je *neparametarski test*. Neparametarski testovi često imaju veću moć u odnosu na parametarske testove u situacijama kada nisu ispunjene pretpostavke iz parametarskih testova (Conover, 1999).

U opštem slučaju postupak testiranja statističkih hipoteza se sastoji od sledećih koraka:

- Formulisanje nulte hipoteze H_0 koju želimo da testiramo i njoj alternativne hipoteze H_a .
- Izbor statistike na kojoj se zasniva test (*test-statistika* ili *kontrolna statistika*), koja ima svoju raspodelu i izračunavanje vrednosti te statistike iz raspoloživog uzorka.
- Izbor praga značajnosti α .
- Utvrđivanje *kritične oblasti*, odnosno oblasti odbacivanja H_0 za tu vrstu testa i za usvojeni prag značajnosti α . U tom smislu testovi mogu biti *dvostrani* ili *jednostrani* (videti sliku 7.10). Dvostrani test je onaj kod koga se kritična oblast nalazi i na donjem i na gornjem kraju raspodele test-statistike, dok je jednostrani test onaj kod koga se kritična oblast nalazi samo na jednom kraju te raspodele.
- Ako je izračunata vrednost test-statistike unutar kritične oblasti, H_0 se odbacuje za izabrani prag značajnosti. Odbacivanjem nulte hipoteze usvaja se alternativna hipoteza H_a . Ako je izračunata vrednost test-statistike izvan kritične oblasti, nulta hipoteza se ne može odbaciti, tj. može se prihvatiti.



Slika 7.10. Kritična oblast ili oblast odbacivanja nulte hipoteze (siva površina) za: (a) jednostrani test sa ograničenjem sa donje strane, (b) jednostrani test sa ograničenjem sa gornje strane, i (c) dvostrani test.

Detaljnije razmatranje testiranja statističkih hipoteza može se naći u knjigama Jovanovića (1987) i Jevremović i Mališića (2002).

U hidrologiji se najčešće primenjuju testovi saglasnosti empirijskih i teorijskih raspodela, koji su po svojoj prirodi neparametarski testovi. Neki od tih testova su prikazani u odeljku 8.2.4. Pored njih, primenjuju se i testovi homogenosti i slučajnosti da bi se proverila hipoteza da podaci kojima raspolažemo predstavljaju prost slučajni uzorak (odeljak 8.1.2). U radovima Jevremović i Mališića (2000, 2001) mogu se naći i neki dodatni testovi koji se mogu primeniti na hidrološke nizove.

7.3 Teorijske raspodele verovatnoće za hidrološke veličine

U ovom potpoglavlju ukratko se prikazuju neke od najčešće korišćenih teorijskih raspodela u hidrologiji kao modeli za raspodele verovatnoće podataka osmatranja. Najpre su prikazane dve raspodele za diskretne slučajne promenljive (binomna i Puasonova), a zatim i veći broj raspodela za kontinualne slučajne promenljive. Na kraju poglavlja, u tabeli 7.4 data je rekapitulacija diskretnih raspodela, dok je u tabeli 7.5 dat pregled osnovnih karakteristika svake od kontinualnih raspodela – funkcije gustine raspodele, domena definisanosti slučajne promenljive i prva tri momenta raspodele.

7.3.1 Binomna raspodela

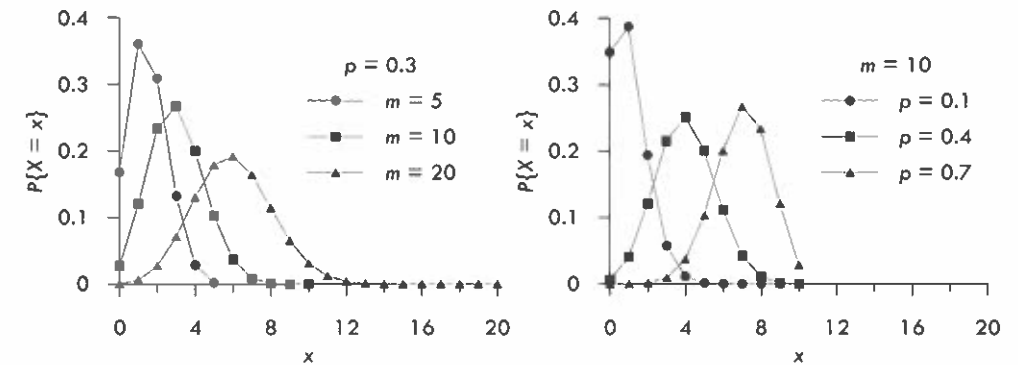
Posmatra se eksperiment koji ima dva ishoda, uspeh i neuspeh, sa verovatnoćom uspeha p i verovatnoćom neuspeha $1 - p$. Ako se eksperiment ponovi m puta, binomna raspodela je raspodela diskretne slučajne promenljive X koja predstavlja broj uspešnih eksperimenata x tokom ukupno m eksperimenata. Zakon binomne raspodele glasi:

$$P\{X = x\} = \binom{m}{x} p^x (1-p)^{m-x}, \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

gde je

$$\binom{m}{x} = \frac{m!}{x!(m-x)!}$$

binomni koeficijent koji pokazuje ukupan broj kombinacija x uspeha i $m - x$ neuspeha u m -torkama ishoda niza od m eksperimenata. Na slici 7.11 prikazana je binomna raspodela za nekoliko kombinacija parametara m i p . Na dijagramima na ovoj slici vero-



Slika 7.11. Binomna raspodela.

vatnoće postoje samo u odgovarajućim celobrojnim vrednostima, a spojene su linijama zbog lakšeg praćenja.

Očekivana vrednost i disperzija slučajne promenljive X koja ima binomnu raspodelu iznose:

$$EX = mp$$

$$DX = mp(1-p)$$

Može se primetiti da indeks disperzije binomne promenljive iznosi $I_D = 1 - p$, što znači da je uvek manji od 1.

Tipičan primer za interpretaciju binomne raspodele je bacanje novčića, gde se padanje npr. pisma može shvatiti kao uspeh, a glave kao neuspeh. Ako je novčić „fer“, verovatnoća pisma (uspeha) je $p = 0.5$, tj. ista kao i verovatnoća glave (neuspeha). Binomna raspodela daje verovatnoću da se tokom m bacanja novčića realizuje x pisama. U hidrologiji, binomna raspodela se koristi i kao raspodela za broj prekoračenja ekstremnih vrednosti hidroloških veličina preko nekog praga (npr. broj godina tokom perioda od m godina u kojima je maksimalni godišnji protok veći od neke zadate vrednosti; videti poglavlje 8.3).

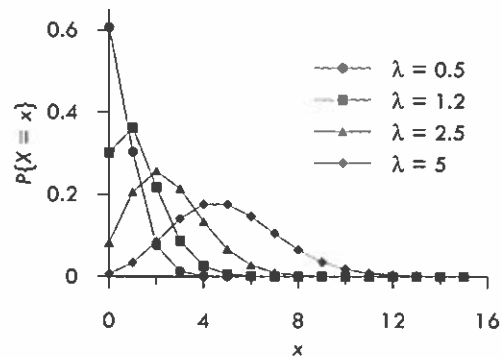
7.3.2 Puasonova raspodela

Ova raspodela je granični slučaj binomne raspodele kada je verovatnoća uspeha u eksperimentu p mala, a broj ponavljanja eksperimenta m veliki ($m \rightarrow \infty$ i $p \rightarrow 0$). U ovom graničnom slučaju, očekivani broj uspeha je $mp = \lambda$. Puasonov zakon raspodele glasi:

$$P\{X = x\} = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \dots \quad (7.29)$$

Za male vrednosti λ Puasonova raspodela je pozitivno asimetrična, dok za velike vrednosti λ teži ka simetričnosti (slika 7.12). Disperzija slučajne promenljive X koja prati Puasonovu raspodelu je jednaka očekivanoj vrednosti:

$$EX = DX = \lambda$$



Slika 7.12. Puasonova raspodela.

Iz prethodne jednakosti se vidi da je indeks disperzije Puasonove raspodele uvek jednak jedinici, tj. $I_D = 1$.

Puasonova raspodela je čest model za sisteme masovnog opsluživanja (broj poziva u telefonskim centralama, broj autobusa na stanicama, broj dolazaka brodova u pristanište itd.). U hidrologiji se koristi kao raspodela za broj velikih voda koje prevazilaze neki prag tokom godine dana i slične veličine.

7.3.3 Normalna raspodela

Normalna ili Gausova raspodela jedna je od najpoznatijih i najčešće korišćenih raspodela, čija je funkcija gustine raspodele definisana izrazom:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right], \quad -\infty < x < \infty$$

gde su μ i σ parametri raspodele. Parametar μ predstavlja srednju vrednost normalne slučajne promenljive, a σ standardnu devijaciju. Transformacijom

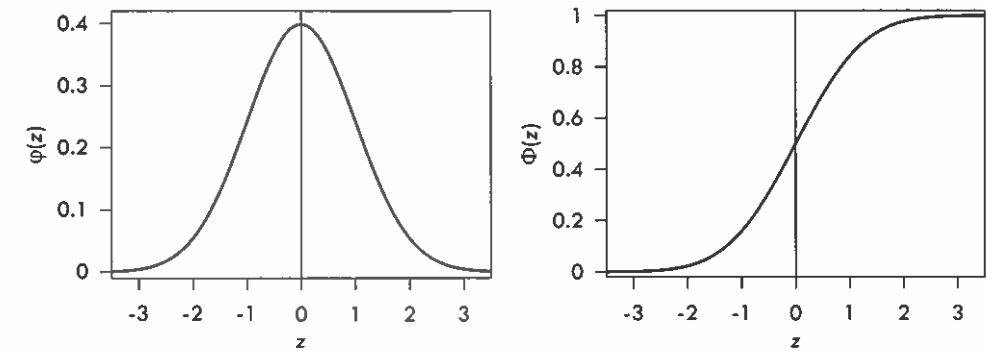
$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \quad (7.30)$$

normalna raspodela postaje *standardna normalna raspodela* sa funkcijom gustine raspodele

$$\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}, \quad -\infty < z < \infty \quad (7.31)$$

koja zavisi samo od vrednosti z (slika 7.13). Slučajna promenljiva Z iz (7.30) naziva se *standardna normalna promenljiva*. Ona je normalna slučajna promenljiva sa srednjom vrednošću 0 i standardnom devijacijom 1. Funkcija standardne normalne raspodele

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^z \phi(u) du = \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2} du \quad (7.32)$$

Slika 7.13. Standardna normalna raspodela ($\mu = 0$, $\sigma = 1$): gustina raspodele (levo) i funkcija raspodele (desno).

gde je u pomoćna promenljiva za integraciju, nema analitički oblik jer gustina $\phi(z)$ u nije integrabilna funkcija. Njene vrednosti su date u dodatku D.2, a grafički je prikazana na slici 7.13. Za računanje vrednosti z za zadatu vrednost funkcije raspodele može se koristiti tablica u dodatku D.3.

Važna osobina normalne raspodele je njena simetričnost u odnosu na srednju vrednost (koeficijent asimetrije je jednak nuli: $C_s = 0$). Zbog toga važi:

$$\begin{aligned} \phi(-z) &= \phi(z) \\ \Phi(-z) &= 1 - \Phi(z) \end{aligned}$$

Raspodela $F(x)$ normalne slučajne promenljive X računa se pomoću standardne normalne raspodele $\Phi(z)$ na osnovu:

$$F(x) = P\{X \leq x\} = P\{Z \cdot \sigma + \mu \leq x\} = P\{Z \leq (x - \mu) / \sigma\} = \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right) \quad (7.33)$$

Normalna raspodela ima ograničenu primenu za hidrološke nizove s obzirom da je simetrična u odnosu na srednju vrednost, dok većina hidroloških promenljivih pokazuje asimetriju. Pored toga, normalno raspoređena slučajna promenljiva nije ograničena jer se kreće u intervalu $(-\infty, \infty)$, dok je većina hidroloških veličina nenegativna.

U primenama normalne raspodele često se razmatra verovatnoća da slučajna promenljiva uzme vrednosti iz pojasa od $\pm z$ standardnih devijacija oko srednje vrednosti. Na primer, verovatnoća da normalno raspoređena slučajna promenljiva X uzme vrednost u intervalu $(\mu - \sigma, \mu + \sigma)$ jednaka je:

$$\begin{aligned} P\{\mu - \sigma < X < \mu + \sigma\} &= F(\mu + \sigma) - F(\mu - \sigma) = \\ &= \Phi(1) - \Phi(-1) = 0.84 - 0.16 = 0.68 \end{aligned} \quad (7.34)$$

Na sličan način može se pokazati da je:

$$\begin{aligned} P\{\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma\} &= \Phi(2) - \Phi(-2) = 0.977 - 0.023 = 0.954 \\ P\{\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma\} &= \Phi(3) - \Phi(-3) = 0.9987 - 0.0014 = 0.9973 \end{aligned} \quad (7.35)$$

Drugim rečima, za slučajnu promenljivu koja ima normalnu raspodelu se očekuje da se oko 95% podataka nađe u pojasu od ± 2 standardne devijacije oko srednje vrednosti, a da se skoro svi podaci nađu u pojasu od ± 3 standardne devijacije oko srednje vrednosti (što je tzv. „pravilo 3σ “ koje se koristi u kontroli kvaliteta).

7.3.4 Log-normalna raspodela

Ako slučajna promenljiva $Y = \ln X$ ima normalnu raspodelu, tada se za slučajnu promenljivu X kaže da ima logaritamsko-normalnu raspodelu (uobičajen je skraćeni naziv log-normalna raspodela). Funkcija gustine log-normalne raspodele glasi:

$$f(x) = \frac{1}{bx\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\ln x - a)^2}{2b^2}\right], \quad x > 0$$

gde su a i b parametri log-normalne raspodele. Prva dva momenta slučajne promenljive X zavise od parametara a i b na sledeći način:

$$\begin{aligned} \mu_X &= E(X) = e^{a+b^2/2} \\ \sigma_X^2 &= D(X) = e^{2a+b^2} (e^{b^2} - 1) \end{aligned}$$

dok je koeficijent asimetrije:

$$C_{s,X} = 3C_{v,X} + C_{v,X}^3$$

Za parametre a i b može se pokazati da predstavljaju srednju vrednost i standardnu devijaciju promenljive $Y = \ln X$:

$$\begin{aligned} \mu_Y &= E(Y) = a \\ \sigma_Y^2 &= D(Y) = b^2 \end{aligned}$$

Izračunavanje log-normalne raspodele svodi se na izračunavanje standardne normalne raspodele ako se uvede smena:

$$Z = \frac{Y - \mu_Y}{\sigma_Y} = \frac{\ln X - a}{b} \quad (7.36)$$

pa je tada:

$$\begin{aligned} F(x) &= P\{X \leq x\} = P\{e^Y \leq x\} = P\{Y \leq \ln x\} = \\ &= P\{Z \cdot \sigma_Y + \mu_Y \leq \ln x\} = P\{Z \leq (\ln x - \mu_Y) / \sigma_Y\} = \Phi\left(\frac{\ln x - a}{b}\right) \end{aligned}$$

Log-normalna raspodela ima veću primenu u hidrologiji od normalne raspodele. Logaritmovanjem podataka se smanjuje pozitivna asimetrija koja se često uočava kod hidroloških veličina (zato što se logaritmovanjem veliki brojevi smanjuju relativno više nego mali brojevi). Ukoliko podaci nakon logaritmovanja i dalje pokazuju značajnu asimetriju, log-normalna raspodela nije pogodna za primenu. Pored toga, domen slu-

čajne promenljive koja ima log-normalnu raspodelu je $x > 0$, što više odgovara prirodi hidroloških veličina.

Alternativna forma log-normalne raspodele. U primeni log-normalne raspodele u hidrologiji često se koristi dekadni logaritam slučajne promenljive X umesto prirodnog. Gustina raspodele promenljive X tada glasi:

$$f(x) = \frac{1}{b_1 x \sqrt{2\pi} \cdot \ln 10} \exp\left[-\frac{(\log x - a_1)^2}{2b_1^2}\right], \quad x > 0$$

gde su a_1 i b_1 parametri koji predstavljaju srednju vrednost i standardnu devijaciju promenljive $U = \log X$. Tada važi:

$$\begin{aligned} F(x) &= P\{X \leq x\} = P\{10^U \leq x\} = P\{U \leq \log x\} = \\ &= P\{Z \cdot \sigma_U + \mu_U \leq \log x\} = P\{Z \leq (\log x - \mu_U) / \sigma_U\} = \Phi\left(\frac{\log x - a_1}{b_1}\right) \end{aligned}$$

Prva dva momenta slučajne promenljive X su jednaka:

$$\begin{aligned} \mu_X &= E(X) = 10^{a_1 + (\ln 10)b_1^2/2} \\ \sigma_X^2 &= D(X) = 10^{2a_1 + (\ln 10)b_1^2} (10^{(\ln 10)b_1^2} - 1) \end{aligned}$$

Troparameterska logaritamska normalna raspodela dobija se uvođenjem trećeg parametra c koji predstavlja donju granicu slučajne promenljive X . Gustina ove raspodele tada glasi:

$$f(x) = \frac{1}{b(x-c)\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{[\ln(x-c) - a]^2}{2b^2}\right\}, \quad x > c$$

Prva dva momenta slučajne promenljive X su jednaka:

$$\begin{aligned} \mu_X &= E(X) = c + e^{a+b^2/2} \\ \sigma_X^2 &= D(X) = e^{2a+b^2} (e^{b^2} - 1) \end{aligned}$$

dok je koeficijent asimetrije:

$$C_{s,X} = 3C + C^3, \quad C = \sqrt{e^{b^2} - 1}$$

Kod ove raspodele se zapravo podrazumeva da slučajna promenljiva $W = \ln(X - c)$ ima normalnu raspodelu. Parametri a i b onda predstavljaju srednju vrednost i standardnu devijaciju promenljive W :

$$\begin{aligned} \mu_W &= E[W] = a \\ \sigma_W^2 &= D[W] = b^2 \end{aligned}$$

Uz smenu:

$$Z = \frac{W - \mu_W}{\sigma_W} = \frac{\ln(X-c) - a}{b}$$

troparameterska log-normalna raspodela svodi se na standardnu normalnu raspodelu.

7.3.5 Dvoparameterska gama raspodela

Pod gama raspodelama podrazumeva se čitav spektar različitih raspodela koje u sebi sadrže gama funkcije. Osnovni oblik gama raspodele ima dva parametra koji daju veoma različite oblike funkcije gustine raspodele (slika 7.14). Funkcija gustine dvoparameterske gama raspodele glasi:

$$f(x) = \frac{1}{\beta \Gamma(\alpha)} \left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha-1} e^{-x/\beta}, \quad x > 0 \quad (7.37)$$

gde su α i β parametri, dok je $\Gamma(\cdot)$ gama funkcija. Parametar α je *parametar oblika* (jer daje različite oblike gustine raspodele), dok je parametar β *parametar razmere* (jer se pomoću njega skaliraju vrednosti slučajne promenljive). I ova funkcija gustine nije integrabilna, pa se vrednosti funkcije raspodele određuju na osnovu tablica.

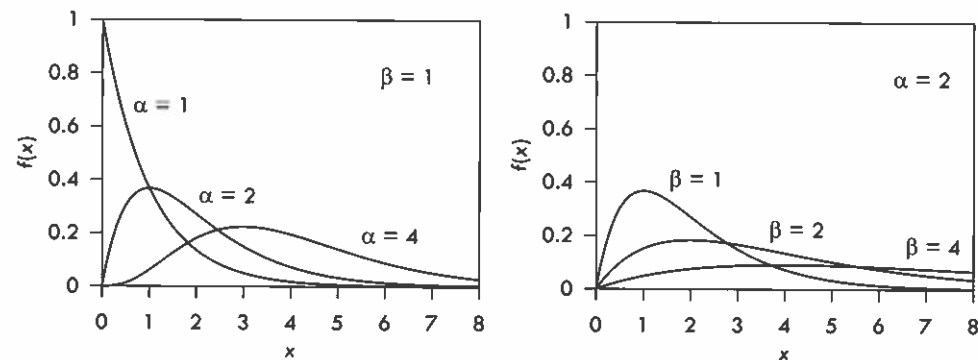
Gama raspodela je korisna za primenu kod asimetričnih hidroloških podataka (pa nestaje potreba za logaritmovanjem kao kod log-normalne raspodele). Ova raspodela je ograničena sa donje strane u tački $x = 0$ i definisana je za pozitivne vrednosti slučajne promenljive ($x > 0$).

Za izračunavanje gama raspodele potrebno je odrediti i vrednosti gama funkcije. Gama funkcija se definiše na sledeći način:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt \quad (7.38)$$

Za celobrojne vrednosti $\alpha = n$, gama funkcija se svodi na faktorijel:

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$



Slika 7.14. Gustina dvoparameterske gama raspodele za različite vrednosti parametara α i β . To su ujedno i oblici Pirsonove raspodele III tipa za vrednost parametra lokacije c jednakom nuli.

Vrednosti gama funkcije date su u dodatku D.4. Gama funkcija se može približno izračunati pomoću ugrađenih funkcija u raznim softverskim paketima kao što je Microsoft Excel (videti dodatak D.1) ili Matlab.

7.3.6 Pirsonova raspodela III tipa

Čuveni statističar Karl Pirson razvio je čitav sistem raspodela koji obuhvata dvanaest tipova (Radičević i sar., 2015). Tip III često se naziva i troparameterska gama raspodela jer se može dobiti uvođenjem trećeg parametra c u dvoparametersku gama raspodelu kao *parametra lokacije*:

$$f(x) = \frac{1}{\beta \Gamma(\alpha)} \left(\frac{x-c}{\beta}\right)^{\alpha-1} e^{-(x-c)/\beta}, \quad x > c \quad (7.39)$$

To znači da je ova funkcija raspodele ograničena sa donje strane u tački $x = c$. Ova raspodela je veoma fleksibilna jer ima tri parametra koji mogu dati veoma različite oblike gustine. Zbog mogućnosti da se njome opišu raspodele različite asimetrije, Pirsonova raspodela III tipa se često koristi kao raspodela za maksimalne godišnje protoke. Prva dva momenta i koeficijent asimetrije ove raspodele su:

$$\mu = \alpha\beta + c, \quad \sigma^2 = \beta^2\alpha, \quad C_s = \frac{2}{\sqrt{\alpha}}$$

Mnoge raspodele su specijalni slučajevi Pirsonovih raspodela. Tako je normalna raspodela specijalan slučaj Pirsonove raspodele III tipa kada je koeficijent asimetrije jednak nuli (odnosno parametar α teži beskonačnosti).

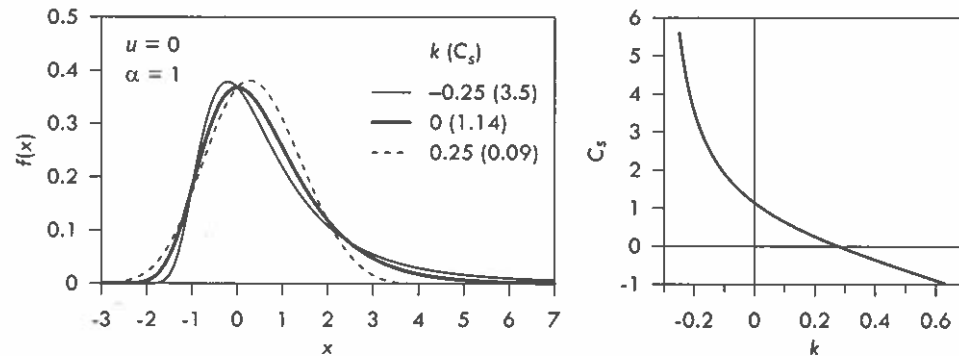
S obzirom da gustina (7.39) nije integrabilna funkcija, za izračunavanje funkcije raspodele se moraju koristiti tablice. U literaturi se za ovu raspodelu obično daju tablice sa vrednostima *faktora frekvencije* K_p :

$$K_p(F) = \frac{X(F) - \mu}{\sigma} \quad (7.40)$$

Vrednosti faktora frekvencije K_p se tabulišu u zavisnosti od vrednosti funkcije raspodele F i koeficijenta asimetrije C_s . Ove tablice date su u dodatku D.5. Kao aproksimativna formula za faktor frekvencije Pirson III raspodele koristi se i Wilson-Hilferty formula (prema Stedingeru i sar. 1993), koja se smatra dobrom za verovatnoće između 0.01 i 0.99 i za $|C_s| \leq 2$ i koja glasi:

$$K_p(F) = \frac{2}{C_s} \left[\left(1 + \frac{C_s}{6} Z_N(F) - \frac{C_s^2}{36} \right)^3 - 1 \right] \quad (7.41)$$

gde je $Z_N(F) = \Phi^{-1}(F)$ inverzna funkcija standardne normalne raspodele za vrednost funkcije raspodele F .



Slika 7.15. Gustina uopštene raspodele ekstremnih vrednosti (levo) i zavisnost koeficijenta asimetrije od parametra oblika k (desno).

7.3.7 Log-Pirsonova raspodela III tipa

Ako promenljiva $Y = \ln X$ ima Pirson III raspodelu, tada promenljiva X ima log-Pirson III raspodelu. Ova raspodela je najčešće korišćena raspodela za maksimalne godišnje protoke (u SAD dugo predstavlja standard za proračun velikih voda; IACWD, 1982), kao i za minimalne godišnje protoke. Specijalan slučaj log-Pirson III raspodele za $C_s = 0$ jeste log-normalna raspodela.

Ova raspodela se u hidrološkoj praksi najčešće koristi tako što se podaci logaritmuju, pa se sa njima sprovodi proračun kao za Pirson III raspodelu. Slično kao i kod log-normalne raspodele, u praksi se često koristi dekadni logaritam slučajne promenljive X umesto prirodnog.

7.3.8 Raspodele ekstremnih vrednosti

Ekstremne vrednosti su maksimalne ili minimalne vrednosti izabrane iz skupa podataka. Na primer, maksimalni godišnji protok na nekoj hidrološkoj stanici je najveća izmerena vrednost protoka tokom godine, a maksimalni godišnji protoci za svaku godinu čine niz ekstremnih vrednosti koje se mogu statistički analizirati. Dokazano je da raspodele ekstremnih vrednosti izvučenih iz skupa podataka koji imaju bilo koju raspodelu teže ka jednoj od tri *raspodele ekstremnih vrednosti* (tip I, tip II i tip III), pod uslovom da je broj izabranih vrednosti veliki. Raspodela ekstremnih vrednosti tipa I naziva se Gumbelova raspodela, prema čuvenom nemačkom statističaru koji bio pionir u razmatranju teorije ekstrema, a tip II se naziva i Frešeova raspodela. Ako se promenljiva X u tipu III zameni sa $-X$, onda se radi o Vejbulovoj raspodeli.

Ova tri oblika raspodele mogu se podvesti pod jedan opšti oblik, nazvan *uopštena raspodela ekstremnih vrednosti* (ili skraćeno GEV, od engl. *generalized extreme value distribution*). Ova raspodela je poznata i kao Dženkinsonova raspodela (Jenkinson, 1955). Funkcija raspodele glasi:

$$F(x) = \begin{cases} \exp\left[-\left(1 - k \frac{x-u}{\alpha}\right)^{1/k}\right], & k \neq 0 \\ \exp\left[-\exp\left(-\frac{x-u}{\alpha}\right)\right], & k = 0 \end{cases} \quad (7.42)$$

gde su u , α i k parametri (u je parametar lokacije, α je parametar razmere i k je parametar oblika). Parametar α je uvek pozitivan ($\alpha > 0$). U graničnom slučaju za $k = 0$ dobija se tip I ili Gumbelova raspodela, opisana detaljnije u sledećem odeljku. Raspodela tipa II se dobija iz opšteg oblika za $k < 0$ sa domenom definisanosti $(u + \alpha/k) < x < \alpha$, a tipa III za $k > 0$ sa domenom definisanosti $-\alpha < x < (u + \alpha/k)$. Oblici gustine raspodele za izabrane vrednosti parametra k prikazani su na slici 7.15 levo.

Prva dva momenta i koeficijent asimetrije ove raspodele dati su sledećim izrazima:

$$\mu = u + \frac{\alpha}{k} [1 - \Gamma(1+k)], \quad \sigma^2 = \left(\frac{\alpha}{k}\right)^2 [\Gamma(1+2k) - \Gamma^2(1+k)]$$

$$C_s = \text{sgn}(k) \frac{-\Gamma(1+3k) + 3\Gamma(1+2k)\Gamma(1+k) - 2\Gamma^3(1+k)}{[\Gamma(1+2k) - \Gamma^2(1+k)]^{3/2}}$$

Potrebno je obratiti pažnju da srednja vrednost nije definisana za $k < -1$, disperzija za $k < -1/2$ i koeficijent asimetrije za $k < -1/3$. Koeficijent asimetrije je pozitivan kada je $k < 0.2776$, što se može videti na slici 7.15 desno koja prikazuje zavisnost koeficijenta asimetrije GEV raspodele od parametra k . Ova zavisnost je data i tabelarno u dodatku D.6.

7.3.9 Gumbelova raspodela

Gumbelova raspodela ili raspodela ekstremnih vrednosti tipa I, koja se često koristi u hidrologiji, ima gustinu raspodele:

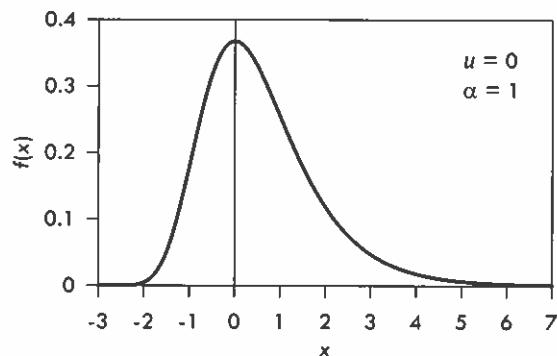
$$f(x) = \frac{1}{\alpha} \exp\left(-\frac{x-u}{\alpha}\right) \exp\left[-\exp\left(-\frac{x-u}{\alpha}\right)\right], \quad -\infty < x < \infty \quad (7.43)$$

Kako je ova gustina integrabilna funkcija, Gumbelova raspodela ima eksplicitan oblik funkcije raspodele:

$$F(x) = \exp\left[-\exp\left(-\frac{x-u}{\alpha}\right)\right], \quad -\infty < x < \infty \quad (7.44)$$

Ova raspodela je specijalni slučaj uopštene raspodele ekstremnih vrednosti (izraz 7.42) kada je parametar k te raspodele jednak nuli ($k = 0$). Srednja vrednost i standardna devijacija Gumbelove raspodele su:

$$\mu = u + 0.5772\alpha, \quad \sigma = \frac{\alpha\pi}{\sqrt{6}}$$

Slika 7.16. Gustina standardne Gumbelove raspodele ($u = 0$ i $\alpha = 1$).

dok je koeficijent asimetrije konstantan i iznosi $C_s = 1.14$. Transformisana Gumbelova slučajna promenljiva

$$Y = \frac{X - u}{\alpha}$$

naziva se standardizovanom Gumbelovom promenljivom čija je raspodela Gumbelova sa parametrima $u = 0$ i $\alpha = 1$. Funkcija raspodele G standardizovane Gumbelove promenljive Y je:

$$G(y) = \exp[-\exp(-y)] \quad (7.45)$$

Na slici 7.16 prikazana je gustina standardne Gumbelove raspodele.

7.3.10 Vejbulova raspodela

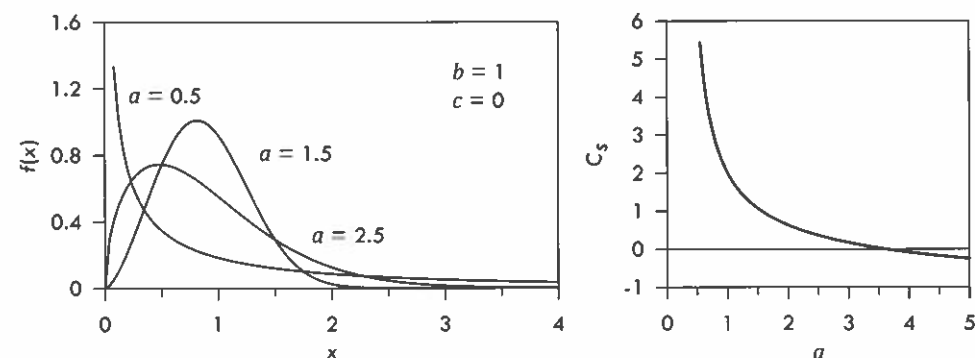
Vejbulova raspodela, koja takođe nalazi primenu u hidrologiji u analizi malih voda i kao raspodela prekoračenja iznad nekog praga, ima gustinu raspodele koja glasi:

$$f(x) = \frac{a}{b} \left(\frac{x-c}{b}\right)^{a-1} \exp\left[-\left(\frac{x-c}{b}\right)^a\right], \quad x > c \quad (7.46)$$

i funkciju raspodele:

$$F(x) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{x-c}{b}\right)^a\right], \quad x > c \quad (7.47)$$

Vejbulova raspodela sledi iz uopštene raspodele ekstremnih vrednosti (izraz 7.42) kada se X zameni sa $-X$, pri čemu važe sledeće relacije za parametre ove dve raspodele: $a = 1/k$, $b = \alpha/k$ i $c = -(u + \alpha/k)$. Gustina Vejbulove raspodele prikazana je na slici 7.17 za različite vrednosti parametara a . Prva dva momenta i koeficijent asimetrije Vejbulove raspodele su:

Slika 7.17. Gustina Vejbulove raspodele za različite vrednosti parametra a i za $b = 1$ i $c = 0$ (levo) i zavisnost koeficijenta asimetrije od parametara oblika a (desno).

$$\mu = c + b\Gamma_1, \quad \sigma^2 = b^2(\Gamma_2 - \Gamma_1^2), \quad C_s = \frac{\Gamma_3 - 3\Gamma_1\Gamma_2 + 2\Gamma_1^3}{(\Gamma_2 - \Gamma_1^2)^{3/2}}$$

gde su $\Gamma_r = \Gamma(1 + r/a)$ gama funkcije odgovarajućih argumenata. Vrednosti gama funkcije date su u dodatku D.4.

Oblici Vejbulove raspodele prikazani su na levom dijagramu na slici 7.17 levo, dok je na desnom dijagramu prikazana zavisnost koeficijenta asimetrije od parametara oblika a . Ta zavisnost je takođe data i tabelarno u dodatku D.7.

7.3.11 Eksponecijalna raspodela

Eksponecijalna raspodela može se posmatrati kao specijalni slučaj dvoparametarske gama raspodele (izraz 7.37) za $\alpha = 1$:

$$f(x) = \frac{1}{\beta} e^{-x/\beta}, \quad x \geq 0$$

Ona je takođe i specijalni slučaj Vejbulove raspodele, što se dobija kada se u izraz (7.47) stavi $\beta = b$, $a = 1$ i $c = 0$. Funkcija ekspancijalne raspodele ima analitički oblik:

$$F(x) = 1 - e^{-x/\beta}, \quad x \geq 0 \quad (7.48)$$

Oblik gustine ekspancijalne raspodele se može videti na slici 7.14 za slučaj $\alpha = 1$. Gustina i funkcija ekspancijalne raspodele za $\beta = 1$ mogu se videti i na slici 7.4.

Ponekad se koristi i dvoparametarska ekspancijalna raspodela:

$$F(x) = 1 - e^{-(x-c)/\beta}, \quad x \geq c$$

koja je specijalni slučaj raspodele Pirson III (izraz 7.39) za $\alpha = 1$ i Vejbulove raspodele za $a = 1$.

Neki nizovi hidroloških procesa, kao što je pojava velikih voda ili pojava kišnih epizoda, mogu se posmatrati kao Puasonov slučajni proces u kome se događaji javljaju trenutno i nezavisno jedni od drugih u vremenu. U takvim procesima vreme između

događaja se opisuje eksponencijalnom raspodelom čiji parametar β predstavlja srednje vreme između događaja, dok recipročna vrednost parametra β predstavlja prosečni intenzitet javljanja događaja. Eksponencijalna raspodela se, kao i Vejbulova, koristi kao raspodela vrednosti prekoračenja razmatrane veličine iznad nekog praga.

7.3.12 Rekapitulacija teorijskih raspodela

U ovom odeljku daje se rekapitulacija diskretnih i kontinualnih raspodela kroz tabelarni prikaz (tabele 7.4 i 7.5) sa definicijama i osnovnim karakteristikama raspodela.

Tabela 7.4. Raspodele verovatnoće diskretnih promenljivih korišćene u hidrologiji.

Raspodela	Srednja vrednost, disperzija i indeks disperzije
Binomna raspodela $P\{X=x\} = \binom{m}{x} p^x (1-p)^{m-x}, x=0,1,2,\dots$	$\mu = mp$ $\sigma^2 = mp(1-p)$ $I_D = 1-p$
Puasonova raspodela $P\{X=x\} = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}, x=0,1,2,\dots$	$\mu = \lambda$ $\sigma^2 = \lambda$ $I_D = 1$

Tabela 7.5. Raspodele verovatnoće kontinualnih promenljivih korišćene u hidrologiji.

Gustina raspodele $f(x)$, funkcija raspodele* $F(x)$ i inverzna funkcija raspodele* $x(F)$ (*samo za raspodele sa eksplicitnim izrazom za funkciju raspodele)	Srednja vrednost, disperzija i koeficijent asimetrije
Normalna raspodela $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right], -\infty < x < \infty$	$\mu_X = \mu$ $\sigma_X^2 = \sigma^2$ $C_{s,X} = 0$
Standardna normalna raspodela $\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right), -\infty < z < \infty$ $\Phi(z) = \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-u^2/2) du$	$\mu_Z = 0$ $\sigma_Z^2 = 1$ $C_{s,Z} = 0$
Log-normalna dvoparameterska raspodela $f(x) = \frac{1}{bx\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\ln x - a)^2}{2b^2}\right], x > 0$ smena: $Y = \ln X$	$\mu_X = e^{a+b^2/2}$ $\sigma_X^2 = e^{2a+b^2}(e^{b^2}-1)$ $C_{s,X} = 3C_{v,X} + C_{v,X}^3$ $\mu_Y = a, \sigma_Y^2 = b^2, C_{s,Y} = 0$

Tabela 7.5 (nastavak). Raspodele verovatnoće kontinualnih promenljivih korišćene u hidrologiji.

Gustina raspodele $f(x)$, funkcija raspodele* $F(x)$ i inverzna funkcija raspodele* $x(F)$ (*samo za raspodele sa eksplicitnim izrazom za funkciju raspodele)	Srednja vrednost, disperzija i koeficijent asimetrije
Log-normalna dvoparameterska raspodela $f(x) = \frac{1}{b_1 x \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\log x - a_1)^2}{2b_1^2}\right], x > 0$ smena: $U = \log X$	$\mu_X = 10^{a_1 + (\ln 10)b_1^2/2}$ $\sigma_X^2 = 10^{2a_1 + (\ln 10)b_1^2} (10^{(\ln 10)b_1^2} - 1)$ $C_{s,X} = 3C_{v,X} + C_{v,X}^3$ $\mu_U = a_1, \sigma_U^2 = b_1^2, C_{s,U} = 0$
Log-normalna troparameterska raspodela $f(x) = \frac{1}{b(x-c)\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{[\ln(x-c)-a]^2}{2b^2}\right\}, x > c$ smena: $W = \ln(X-c)$	$\mu_X = c + e^{a+b^2/2}$ $\sigma_X^2 = e^{2a+b^2}(e^{b^2}-1)$ $C_{s,X} = 3C + C^3, C = \sqrt{e^{b^2}-1}$ $\mu_W = a, \sigma_W^2 = b^2, C_{s,W} = 0$
Gama raspodela $f(x) = \frac{1}{\beta\Gamma(\alpha)} \left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha-1} e^{-x/\beta}, x \geq 0$	$\mu_X = \alpha\beta$ $\sigma_X^2 = \alpha\beta^2$ $C_{s,X} = 2/\sqrt{\alpha}$
Pirson III raspodela $f(x) = \frac{1}{\beta\Gamma(\alpha)} \left(\frac{x-c}{\beta}\right)^{\alpha-1} e^{-(x-c)/\beta}, x \geq c$	$\mu_X = \alpha\beta + c$ $\sigma_X^2 = \alpha\beta^2$ $C_{s,X} = 2/\sqrt{\alpha}$
Log-Pirson III raspodela $f(x) = \frac{1}{x\beta\Gamma(\alpha)} \left(\frac{y-c}{\beta}\right)^{\alpha-1} e^{-(y-c)/\beta}, y = \ln x \geq c$ gde je: $y = \ln x$	$\mu_Y = \alpha\beta + c$ $\sigma_Y^2 = \alpha\beta^2$ $C_{s,Y} = 2/\sqrt{\alpha}$
Gumbelova raspodela $f(x) = \frac{1}{\alpha} \exp\left[-\frac{x-u}{\alpha} - \exp\left(\frac{x-u}{\alpha}\right)\right], -\infty < x < \infty$ $F(x) = \exp\left[-\exp\left(\frac{x-u}{\alpha}\right)\right]$ $x(F) = u - \alpha \ln(-\ln F)$	$\mu_X = u + 0.5772\alpha$ $\sigma_X^2 = \frac{\alpha^2 \pi^2}{6}$ $C_{s,X} = 1.14$
Uopštena raspodela ekstremnih vrednosti (Dženkinsonova raspodela) $F(x) = \exp\left[-\left(1 - k\frac{x-u}{\alpha}\right)^{1/k}\right], k \neq 0$ $x(F) = u + \frac{\alpha}{k} [1 - (-\ln F)^k], k \neq 0$ pri čemu je: $k < 0: x > u + \alpha/k$ $k > 0: x < u + \alpha/k$ Za $k = 0$, raspodela se svodi na Gumbelovu.	$\mu_X = u + \frac{\alpha}{k} (1 - \Gamma_1)$ $\sigma_X^2 = \left(\frac{\alpha}{k}\right)^2 (\Gamma_2 - \Gamma_1^2)$ $C_s = \text{sgn}(k) \frac{-\Gamma_3 + 3\Gamma_1\Gamma_2 - 2\Gamma_1^3}{(\Gamma_2 - \Gamma_1^2)^{3/2}}$ gde je $\Gamma_r = \Gamma(1+rk)$

Tabela 7.5 (nastavak). Raspodele verovatnoće kontinualnih promenljivih korišćene u hidrologiji.

Gustina raspodele $f(x)$, funkcija raspodele* $F(x)$ i inverzna funkcija raspodele* $x(F)$ (*samo za raspodele sa eksplicitnim izrazom za funkciju raspodele)	Srednja vrednost, disperzija i koeficijent asimetrije
<p>Vejbulova raspodela</p> $f(x) = \frac{\alpha}{b} \left(\frac{x-c}{b}\right)^{\alpha-1} \exp\left[-\left(\frac{x-c}{b}\right)^\alpha\right], \quad x > c$ $F(x) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{x-c}{b}\right)^\alpha\right]$ $x(F) = c + b[-\ln(1-F)]^{1/\alpha}$	$\mu_x = c + b\Gamma_1$ $\sigma_x^2 = b^2(\Gamma_2 - \Gamma_1^2)$ $C_{s,x} = \frac{\Gamma_3 - 3\Gamma_1\Gamma_2 + 2\Gamma_1^3}{(\Gamma_2 - \Gamma_1^2)^{3/2}}$ <p>gde je $\Gamma_r = \Gamma(1+r/a)$</p>
<p>Eksponencijalna raspodela</p> $f(x) = \frac{1}{\beta} e^{-x/\beta}, \quad x \geq 0$ $F(x) = 1 - e^{-x/\beta}$ $x(F) = -\beta \ln(1-F)$	$\mu_x = \beta$ $\sigma_x^2 = \beta^2$ $C_{s,x} = 2$

7.4 Prilagođavanje teorijske funkcije raspodele

Ako se može pronaći teorijska raspodela verovatnoće koja odgovara podacima iz uzorka, onda se ona može koristiti za određivanje verovatnoće događaja koji inače nisu zastupljeni u uzorku. Teorija verovatnoće obiluje različitim teorijskim raspodelama koje imaju različit broj parametara. Postupak određivanja vrednosti tih parametara na osnovu podataka iz uzorka tako da se teorijska raspodela što bolje slaže sa empirijskim podacima naziva se *prilagođavanje* teorijske raspodele empirijske raspodeli.

Ocena vrednosti parametara teorijskih raspodela na osnovu uzorka može se zasnovati na različitim principima. U statističkoj teoriji razvijene su različite metode za ocenu parametara. Najzastupljenija među njima je *metoda momenata*, dok ostale metode obuhvataju metodu maksimalne verodostojnosti, metodu verovatnosnih težinskih momenata, metodu L-momenata, metodu najmanjih kvadrata i druge.

Metodu momenata prvi je predložio veliki statističar Karl Pirson (Chow i sar., 1988). U njoj se smatra da će parametri raspodele biti dobro ocenjeni ako su momenti te raspodele jednaki odgovarajućim uzoračkim momentima. Iz tog uslova se parametri računaju. U obzir treba uzeti onoliko momenata koliko teorijska raspodela ima parametara. Za jednoparametarske raspodele dovoljno je izjednačiti prvi momenat teorijske raspodele oko koordinatnog početka sa uzoračkom sredinom. Za raspodele sa dva ili tri parametra, koriste se i disperzija σ^2 kao drugi momenat i koeficijent asimetrije C_s kao bezdimenzionalni treći momenat koji se izjednačavaju sa uzoračkom disperzijom S^2 i uzoračkim koeficijentom asimetrije c_s da bi se izračunali drugi i treći parametar raspodele. U poslednjoj koloni tabele 7.5 dati su izrazi za prva dva momenta i koeficijent asimetrije teorijskih raspodela u funkciji parametara. Ti izrazi predstavljaju sisteme jednačina koji se rešavaju po nepoznatim parametrima, a rešenja su ocene parametara koje zavise od empirijskih momenata, odnosno od podataka iz uzorka.

Tabela 7.6. Izrazi za ocenu parametara izabranih diskretnih teorijskih raspodela verovatnoće.

Raspodela	Ocena parametara (metoda momenata)
Binomna raspodela	<p>Ako je poznat parametar m (broj eksperimenata):</p> $\hat{p} = \frac{\bar{x}}{m}$ <p>Ako je nepoznat parametar m:</p> $\hat{m} = \frac{\bar{x}}{1 - I_D}, \quad \hat{p} = \frac{\bar{x}}{m}$
Puasonova raspodela	$\hat{\lambda} = \bar{x}$

Tabela 7.7. Izrazi za ocenu parametara izabranih kontinualnih teorijskih raspodela verovatnoće.

Raspodela	Ocena parametara
Normalna raspodela	Metoda momenata i metoda maksimalne verodostojnosti: $\hat{\mu} = \bar{x}, \quad \hat{\sigma} = S_x$
Log-normalna dvoparametarska raspodela (smena: $Y = \ln X$)	<p>Metoda momenata:</p> $\hat{b} = \sqrt{\ln(c_{vx}^2 + 1)}, \quad \hat{a} = \ln \bar{x} - \frac{1}{2} \hat{b}^2$ <p>Metoda maksimalne verodostojnosti:</p> $\hat{a} = \bar{y}, \quad \hat{b} = s_y \quad \text{gde je } y = \ln x$
Log-normalna dvoparametarska raspodela (smena: $U = \log X$)	<p>Metoda momenata:</p> $\hat{b}_1 = \sqrt{\frac{\log(c_{vx}^2 + 1)}{\ln 10}}, \quad \hat{a}_1 = \log \bar{x} - \frac{1}{2} \hat{b}_1^2 (\ln 10)$ <p>Metoda maksimalne verodostojnosti:</p> $\hat{a}_1 = \bar{u}, \quad \hat{b}_1 = S_u \quad \text{gde je } u = \log x$
Log-normalna troparametarska raspodela	<p>Efikasna metoda:</p> $\hat{c} = \frac{x_{(1)}x_{(n)} - x_{Me}^2}{x_{(1)} + x_{(n)} - 2x_{Me}}, \quad \hat{a} = \bar{w}, \quad \hat{b} = S_w$ <p>gde je $x_{(1)}$ najmanji član niza, $x_{(n)}$ najveći član niza, x_{Me} medijana niza (za ocenu x_{Me} videti izraz 7.28), i gde je $w = \ln(x - \hat{c})$</p>
Pirson III raspodela	Metoda momenata: $\hat{\alpha} = 4/c_{sx}^2, \quad \hat{\beta} = \frac{S_x \cdot c_{sx}}{2}, \quad \hat{c} = \bar{x} - \hat{\alpha}\hat{\beta}$
Log-Pirson III raspodela	Modifikovana metoda momenata: $\hat{\alpha} = 4/c_{sy}^2, \quad \hat{\beta} = \frac{S_y \cdot c_{sy}}{2}, \quad \hat{c} = \bar{y} - \hat{\alpha}\hat{\beta}$ gde je $y = \ln x$
Gumbelova raspodela	Metoda momenata: $\hat{u} = \bar{x} - 0.45 \cdot S_x, \quad \hat{\alpha} = \frac{\sqrt{6}}{\pi} S_x = 0.78 \cdot S_x$

Tabela 7.7 (nastavak). Izrazi za ocenu parametara izabranih kontinualnih teorijskih raspodela verovatnoće.

Raspodela	Ocena parametara
Uopštena raspodela ekstremnih vrednosti (Dženkinsonova raspodela)	Metoda momenata: $g(\hat{k}) \equiv \operatorname{sgn}(\hat{k}) \frac{-\Gamma_3 + 3\Gamma_1\Gamma_2 - 2\Gamma_1^3}{(\Gamma_2 - \Gamma_1^2)^{3/2}} = c_{sx} \rightarrow \hat{k}$ $\hat{\alpha} = \frac{ \hat{k} \cdot S_x}{\sqrt{\Gamma_2 - \Gamma_1^2}}, \quad \hat{u} = \bar{x} - \frac{\hat{\alpha}}{k} (1 - \Gamma_1)$ <p>gde je $\Gamma_r = \Gamma(1 + r\hat{k})$. Videti dodatak D.6 za zavisnost C_s-k.</p>
Vejbulova raspodela	Metoda momenata: $g(\hat{a}) = \frac{\Gamma_3 - 3\Gamma_1\Gamma_2 + 2\Gamma_1^3}{(\Gamma_2 - \Gamma_1^2)^{3/2}} = c_{sx} \rightarrow \hat{a}$ $\hat{b} = \frac{S_x}{\sqrt{\Gamma_2 - \Gamma_1^2}}, \quad \hat{c} = \bar{x} - \hat{b}\Gamma_1$ <p>gde je $\Gamma_r = \Gamma(1 + r/\hat{a})$. Videti dodatak D.7 za zavisnost C_s-a.</p>
Eksponecijalna raspodela	Metoda momenata: $\hat{\beta} = \bar{x}$

Metoda maksimalne verodostojnosti daje ocene parametara raspodela koje se, po nekim statističkim kriterijumima, generalno smatraju boljim od ocena po metodi momenata. Međutim, računanje tih ocena u najvećem broju slučajeva zahteva numeričko rešavanje sistema jednačina sa nepoznatim ocenama parametara, pa izlazi iz okvira ove knjige. Postupci za ocenu parametara ovom metodom mogu se naći u literaturi (npr. Rao & Hamed, 2000; Đorić i sar., 2007).

Metoda verovatnosnih težinskih momenata i metoda L-momenata takođe se zasnivaju na principu izjednačavanja teorijskih i empirijskih momenata, ali druge vrste. Verovatnosni težinski momenti (engl. *probability weighted moments*) su momenti u kojima podaci iz uzorka dobijaju težinu prema svom rang u uređenom nizu podataka, dok L-momenti predstavljaju linearne kombinacije verovatnosnih težinskih momenata. Metoda L-momenata se naročito koristi za uopštenu raspodelu ekstremnih vrednosti. Opis primena ovih metoda može se naći u literaturi (Stedinger i sar., 1993; Hosking & Wallis, 1997; Rao & Hamed, 2000).

U tabeli 7.6 je prikazana ocena parametara diskretnih raspodela (binomne i Puasonove), dok tabela 7.7 prikazuje izraze za ocenu parametara kontinualnih raspodela na osnovu metoda koje se najčešće primenjuju u praksi. U tabeli se može primetiti da svi izrazi imaju eksplicitnu formu, osim u slučaju ocene parametara oblika Vejbulove raspodele i uopštene raspodele ekstremnih vrednosti. U tom slučaju rešenje se traži numeričkim metodama. Za približno određivanje ocena ovih parametara na osnovu koeficijenta asimetrije uzorka mogu da posluže dijagrami zavisnosti parametra k uopštene raspodele ekstremnih vrednosti i a Vejbulove raspodele od koeficijenta asimetrije, prikazane na slikama 7.15 i 7.17, kao i tabelarne vrednosti date u dodacima D.6 i D.7.

Primer 7.5. Za niz maksimalnih godišnjih protoka Q_{\max} na reci Savi kod Sremske Mitrovice u periodu od 1926. do 2016. godine određene su osnovne statistike niza $X = Q_{\max}$:

$$\bar{x} = 4155 \text{ m}^3/\text{s}, \quad S = 799 \text{ m}^3/\text{s}, \quad c_v = 0.192, \quad c_s = 0.757$$

Metodom momenata odrediti parametre sledećih teorijskih raspodela: 1) Pirson III, 2) Gumbelove i 3) uopštene raspodele ekstremnih vrednosti.

Rešenje. Parametri teorijskih raspodela određuju se metodom momenata tako što se teorijski momenti izjednačavaju sa empirijskim. U tu svrhu koriste se izrazi dati u tabeli 7.5.

1) Pirson III raspodela. Izrazi za računanje parametara ove raspodele dati su u tabeli 7.7. Unošenjem vrednosti statistika osmotrenog niza u ove izraze, dobija se:

$$\hat{\alpha} = \frac{4}{c_s^2} = \frac{4}{0.757^2} = 6.98$$

$$\hat{\beta} = \frac{S \cdot c_s}{2} = \frac{799 \cdot 0.757}{2} = 302.3 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$\hat{c} = \bar{x} - \hat{\alpha}\hat{\beta} = 4155 - 6.98 \cdot 302.3 = 2045 \text{ m}^3/\text{s}$$

2) Gumbelova raspodela. Za razmatrani niz, ocene parametara Gumbelove raspodele su jednake (prema izrazima u tabeli 7.7):

$$\hat{\alpha} = 0.78 \cdot S = 0.78 \cdot 799 = 623 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$\hat{u} = \bar{x} - 0.45 \cdot S = 4155 - 0.45 \cdot 799 = 3796 \text{ m}^3/\text{s}$$

3) Uopštena raspodela ekstremnih vrednosti. Za ovu raspodelu najpre treba oceniti parametar k rešavanjem jednačine (tabela 7.7):

$$g(\hat{k}) \equiv \operatorname{sgn}(\hat{k}) \frac{-\Gamma_3 + 3\Gamma_1\Gamma_2 - 2\Gamma_1^3}{(\Gamma_2 - \Gamma_1^2)^{3/2}} = c_s$$

Ova jednačina se ne može rešiti eksplicitno po nepoznatom parametru k , pa se rešenje mora tražiti probanjem ili numeričkim metodama. Vrednost k se može odrediti i u Microsoft Excelu pomoću komande Goal Seek. Na slici 7.15 desno prikazan je dijagram zavisnosti koeficijenta asimetrije od parametra k , odakle se može približno odrediti vrednost k za dato c_s . Iz tabelarnih vrednosti za ovu zavisnost u dodatku D.6 za $c_s = 0.757$ dobija se (interpolacijom između tabuliranih vrednosti):

$$\hat{k} = 0.0734$$

Sa ovom vrednošću parametra k dobija se:

$$\Gamma_1 = \Gamma(1 + \hat{k}) = \Gamma(1.073) = 0.9627$$

$$\Gamma_2 = \Gamma(1 + 2\hat{k}) = \Gamma(1.146) = 0.9341$$

$$\Gamma_3 = \Gamma(1 + 3\hat{k}) = \Gamma(1.219) = 0.9131$$

Sa izračunatim k , za preostala dva parametra sledi:

$$\hat{\alpha} = \frac{S \cdot \hat{k}}{(\Gamma_2 - \Gamma_1^2)^{1/2}} = \frac{799 \cdot 0.073}{(0.9341 - 0.9627^2)^{1/2}} = 679 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$\hat{\mu} = \bar{x} - \frac{\hat{\alpha}}{\hat{k}}(1 - \Gamma_1) = 4155 - \frac{679}{0.073}(1 - 0.9627) = 3809 \text{ m}^3/\text{s}$$

Primer 7.6. Za niz maksimalnih godišnjih protoka Q_{\max} na reci Savi kod Sremske Mitrovice u periodu od 1926. do 2016. godine odrediti parametre log-normalne raspodele. Statistike niza $X = Q_{\max}$ date su u primeru 7.5, dok statistike logaritmovanog niza $Y = \ln X$ iznose:

$$\bar{y} = 8.3147, \quad S_y = 0.1860, \quad c_{v,y} = 0.022, \quad c_{s,y} = 0.318$$

Rešenje. Ako se parametri log-normalne raspodele ocenjuju metodom momenata, tada se koriste statistike originalnog niza X i odgovarajući izrazi iz tabele 7.7. Prvo se računa parametar b :

$$\hat{b} = \sqrt{\ln(c_{v,x}^2 + 1)} = \sqrt{\ln(0.192^2 + 1)} = 0.1905$$

a zatim i parametar a :

$$\hat{a} = \ln \bar{x} - \frac{1}{2} \hat{b}^2 = \ln 4155 - \frac{0.1905^2}{2} = 8.3139$$

Parametri log-normalne raspodele mogu se oceniti i metodom maksimalne verodostojnosti pomoću statistika logaritmovanog niza (tabela 7.7):

$$\hat{a} = \bar{y} = 8.3147, \quad \hat{b} = S_y = 0.1860$$

Rezultati pokazuju da za razmatrani niz dve metode daju slične ocene parametara log-normalne raspodele, što ne mora uvek da bude slučaj.

8 STATISTIČKA ANALIZA U HIDROLOGIJI

8.1 Hidrološki nizovi

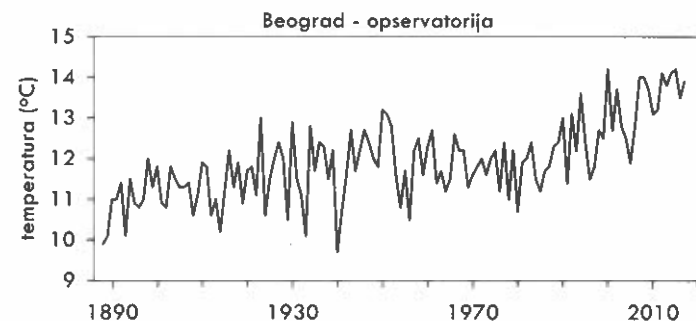
Hidrološki procesi su procesi koji se odvijaju kontinualno u vremenu, ali ih u praktičnim primenama diskretizujemo. Hidrološki nizovi se najčešće sastoje od podataka osmatranja u časovnim, dnevnim, nedeljnim, mesečnim i godišnjim vremenskim intervalima. Diskretizacija procesa u nekom vremenskom intervalu može da bude takva da se iz kontinualnog procesa uzme jedna vrednost iz razmatranog intervala (npr. vrednost na početku intervala, vrednost na sredini intervala ili najmanja/najveća vrednost u intervalu), ili da se za razmatrani interval nađe prosečna vrednost. Tako u prvom slučaju dobijamo nizove kao što su maksimalni godišnji ili minimalni mesečni protoci, a u drugom slučaju dobijamo nizove kao što su srednji mesečni ili srednji godišnji protoci.

8.1.1 Osobine nizova

Ukoliko realizacije hidrološke promenljive u nekom vremenskom intervalu zavise od realizacija u prethodnim intervalima, tada se radi o podacima koji su međusobno *zavisni*. Ova osobina hidroloških procesa naziva se *autokorelacija*. U suprotnom, podaci su *nezavisni*, tj. predstavljaju međusobno nezavisne događaje. Zavisnost podataka u nizovima protoka najčešće potiče od različite dinamike oticaja na različitim putevima vode usled istih meteoroloških događaja, odnosno zbog zadržavanja vode ispod površine tla u dužim vremenskim periodima. U nizovima protoka sa značajnim potpovršinskim i podzemnim oticajem autokorelacija će biti značajna. Nasuprot tome, nizovi mesečnih ili godišnjih suma padavina ili nizovi maksimalnih godišnjih protoka obično nisu zavisni.

Statistička analiza hidroloških nizova zasniva se na dve pretpostavke. Prva pretpostavka je da su podaci osmatranja izabrani slučajno i da su međusobno nezavisni. U tom slučaju oni se mogu analizirati bez razmatranja redosleda njihove pojave. Ukoliko su uzastopni podaci međusobno zavisni, tj. imaju izraženu autokorelaciju, onda se oni analiziraju kao *vremenske serije*, što podrazumeva složeniji statistički aparat iz teorije slučajnih procesa (videti npr. Mališić i Jevremović, 2008; Stojković, 2015).

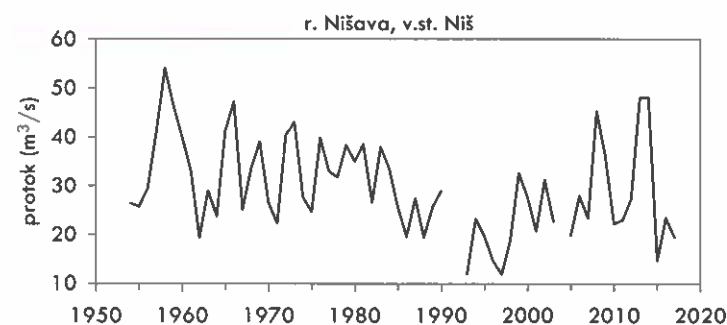
Druga pretpostavka za primenu osnovne statističke analize jeste *homogenost* niza, koja podrazumeva da svi podaci iz uzorka potiču iz iste populacije. To znači da



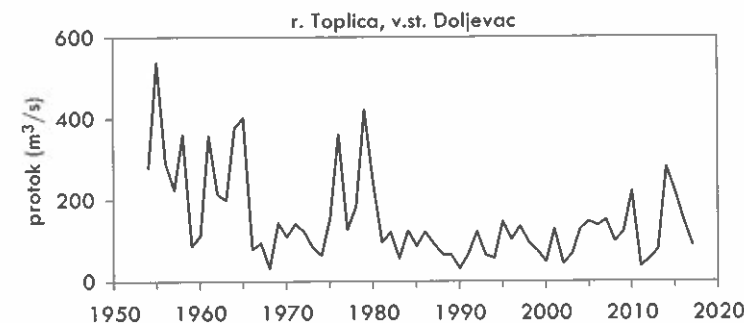
Slika 8.2. Primer vremenske serije sa trendom: srednje godišnje temperature u Beogradu (meteorološka opservatorija Vračar) u periodu 1888-2017.

svi podaci predstavljaju realizacije iste slučajne promenljive, a time i da imaju istu raspodelu verovatnoće. U hidrološkom kontekstu pod ovim se često podrazumeva da svi podaci predstavljaju protoke (ili druge hidrološke veličine) nastale istim prirodnim mehanizmima. Na primer, velike vode mogu nastati kao posledica kišnih epizoda, topljenja snega ili kombinacije ovih događaja. U opštem slučaju se može očekivati da događaji uzrokovani različitim procesima imaju različite raspodele verovatnoće. Ako se takva situacija utvrdi, podaci iz različitih populacija se razdvajaju i zasebno statistički analiziraju.

Do nehomogenosti u hidrološkim nizovima može doći i usled prirodnih ili veštačkih promena na slivu, kao što je urbanizacija, krčenje šuma, požari, izgradnja akumulacija, novi vodozahvati, promene klimatskih faktora itd. Ove promene utiču na količinu i dinamiku oticaja sa sliva, tako da se mogu odraziti i na homogenost osmotrenih nizova. Na hronološkom dijagramu nekog niza ove promene mogu biti postepene i ogledati se kroz *trend* u podacima (slika 8.2), mogu biti i nagle kada se ogledaju kroz *skokove* (odnosno promene u srednjim vrednostima, slika 8.1), ili mogu biti *promene u disperziji* (slika 8.4) zbog npr. eventualne izgradnje brane uzvodno od hidrološke stanice. Pored toga, hidrološki režim može imati *ciklične promene* u dugačkim ciklusima (slika 8.3) usled klimatskih varijacija. Ako se ne raspolaže dovoljno dugačkim nizom koji bi obuhvatio ceo jedan takav dugačak ciklus, rezultati statističke analize mogu biti



Slika 8.1. Primer vremenske serije sa skokovitom promenom: srednji godišnji protoci reke Nišave u Nišu u periodu 1951-2017. usled početka rada uzvodne akumulacije Zavojski.



Slika 8.4. Primer vremenske serije sa promenom disperzije: maksimalni godišnji protoci reke Toplice kod Doljevca u periodu 1954-2017.

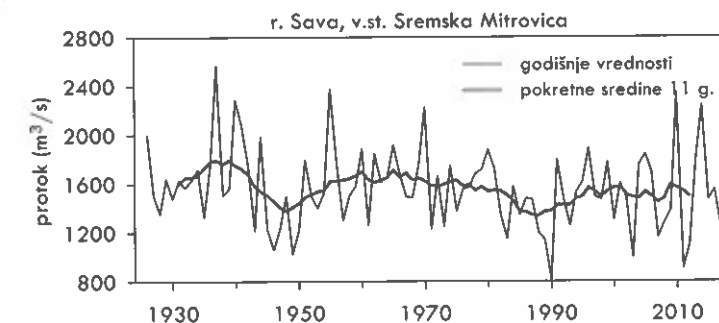
nereprezentativni za lokaciju od interesa. Takođe, ako se razmatra samo deo jednog celog ciklusa, podaci mogu lažno da ukazuju na postojanje trenda.

Nehomogenost u hidrološkim nizovima može biti i posledica sistematskih grešaka u merenjima ili zbog promene mernih mesta. Sa takvim nizovima treba postupati veoma oprezno i otkloniti sve greške koje je moguće otkloniti. U suprotnom, takve nizove ne treba koristiti u analizama jer rezultati ne bi bili validni.

Ispunjenost uslova nezavisnosti i homogenosti hidroloških nizova proverava se odgovarajućim statističkim testovima. Principi testiranja statističkih hipoteza su prikazani u odeljku 7.2.4, dok su neki od najčešće korišćenih testova prikazani u odeljku 8.1.4. Ako se testovima potvrde hipoteze homogenosti i slučajnosti, niz podataka kojim se raspolaže može se smatrati prostim slučajnim uzorkom (odeljak 7.2.1) i analizirati prema postupku prikazanom u poglavlju 8.2. ili 8.3.

8.1.2 Nizovi ekstremnih vrednosti

Pri formiranju nizova godišnjih ekstrema (maksimuma ili minimuma) pretpostavka o slučajnim i homogenim nizovima u praksi se obično ostvaruje. U nizove godišnjih ekstrema ulazi samo jedan događaj iz svake godine osmatranja. Postupak statističke analize nizova godišnjih ekstrema je prikazan u poglavlju 8.2. Mana ovakvog načina



Slika 8.3. Primer vremenske serije sa cikličnim promenama: srednji godišnji protoci na Savi kod Sremske Mitrovice u periodu 1926-2017.

formiranja niza je u tome što druga ili treća najveća vrednost u toku jedne godine mogu biti veće od maksimalne vrednosti iz neke druge godine, a ipak ne ulaze u niz.

Ovaj nedostatak se može prevazići formiranjem nizova prekoračenja preko praga ili pikova, u koje ulaze sve vrednosti iznad nekog praga ili bazne vrednosti (odnosno ispod bazne vrednosti za nizove minimuma). Bazna vrednost se obično bira tako da u niz uđe bar jedan podatak iz svake godine. Vrednosti koje čine niz prekoračenja moraju biti nezavisne; to znači da se ne mogu uzeti protoci iz dva uzastopna dana, jer pripadaju istom meteorološkom događaju. Niz prekoračenja se sastoji od različitog broja podataka za svaku godinu, zbog čega raspodela niza prekoračenja nije direktno uporediva sa raspodelom odgovarajućeg niza godišnjih ekstrema. Zato statistički aparat za određivanje funkcije raspodele godišnjih ekstrema u ovoj metodi obuhvata tri koraka: 1) određivanje raspodele broja pojava prekoračenja u godini dana, 2) određivanje raspodele samih prekoračenja, i 3) kombinacija prethodne dve raspodele u raspodelu godišnjih ekstrema. Ova metoda je ukratko opisana u poglavlju 8.3, dok se njen detaljniji opis može naći kod Vukmirovića (1988) i kod Plavšić (2005).

Poseban slučaj niza prekoračenja predstavlja niz godišnjih prekoračenja, a to je niz sa onoliko prekoračenja koliko ima godina osmatranja (drugim rečima, to je niz koji se dobija kada se iz uzorka od N godina izdvoji N najvećih događaja).

8.1.3 Obezbeđenost, verovatnoća prevazilaženja i povratni period

Cilj statističke analize hidroloških nizova jeste da se odredi raspodela verovatnoće razmatrane slučajne veličine, a na osnovu nje i verovatnoće određenih događaja. Raspodela verovatnoće slučajne promenljive se opisuje funkcijom raspodele, koja se definiše kao verovatnoća neprevazilaženja neke vrednosti x razmatrane slučajne promenljive X :

$$F(x) = P\{X \leq x\}$$

Interpretacija verovatnoće slučajnih događaja koji nas interesuju zavisi od razmatrane veličine i konteksta analize.

Ako se posmatra niz godišnjih maksimuma neke hidrološke veličine (pre svega protoka i padavina), od prevashodnog je interesa razmatranje verovatnoće pojave ekstremnih vrednosti koje bi mogle izazvati velike poplave i štete. Drugim rečima, interesuje nas verovatnoća događaja da godišnji maksimum X prevaziđe neku vrednost x^* , tj. $P\{X > x^*\}$, koja se računa kao:

$$P\{X > x^*\} = 1 - F(x^*)$$

U kontekstu velikih voda, ova verovatnoća je pokazatelj rizika od pojave kritičnog (nepovoljnog) događaja. Ona se naziva i verovatnoća godišnjeg prevazilaženja, jer se interpretira kao verovatnoća da najveći protok u jednoj godini bude veći od x^* . Nasuprot tome, verovatnoća neprevazilaženja vrednosti x^* :

$$P\{X \leq x^*\} = F(x^*)$$

predstavlja obezbeđenost od pojave velike vode x^* .

Vreme τ između dve uzastopne pojave događaja $X > x^*$ takođe predstavlja slučajnu promenljivu. Prosečno ili očekivano vreme između dva događaja $X > x^*$ je $T = E[\tau]$ i naziva se povratni period. Dakle, to je očekivano vreme između dva godišnja maksimuma većih od x^* , zbog čega se povratni period izražava u godinama. Može se pokazati da je verovatnoća godišnjeg prevazilaženja jednaka recipročnoj vrednosti povratnog perioda:

$$P\{X > x^*\} = \frac{1}{T}$$

Sledi da je povratni period velike vode x^* jednak recipročnoj vrednosti verovatnoće godišnjeg prevazilaženja:

$$T(x^*) = \frac{1}{P\{X > x^*\}} = \frac{1}{1 - F(x^*)} \quad (8.1)$$

Iz ove definicije može se zaključiti da povratni period samo predstavlja drugi način izražavanja verovatnoće kritičnog događaja. Na primer, povratni period od 10 godina predstavlja verovatnoću godišnjeg prevazilaženja od 0.1. Drugim rečima, godišnji maksimum veći od x^* javiće se u proseku jednom u 10 godina.

Ako se posmatra niz godišnjih minimuma, kritični događaj koji nas interesuje je pojava ekstremno malih vrednosti. Rizik od takvog kritičnog događaja se karakteriše verovatnoćom da godišnji minimum bude manji od neke vrednosti x^* , što je verovatnoća neprevazilaženja tj. funkcija raspodele:

$$P\{X < x^*\} = F(x^*)$$

U kontekstu minimuma, tj. malih voda, verovatnoća prevazilaženja vrednosti x^* predstavlja obezbeđenost da godišnji minimumi neće biti manji od x^* :

$$P\{X > x^*\} = 1 - F(x^*)$$

Povratni period malih voda se definiše kao prosečno vreme između događaja $X < x^*$, tj. između dva godišnja maksimuma sa vrednostima manjim od x^* , pa je:

$$P\{X < x^*\} = \frac{1}{T}$$

odnosno

$$T(x^*) = \frac{1}{P\{X < x^*\}} = \frac{1}{F(x^*)} \quad (8.2)$$

Na primer, povratnom periodu malih voda od 20 godina odgovara verovatnoća neprevazilaženja od 0.05, odnosno verovatnoća prevazilaženja (obezbeđenost) od 0.95. To znači da se očekuje da se vrednost manja od x^* javi u proseku jednom u 20 godina.

S obzirom da funkcija raspodele, koja je po svojoj prirodi verovatnoća, uzima vrednosti između 0 i 1 ($0 \leq F(x) \leq 1$), povratni period T i minimuma i maksimuma može imati vrednosti:

$$1 \leq T < \infty$$

To znači da za nizove godišnjih ekstrema ne postoji povratni period manji od 1 godine. S druge strane, zbog relativno kratkih nizova se smatra da rezultate statističke analize ne treba ekstrapolovati za povratne periode veće od $2n$, gde je n broj godina u raspoloživom nizu osmatranja (Vukmirović, 1988).

Treba napomenuti da se povratni period izražava u godinama ako slučajna promenljiva predstavlja godišnji ekstrem, odnosno, ako je izabrani interval diskretizacije podataka jednak godinu dana. Ukoliko bi se formirao niz međusobno nezavisnih podataka sa drugačijim vremenskim intervalom, tada bi se povratni period izražavao u vremenskoj jedinici koja odgovara tom intervalu, što u hidrologiji nije uobičajeno.

8.1.4 Testiranje homogenosti i slučajnosti nizova

U ovom odeljku će ukratko biti prikazani izabrani testovi homogenosti i slučajnosti koji se često koriste za hidrološke nizove.

Testovima homogenosti koji su ovde dati ispituje se pripadnost članova niza istoj populaciji tako što se ceo niz podeli na dva podniza. Ukoliko postoji sumnja da je od određenog trenutka nastala nagla promena u statističkim osobinama niza, kao podnizovi se uzimaju članovi niza pre i posle uočenog trenutka. Ukoliko se ne može uočiti trenutak nagle promene, a potrebno je testirati i postojanje sporih promena, niz se obično deli na dva podniza jednake dužine. Među testovima homogenosti prikazani su parametarski testovi kojima se porede srednje vrednosti i disperzije dva niza. Ako su razlike u statistikama niza značajne, odbacuje se hipoteza o homogenosti. Neparametarskim testovima homogenosti (Kolmogorov-Smirnov test i Men-Vitni test) ispituje se jednakost empirijskih raspodela dva podniza, a hipoteza o homogenosti se odbacuje ako dve raspodele nisu dovoljno slične.

Prikazana su dva testa slučajnosti niza, jedan parametarski (test kvadrata uzastopnih razlika) i njegova neparametarska varijanta (Bartelsov test). Test koraka je jedan od testova slučajnosti koji se često sreće u literaturi, ali ovde nije prikazan jer se smatra da ima veoma malu moć (Conover, 1999).

Na kraju su prikazana i dva testa za ispitivanje prisustva trenda u hidrološkim nizovima (neparametarski Men-Kendal test i test značajnosti nagiba linearnog trenda). Prisustvo trenda u nizu obara pretpostavke o homogenosti i slučajnosti niza. Analize trenda dobijaju na značaju zbog uticaja klimatskih promena na hidrološki režim, pa se ovi testovi često koriste. Međutim, treba imati u vidu da analize trenda mogu dati pogrešnu sliku o višegodišnjem kolebanju hidrološkog režima ako se ne raspolaze dovoljno dugim nizovima osmatranja.

Testiranje jednakosti dve srednje vrednosti sa poznatim disperzijama: z-test. Ovaj test homogenosti se koristi za velike uzorke. Pretpostavlja se da dva niza reprezentuju dve nezavisne slučajne promenljive koje potiču iz dve normalno raspoređene populacije, $X_1: N(\mu_1, \sigma_1^2)$ i $X_2: N(\mu_2, \sigma_2^2)$. Uzorak promenljive X_1 , dužine n_1 , ima uzoračku sredinu \bar{x}_1 i standardnu devijaciju S_1 , dok uzorak X_2 , dužine n_2 , ima uzoračku sredinu \bar{x}_2 i standardnu devijaciju S_2 . Nulta i alternativna hipoteza glase:

$$H_0: \mu_1 = \mu_2$$

$$H_a: \mu_1 \neq \mu_2$$

Dve uzoračke sredine kao statistike nezavisnih normalno raspoređenih promenljivih takođe su normalno raspoređene, pa je i njihova razlika statistika koja predstavlja normalno raspoređenu slučajnu promenljivu:

$$\bar{X}_1 - \bar{X}_2 : N(\mu_1 - \mu_2, \sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2)$$

Kontrolna statistika je standardizovana normalna promenljiva:

$$Z = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2}}$$

Promenljiva Z ima raspodelu $N(0,1)$. Pod uslovom da važi nulta hipoteza o jednakosti srednjih vrednosti populacija, biće $\mu_1 - \mu_2 = 0$. Tada za razmatrani niz kontrolna statistika dobija vrednost:

$$z = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{S_1^2/n_1 + S_2^2/n_2}}$$

Ovaj test je dvostrani test, jer vrednost z može biti i pozitivna i negativna. Za zadati prag značajnosti α , oblast prihvatanja hipoteze H_0 je:

$$z_{\alpha/2} < z < z_{1-\alpha/2}$$

Kritične vrednosti statistike z za različite pragove značajnosti α mogu se očitati u tablicama normalne raspodele u dodatku D.3.

Testiranje jednakosti dve srednje vrednosti sa nepoznatim ali jednakim disperzijama: t-test. Ovaj test je sličan z-testu, osim što se primenjuje za uzorke manjeg obima. Osnovne pretpostavke ovog testa su iste, a dodatna pretpostavka je da su nepoznate disperzije dva uzorka jednake, tako da ovu hipotezu treba proveriti pre sprovođenja testa (pomoću F-testa za disperzije, prikazanog kasnije). Ocena jedinstvene disperzije populacije σ^2 iz disperzija dva uzorka glasi:

$$S^2 = \frac{n_1 S_1^2 + n_2 S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

Razlika sredina dva uzorka $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$ kao slučajna promenljiva ima očekivanu vrednost $\mu_1 - \mu_2$ i disperziju $\sigma^2(1/n_1 + 1/n_2)$. U ovom testu kontrolna statistika glasi:

$$T = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{\sigma \sqrt{1/n_1 + 1/n_2}} \quad (8.3)$$

Ova statistika ima Studentovu t -raspodelu sa $v = n_1 + n_2 - 2$ stepeni slobode. Pod uslovom da važi nulta hipoteza o jednakosti srednjih vrednosti populacija (čija je razlika onda $\mu_1 - \mu_2 = 0$), za razmatrani niz kontrolna statistika dobija vrednost:

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{S \sqrt{1/n_1 + 1/n_2}} = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{1/n_1 + 1/n_2}} \cdot \sqrt{\frac{n_1 + n_2 - 2}{n_1 S_1^2 + n_2 S_2^2}}$$

I ovde se radi o dvostranom testu, pa je oblast prihvatanja hipoteze H_0 definisana sa:

$$t_{v,\alpha/2} < t < t_{v,1-\alpha/2}$$

Kritične vrednosti statistike t za različite pragove značajnosti α mogu se očitati u tablicama u dodatku D.8.

Testiranje jednakosti dve srednje vrednosti sa nepoznatim i različitim disperzijama: približni t-test. Ovaj test se još naziva i test Velča (Jevremović i Mališić, 2001). U situacijama kada je od interesa da se ispita jednakost dve srednje vrednosti, pri čemu ne bi bilo korektno da se pretpostavi jednakost varijansi dva uzorka, statistika (8.3) iz t -testa nema Studentovu t raspodelu. Ipak, za uzorke iz normalne raspodele smatra se da ta statistika ima približno Studentovu raspodelu sa brojem stepeni slobode:

$$v' = \frac{(S_1^2/n_1 + S_2^2/n_2)^2}{(S_1^2/n_1)^2/(n_1-1) + (S_2^2/n_2)^2/(n_2-1)}$$

U ovom slučaju proračun je isti kao u prethodnom testu, ali se oblast prihvatanja nulte hipoteze za izabrani prag značajnosti definiše na osnovu kritičnih vrednosti iz Studentove raspodele sa v' stepeni slobode:

$$t_{v',\alpha/2} < t < t_{v',1-\alpha/2}$$

Testiranje jednakosti disperzija dva uzorka: F-test. Nulta hipoteza ovog testa je da dve nezavisne normalno raspoređene slučajne promenljive imaju jednake disperzije. Nulta i alternativna hipoteza su:

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$$

$$H_a : \sigma_1^2 > \sigma_2^2$$

Ako su S_1 i S_2 uzoračke standardne devijacije dva niza, tako da je $S_1 > S_2$, posmatra se statistika:

$$F = \frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2}$$

Pod uslovom da važi nulta hipoteza o jednakosti disperzija, razmatrana statistika postaje:

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2}$$

gde se u brojiocu nalazi veća uzoračka disperzija, a u imeniocu manja. Ova statistika prati Fišerovu F -raspodelu sa $v_1 = n_1 - 1$ i $v_2 = n_2 - 1$ stepeni slobode. Test je jednostrani, pa je oblast prihvatanja nulte hipoteze:

$$F < F_{1-\alpha, v_1, v_2}$$

U tablicama u dodatku D.9 date su kritične vrednosti statistike F za različite pragove značajnosti α .

Kolmogorov-Smirnov test za dva uzorka. Nulta hipoteza ovog neparametarskog testa je jednakost raspodela dve slučajne promenljive X_1 i X_2 za koje se raspolaze uzorcima obima n_1 i n_2 . Osnovne pretpostavke su da su oba uzorka slučajna i da su međusobno nezavisni. Podaci iz uzoraka se poređaju u rastuće nizove, a zatim se odrede njihove empirijske raspodele tako što se sračunaju kumulativne relativne frekvencije $F_{e1}(x_i)$ i $F_{e2}(x_j)$. Na grafiku $x-F(x)$ posmatra se najveća razlika između ordinata kumulativnih relativnih frekvencija dva uzorka:

$$D_{\max} = \max_x |F_{e1}(x_i) - F_{e2}(x_j)|$$

Za zadati prag značajnosti α , oblast prihvatanja nulte hipoteze je:

$$D_{\max} < D_{kr}(\alpha, n)$$

gde je:

$$n = \frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}$$

Kritične vrednosti D_{kr} u zavisnosti od praga značajnosti α i vrednosti n date su u tablici u dodatku D.10.

Men-Vitni test (Mann i Whitney). Ovaj neparametarski test se u literaturi često sreće i kao test Wilcoxon ili test zbira rangova. Dva uzorka obima n_1 i n_2 se spajaju i uređuju u jedan rastući niz. Članovima objedinjenog niza se dodeljuje rang, pri čemu se označava pripadnost prvom, odnosno drugom uzorku. Sabiranjem rangova članova prvog uzorka dobija se zbir R_1 , a sabiranjem rangova drugog uzorka dobija se zbir R_2 . Zatim se računaju statistike:

$$U_1 = n_1 n_2 + \frac{n_1(n_1+1)}{2} - R_1$$

$$U_2 = n_1 n_2 + \frac{n_2(n_2+1)}{2} - R_2$$

Između ovih statistika postoji veza:

$$U_1 + U_2 = n_1 n_2$$

Bira se manja vrednost između U_1 i U_2 :

$$U = \min\{U_1, U_2\}$$

Za $n_1, n_2 > 8$, statistika U približno ima normalnu raspodelu sa srednjom vrednošću i disperzijom:

$$\mu_U = \frac{n_1 n_2}{2}, \quad \sigma_U^2 = \frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 + 1)}{12}$$

pa standardizovana vrednost

$$z = \frac{U - \mu_U}{\sigma_U}$$

prati standardnu normalnu raspodelu $N(0,1)$. Oblast prihvatanja nulte hipoteze za prag značajnosti α je:

$$z_{\alpha/2} < z < z_{1-\alpha/2}$$

Kritične vrednosti z za različite pragove značajnosti α mogu se očitati u tablicama normalne raspodele u dodatku D.3, dok za $n_1, n_2 \leq 8$ postoje tablice tačne raspodele statistike U .

Test kvadrata uzastopnih razlika. Nulta hipoteza ovog testa slučajnosti je da se uzorak sastoji od međusobno nezavisnih podataka osmatranja iz normalno raspoređene populacije. Disperzija populacije σ^2 ocenjuje se iz uzorka na dva načina. Prvi način predstavlja poznatu nepristrasnu ocenu:

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

gde je n obim uzorka. Druga ocena predstavlja srednju kvadratnu razliku uzastopnih članova neuređenog uzorka:

$$\delta^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)^2$$

Kontrolna statistika ovog testa je odnos ove dve ocene disperzije:

$$U = \frac{\delta^2}{2S^2}$$

Za uzorke obima $n > 25$ i pod pretpostavkom da važi nulta hipoteza, ova statistika ima približno normalnu raspodelu sa očekivanjem i disperzijom:

$$\mu_U = 1, \quad \sigma_U^2 = \frac{n-2}{n^2-1}$$

Odgovarajuća standardizovana normalna promenljiva tada je:

$$z = \frac{U - \mu_U}{\sigma_U} = \frac{U-1}{\sqrt{n-2}} \sqrt{n^2-1}$$

i ima standardizovanu normalnu raspodelu $N(0,1)$. Oblast prihvatanja nulte hipoteze za prag značajnosti α je tada:

$$z_{\alpha/2} < z < z_{1-\alpha/2}$$

Kritične vrednosti z za različite pragove značajnosti α mogu se očitati u tablicama normalne raspodele u dodatku D.3.

Bartelsov test slučajnosti. Ovaj test je neparametarska varijanta testa kvadrata uzastopnih razlika, u kojoj se vrednosti članova niza zamenjuju njihovim rangovima u originalnom nizu podataka (Bartels, 1982). Posmatra se statistika:

$$RVN = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} (R_{i+1} - R_i)^2}{\sum_{i=1}^{n-1} \left(R_{i+1} - \frac{n+1}{2} \right)^2}$$

Za uzorke obima $n > 10$ i pod pretpostavkom da važi nulta hipoteza, ova statistika ima približno normalnu raspodelu sa očekivanjem i disperzijom:

$$\mu_{RVN} = 2, \quad \sigma_{RVN}^2 = \frac{4(n-2)(5n^2-2n-9)}{5(n+1)(n^2-1)}$$

Odgovarajuća standardizovana normalna promenljiva tada je:

$$z = \frac{RVN - 2}{\sigma_{RVN}}$$

koja ima standardizovanu normalnu raspodelu $N(0,1)$. Oblast prihvatanja nulte hipoteze za prag značajnosti α je tada:

$$z_{\alpha/2} < z < z_{1-\alpha/2}$$

Kritične vrednosti z za različite pragove značajnosti α mogu se očitati u tablicama normalne raspodele u dodatku D.3.

Men-Kendal test (Mann i Kendall). Ovim neparametarskim testom se testira da li podaci imaju tendenciju monotonog porasta ili opadanja sa vremenom. Nulta hipoteza je da ne postoji korelacija između vremena t i vrednosti x , a alternativna je da podaci prate monotoni trend kroz vreme. U testu se koristi Men-Kendalova statistika S , koja se najlakše računa tako što se svi parovi podataka (t_i, x_i) uredi prema rastućem t . Ako postoji pozitivna korelacija, vrednosti x u takvom nizu će češće rasti nego što će opadati i obrnuto. Ako nema korelacije, x će rasti i opadati skoro podjednak broj puta. Zato se u ovom testu svako x poredi sa svim narednim vrednostima u nizu. Početna vrednost statistike S je nula; ako se poredi x_i i x_j ($i < j$) i ako je $x_i < x_j$, statistika S se povećava za 1, a ako je $x_i > x_j$, onda se S smanjuje za 1. Za uzorak obima n , formalno se može napisati da je Men-Kendalova statistika S jednaka:

$$S = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \text{sgn}(x_j - x_i)$$

gde je N obim uzorka, dok je:

$$\text{sgn}(x_j - x_i) = \begin{cases} 1, & x_j - x_i > 0 \\ 0, & x_j - x_i = 0 \\ -1, & x_j - x_i < 0 \end{cases}$$

Ukupan broj poređenja je $n(n-1)/2$. Nulta hipoteza da nema monotone promene odbaciće se kada je S značajno različito od nule, odnosno kada je razlika između „pluseva“ i „minuseva“ značajno različita od nule. Velika pozitivna vrednost S ukazuje na rastući trend, a negativna na opadajući.

Ako je uzorak umereno veliki ($n > 10$), Men-Kendalova statistika S se smatra približno normalno raspoređenom sa očekivanom vrednošću 0 i sa disperzijom:

$$\sigma_S^2 = \frac{1}{18} \left[n(n-1)(2n+5) - \sum_{k=1}^g u_k(u_k-1)(2u_k+5) \right]$$

gde drugi sabirak u zagradi predstavlja korekciju ukoliko u uređenom nizu postoje grupe istih vrednosti x , pri čemu u_k predstavlja broj istih vrednosti u k -toj grupi od ukupno g grupa. Kontrolna statistika je standardna normalna promenljiva:

$$Z = \begin{cases} (S-1)/\sigma_S, & S > 0 \\ 0, & S = 0 \\ (S+1)/\sigma_S, & S < 0 \end{cases}$$

Za zadati prag značajnosti α , oblast prihvatanja nulte hipoteze je:

$$z_{\alpha/2} < Z < z_{1-\alpha/2}$$

Kritične vrednosti z za različite pragove značajnosti α mogu se očitati u tablicama normalne raspodele u dodatku D.3.

Test značajnosti nagiba linearnog trenda. Ako se ispituje prisustvo linearnog trenda u nekom nizu podataka, onda se taj trend predstavlja kao linearna funkcija vremena $Y(u) = au + b$ (gde je sa u označeno vreme) i obično se ocenjuje regresionom analizom (poglavlje 8.4). Značajnost trenda se može ispitati testiranjem da li je ocenjeni koeficijent pravca \hat{a} u jednačini trenda značajno različit od nule. Ako se kao nulta hipoteza uzme da je $a = 0$, tada se odbacivanjem ove hipoteze može smatrati da je linearni trend statistički značajan. Pod pretpostavkom važenja nulte hipoteze, test statistika glasi:

$$t = \frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}$$

gde je r koeficijent korelacije između Y i u u prosto regresiji $Y(u) = au + b$ (videti odeljak 8.4.1). Statistika t ima Studentovu t raspodelu sa $n-2$ stepeni slobode, pa je oblast prihvatanja nulte hipoteze:

$$t_{n-2, \alpha/2} < t < t_{n-2, 1-\alpha/2}$$

Kritične vrednosti statistike t za različite pragove značajnosti α mogu se očitati u tablicama u dodatku D.8.

8.1.5 Izuzetne i neobične vrednosti

U svakodnevnoj praksi hidrološki nizovi sadrže i vrednosti koje su neočekivano male ili velike, koje se i vizuelno izdvajaju od ostatka niza u grafičkom prikazu. Takve vrednosti se nazivaju *izuzecima*. Izuzeci mogu da budu posledica grešaka u merenjima ili obradi podataka, pa je zato neophodna provera pre nego što se pristupi daljoj analizi. Ukoliko se ne radi o grešci, onda se može testirati da li izuzetne i neobične vrednosti predstavljaju izuzetak u statističkom smislu (tj. da li se značajno razlikuju od ostalih podataka u nizu). Ako se hipoteza o postojanju izuzetaka potvrdi, u daljoj analizi treba doneti odluku o tome šta uraditi sa izuzecima. Zato analiza izuzetaka sadrži dve faze: testiranje postojanja izuzetaka i postupanje sa izuzecima.

Testiranje postojanja izuzetaka. Jedan od najrasprostranjenijih testova za detekciju izuzetaka u nizovima je *test Grubsa i Beka* (Grubbs & Beck, 1972). Ovim testom se ispituje prisustvo i gornjih i donjih izuzetaka u nizu. Primenjuje se pod pretpostavkom da uzorak potiče iz populacije sa normalnom raspodelom, pa pre primene ovog testa treba proveriti pretpostavku o normalnosti (videti testove saglasnosti u odeljku 8.2.4). Kako hidrološki nizovi obično imaju pozitivnu asimetriju, oni se često transformišu primenom logaritamske transformacije, nakon čega se očekuje da ispunjavaju pretpostavku o normalnosti. Zato se u hidrološkoj praksi ovaj test obično primenjuje na logaritmovane podatke.

Ako su x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) podaci iz uzorka obima n uređeni u rastućem poretku, kontrolna statistika Grubs-Bek testa se definiše kao standardizovano odstupanje najmanje ili najveće vrednosti u uzorku x_1 tj. x_n :

$$K_d = \frac{\bar{x} - x_1}{S} \quad \text{ili} \quad K_g = \frac{x_n - \bar{x}}{S} \quad (8.4)$$

gde su \bar{x} i S uzoračka srednja vrednost i standardna devijacija. U gornjem izrazu K_d je statistika za donji izuzetak, a K_g za gornji izuzetak. Nulta hipoteza testa je da najmanji ili najveći podatak u nizu ne predstavlja izuzetak, a alternativna da to jeste izuzetak. Ovde se radi o jednostranom testu, pa je oblast prihvatanja nulte hipoteze:

$$K_d < K_{n, \alpha} \quad \text{ili} \quad K_g < K_{n, \alpha} \quad (8.5)$$

gde je $K_{n, \alpha}$ kritična vrednost statistike za izabrani prag značajnosti α i obim uzorka n . Kritične vrednosti $K_{n, \alpha}$ date su u dodatku D.11 za izabrano α i n , dok se približne vrednosti $K_{n, \alpha}$ za bilo koje α i n mogu dobiti kao funkcija vrednosti Studentove promenljive $t_{n-2, \alpha/n}$ za verovatnoću prevazilaženja α/n i broj stepeni slobode $n-2$ prema sledećoj formuli (NIST, 2012):

$$K_{n, \alpha} = \frac{n-1}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{t_{n-2, \alpha/n}^2}{n-2+t_{n-2, \alpha/n}^2}} \quad (8.6)$$

Važno je napomenuti da se prikazanim jednostranim Grubs-Bek testom može testirati samo jedan donji ili gornji izuzetak, a ne više njih odjednom. Dvostranim testom se može testirati istovremeno prisustvo po jednog donjeg i gornjeg izuzetka. U poznatom Biltenu 17B, tj. preporukama za proračun velikih voda u SAD (IACWD, 1982), su-

geriše se da su izuzeci u nekom nizu svi podaci koji se ne nađu unutar intervala $(\bar{x} - K_{n,\alpha} S, \bar{x} + K_{n,\alpha} S)$, što je pogrešno tumačenje Grubs-Bek testa. Novija verzija ovih preporuka (Bilten 17C; England Jr. i sar., 2018) je napustila taj pristup i fokusira se na detekciju grupe donjih izuzetaka specijalno razvijenim testom koji je implementiran u softverskom paketu HEC-SSP (USACE, 2016). Takođe, ako se Grubs-Bek test primeni više puta uzastopno (uklanjanjem npr. donjeg izuzetka pa ponovnim testiranjem), moć testa se smanjuje u ponovljenoj primeni.

Grubs je razvio i test za testiranje više izuzetaka odjednom kao grupu od k vrednosti na jednom kraju raspodele, sa nultom hipotezom da svi podaci u uzorku potiču iz iste normalne raspodele (Grubbs, 1950; Tietjen & Moore, 1972). Kontrolna statistika ovog testa (koji se naziva i Tidžen-Mur test) za testiranje k najmanjih vrednosti u uzorku glasi:

$$L_k = \frac{\sum_{i=k+1}^n (x_i - \bar{x}_k)^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad (8.7)$$

gde je

$$\bar{x}_k = \frac{1}{n-k} \sum_{i=k+1}^n x_i \quad (8.8)$$

Kada se ispituje k najvećih vrednosti, brojač sume u brojiocu u formuli (8.7) i u formuli (8.8) ide od $i = 1$ do $i = n - k$. Tablice sa kritičnim vrednostima za L_k za dužine uzorka do $n = 100$ i grupama do $k = 4$ dali su Verma & Quiroz-Ruiz (2006) i prikazane su u dodatku D.12. Za primenu ovog testa preporučuje se postupak unazad: na početku testa se pretpostavi velika vrednost k ; ako nulta hipoteza da grupa podataka nisu izuzeci nije odbačena, k se smanji za jedan i testiranje ponovi. Ako se broj izuzetaka k ne može naslutiti na osnovu vizuelne inspekcije, može se poći od broja podataka iznad ili ispod najveće razlike između susednih vrednosti u uređenom nizu.

Postupanje sa izuzecima. U analizi gornjih ekstrema (velikih voda, maksimalnih padavina i sl.) gornji i donji izuzeci imaju različit uticaj na raspodelu verovatnoće, pa i njihov tretman treba da bude drugačiji. Gornji izuzeci zaista mogu da budu retki i izuzetni događaji, ali mogu biti i rezultat greške u merenjima, neizvesnosti pri ekstrapolaciji krivih protoka i slično. Izuzetne vrednosti takođe mogu biti rezultat nekog antropogenog uticaja, a ne prirodnih procesa. To govori da se svaka vrednost u nizu mora pažljivo proveriti pre nego što se pristupi statističkoj analizi. S druge strane, ne očekuje se da su donji izuzeci rezultat mernih grešaka niti neizvesnosti u krivama protoka, ali oni značajno utiču na oblik raspodele verovatnoće. U slučaju analize donjih ekstrema, donji izuzeci zaista predstavljaju ekstreme, dok gornji izuzeci, iako ne predstavljaju ekstreme, mogu da znatno utiču na oblik raspodele.

Uklanjanjem izuzetaka iz uzorka dobija se zasečen uzorak. U analizi velikih voda taj postupak se generalno sprovodi na donjim izuzecima. Kada se k donjih izuzetaka uklone iz niza, sa preostalih $n - k$ podataka u zasečenom uzorku određuje se uslovna raspodela $F_1(x)$ koja važi za vrednosti x veće od odbačenih izuzetaka (tj. za $x > x_0$).

Raspodela maksimuma $F(x)$ tada se preračunava uzimajući u obzir uslovnu raspodelu F_1 i verovatnoću $p_0 = k/n$ da se godišnji maksimum nađe ispod praga x_0 :

$$\begin{aligned} F(x) &= P\{X \leq x\} = P\{X \leq x \mid X < x_0\}P\{X < x_0\} + P\{X \leq x \mid X > x_0\}P\{X > x_0\} = \\ &= 1 \cdot p_0 + F_1(x) \cdot (1 - p_0) = \frac{k}{n} + \frac{n-k}{n} F_1(x) \end{aligned}$$

Uklanjanje donjih izuzetaka iz niza godišnjih maksimuma protoka utiče na gornji kraj raspodele, pa ove analize treba sprovesti obazrivo. Log-normalna i log-Pirson III raspodela, koje se često koriste u statističkoj analizi velikih voda, osetljive su na izostavljanje donjih izuzetaka, dok se uopštena raspodela ekstremnih vrednosti pokazala kao najotpornija na prisustvo donjih izuzetaka (Plavšić i sar., 2016). Ako u nizu postoji veliki broj malih vrednosti koje po svojoj prirodi ne predstavljaju ekstreme, treba razmotriti primenu metode prekoračenja preko praga umesto analize godišnjih maksimuma.

Izbacivanje gornjeg izuzetka iz niza u analizi maksimuma ne smatra se dobrom opcijom osim u slučaju osnovane sumnje da se radi o gruboj mernoj grešci. Zadržavanje gornjih izuzetaka u nizu bez korigovanja je opšte prihvaćen pristup jer se smatra da oni nose značajne informacije o ekstremnim velikim vodama. Korekcija gornjeg izuzetka je bolji postupak nego njegovo izbacivanje iz uzorka ukoliko se proceni da treba smanjiti uticaj gornjeg izuzetka na raspodelu. Vukmirović i Pavlović (2000) su dali tri moguće korekcije za gornje izuzetke u analizi maksimuma: 1) zamena drugom najvećom vrednošću iz iste godine, 2) zamena drugom najvećom vrednošću u uzorku, ili 3) zamena regionalnom ocenom 50-godišnje ili 100-godišnje velike vode na osnovu podataka sa susednih stanica.

8.2 Statistička analiza hidroloških nizova

U ovom poglavlju se razmatra postupak statističke analize nizova nezavisnih i jednako raspoređenih podataka (tj. slučajnih i homogenih nizova) koji predstavljaju osmatranja (tj. uzorak) neke hidrološke promenljive. Ovo poglavlje se najvećim delom odnosi na analizu kontinualnih promenljivih i njihovih raspodela, dok je u poslednjem odeljku kratko prikazan i postupak za diskretne slučajne promenljive. Postupak se sastoji od sledećih koraka:

1. Proračun empirijske raspodele niza.
2. Ocena parametara teorijskih raspodela za razmatrani niz na osnovu statistika uzorka i proračun teorijskih raspodela.
3. Izbor teorijske raspodele koja se najbolje slaže sa empirijskom raspodelom niza; ovaj izbor se obično pravi na osnovu testova saglasnosti empirijske i teorijske raspodele, kao i vizuelnim poređenjem ovih raspodela na dijagramima verovatnoće.

8.2.1 Empirijska raspodela i kompromisne verovatnoće

Pod empirijskom raspodelom niza podrazumevaju se verovatnoće koje se dodeljuju podacima u nizu i koje su ocenjene na osnovu podataka iz uzorka. Empirijska ra-

spodela služi za poređenje sa teorijskim raspodelama kako bi se utvrdilo da li se izabrana teorijska raspodela dobro prilagođava podacima.

Raspodela neke slučajne promenljive X opisuje se funkcijom raspodele, koja po definiciji predstavlja verovatnoću događaja $\{X \leq x\}$:

$$F(x) = P\{X \leq x\}$$

Empirijska funkcija raspodele treba da bude ocena verovatnoće događaja $\{X \leq x\}$ iz uzorka, pa se može opisno definisati na sledeći način:

$$F_e(x) = \frac{\text{broj podataka} \leq x}{n} \quad (8.9)$$

Ako su x_1, x_2, \dots, x_n podaci uređeni po rastućem redosledu, formalna definicija empirijske funkcije raspodele je:

$$F_e(x) = \begin{cases} 0, & x < x_1 \\ \frac{k}{n}, & x_k \leq x < x_{k+1} \\ 1, & x \geq x_n \end{cases} \quad (8.10)$$

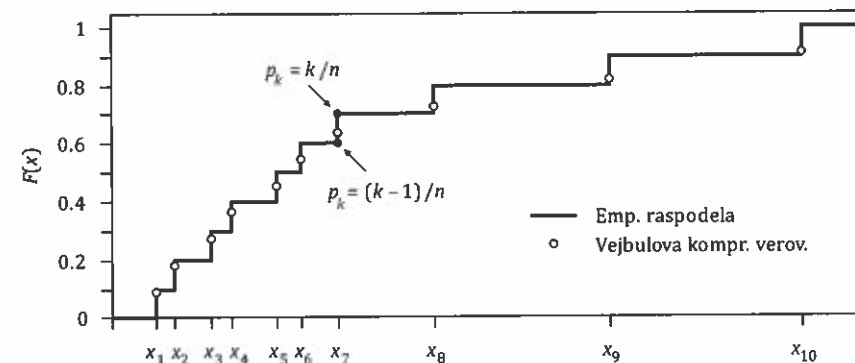
Empirijska funkcija raspodele je stepenasta funkcija koja ima skok od $1/n$ za svaki podatak iz uzorka, tj. za svako $x = x_k$ (slika 8.5). Ako u uzorku postoji vrednost koja se ponavlja m puta, skok empirijske funkcije raspodele za svaki podatak sa tom vrednošću biće m/n .

Međutim, sa gledišta hidroloških promenljivih, primena empirijske funkcije raspodele ima nedostatke. Na osnovu nje se dobija da je nemoguće da slučajna promenljiva bude manja od najmanjeg člana niza x_1 , tj. $P\{X < x_1\} = 0$. Takva tvrdnja nije realna jer najmanji osmotreni podatak ne mora da bude i donja fizička granica za razmatrane protoke ili padavine. Isto tako, prema empirijskoj funkciji raspodele važi i $P\{X \leq x_n\} = 1$, čime se tvrdi da je sigurno da X bude manje od najveće osmotrene vrednosti x_n , a da je nemoguće da X bude veće od x_n . I ova tvrdnja nije realna, jer najveća osmotrena vrednost ne mora biti i gornja fizička granica razmatrane veličine.

Umesto klasične definicije empirijske raspodele kao u izrazu (8.10), u hidrološkoj praksi se obično koriste korigovane formule kojima se izbegavaju navedeni problemi, a to je da ne postoji verovatnoća da se javi vrednosti manje od najmanjeg osmotrenog podatka ili veće od najvećeg osmotrenog podatka. Takve korigovane verovatnoće se nazivaju *kompromisne verovatnoće*. Kompromisne verovatnoće su usko povezane sa prikazom empirijske raspodele na dijagramima verovatnoće, o čemu se govori u odeljku 8.2.3. Najčešće korišćena formula kompromisne verovatnoće je *Vejbulova formula*:

$$p_k = \frac{k}{n+1} \quad (8.11)$$

koja daje ocenu verovatnoće neprevazilaženja x_k , tj. k -tog člana uređenog niza od n podataka. Niz Vejbulovih kompromisnih verovatnoća $1/(n+1), 2/(n+1), \dots, n/(n+1)$ predstavlja očekivane vrednosti n slučajno izabranih brojeva iz intervala između 0 i 1



Slika 8.5. Empirijska funkcija raspodele za niz od 10 članova i kompromisne verovatnoće prema Vejbulovoj formuli.

(tj. verovatnoća) koji se dodeljuju podacima u uređenom nizu x_1, x_2, \dots, x_n . Vejbulove kompromisne verovatnoće su takođe prikazane na slici 8.5 u odnosu na empirijsku funkciju raspodele (8.10).

U literaturi se može pronaći veliki broj formula kompromisne verovatnoće, razvijenih uglavnom da daju najbolje ocene verovatnoće k -tog člana uzorka uzetog iz određene teorijske raspodele. Jedna od prvih predloženih formula kompromisne verovatnoće je *formula Hejzena* (Hazen, 1914):

$$p_k = \frac{k-0.5}{n}$$

koja je kritikovana zbog toga što najvećoj vrednosti u nizu dodeljuje povratni period od $2n$ godina (Stedinger i sar., 1993). Uopštena formula za kompromisnu verovatnoću glasi:

$$p_k = \frac{k-a}{n+1-2a}$$

gde je a broj koji se menja za različite formule. Za Vejbulovu formulu je očigledno $a = 0$, a za Hejzenovu $a = 0.5$. Za nepristrasnu ocenu funkcije normalne i log-normalne raspodele koristi se $a = 0.375$ (Blomova formula), a Gumbelove $a = 0.44$ (Gringortenova formula). Bedient i sar. (2006) smatraju da je formula Kunana (Cunnane, 1978) sa vrednošću $a = 0.4$ dobar kompromis koji daje jednu formulu za obe raspodele. Širi spisak formula za kompromisnu verovatnoću može se naći kod Stedingera i sar. (1993).

Interesantno je uporediti verovatnoće prevazilaženja ili povratne periode najvećih članova nizova x_n prema različitim formulama kompromisne verovatnoće. Na primer, za niz od $n = 50$ godišnjih maksimuma, Vejbulova kompromisna verovatnoća daje $T(x_{50}) = 51$ godina, Blomova formula daje $T(x_{50}) = 89.5$ godina, a Hejzenova $T(x_{50}) = 100$ godina.

8.2.2 Proračun teorijskih funkcija raspodele

Uobičajeno je da se za jedan hidrološki niz isproba više različitih teorijskih raspodela kako bi se na kraju usvojila ona koja se najbolje prilagođava empirijskoj raspodeli. Teorijske raspodele koje se najčešće koriste u tu svrhu prikazane su u potpoglavlju 0. Da bi se one prilagodile konkretnom nizu podataka, njihovi parametri se ocenjuju na osnovu podataka iz uzorka. U odeljku 7.4 su prikazani principi i metode ocenjivanja parametara tako da se teorijska raspodela što bolje slaže sa empirijskim podacima. Sa ocenjenim parametrima može se pristupiti proračunu teorijskih raspodela.

Proračun teorijskih raspodela može se obavljati u dva smera: 1) proračun verovatnoće za zadanu vrednost slučajne promenljive, ili 2) proračun vrednosti slučajne promenljive zadate verovatnoće. Uobičajeno je da se prvi smer proračuna teorijskih raspodela koristi za proračun teorijskih funkcija raspodele $F_i(x_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$, za podatke iz niza osmatranja kako bi se omogućilo njihovo poređenje sa empirijskom funkcijom raspodele $F_e(x_i)$. Drugi smer proračuna se obično koristi da bi se došlo do vrednosti hidroloških veličina zadate verovatnoće pojave kao merodavnih veličina za hidrotehničko projektovanje.

Za proračune u oba smera dovoljno je poznavati funkciju raspodele $F(x)$ da bi se odredile verovatnoće različitih događaja vezanih za promenljivu X . Kao što je prikazano u odeljku 7.1.2, važe sledeće relacije:

$$\begin{aligned} P\{X \leq x\} &= F(x) \\ P\{X > x\} &= 1 - F(x) \\ P\{x_1 < X < x_2\} &= F(x_2) - F(x_1) \end{aligned} \quad (8.12)$$

Poznavanjem $F(x)$ može se odrediti i povratni period: (videti odeljak 8.1.3):

$$T(x) = \frac{1}{1 - F(x)} \quad \text{za maksimume, i} \quad (8.13)$$

$$T(x) = \frac{1}{F(x)} \quad \text{za minimume.} \quad (8.14)$$

Na primer, ako za godišnji maksimum protoka $x = 120 \text{ m}^3/\text{s}$ funkcija raspodele ima vrednost 0.97, verovatnoća prevazilaženja biće $1 - 0.97 = 0.03$, a povratni period $1/0.03 = 33.3$ godine. Za godišnji minimum protoka od $x = 2.5 \text{ m}^3/\text{s}$ za koji funkcija raspodele ili verovatnoća neprevazilaženja iznosi 0.08, verovatnoća prevazilaženja ili obezbeđenost iznosi $1 - 0.08 = 0.92$, a povratni period $1/0.08 = 12.5$ godina.

U drugom smeru proračuna određuju se *kvantili*, tj. vrednosti slučajne promenljive za zadanu verovatnoću. Ako se sa q obeleži neka vrednost funkcije raspodele, tada inverzna funkcija raspodele kao rezultat daje kvantil (videti i odeljak 7.1.4):

$$x_q = F^{-1}(q) \quad (8.15)$$

Kvantil se može odrediti i za zadanu verovatnoću prevazilaženja p :

$$x_p = F^{-1}(1 - p) \quad (8.16)$$

Slično tome, kvantil za zadati povratni period T određuje se kao:

$$x_T = F^{-1}(1 - 1/T) \quad \text{za maksimume, i} \quad (8.17)$$

$$x_T = F^{-1}(1/T) \quad \text{za minimume.} \quad (8.18)$$

Na primer, kvantil godišnjih maksimuma povratnog perioda 100 godina biće vrednost x sa verovatnoćom prevazilaženja $1/100 = 0.01$ i funkcije raspodele $1 - 0.01 = 0.99$. Drugim rečima:

$$x_{\max, T=100} = F^{-1}(1 - 1/100) = F^{-1}(1 - 0.01) = F^{-1}(0.99)$$

Na sličan način, kvantil godišnjeg minimuma povratnog perioda 20 godina biće vrednost x koja odgovara funkciji raspodele 0.05 i obezbeđenosti 0.95:

$$x_{\min, T=20} = F^{-1}(1/20) = F^{-1}(0.05) = F^{-1}(0.95)$$

Primer 8.1. Za niz maksimalnih godišnjih protoka Q_{\max} na reci Savi kod Sremske Mitrovice u periodu od 1926. do 2016. godine sprovesti proračun teorijskih raspodela za koje su određeni parametri u primerima 7.5 i 7.6 (Pirsonova III tipa, Gumbelova, Dženkinsonova i log-normalna). Za svaku raspodelu odrediti: (a) ocene kvantila povratnog perioda 20, 50 i 100 godina, i (b) verovatnoće prevazilaženja najvećeg opaženog protoka iz 2014. godine koji iznosi $6600 \text{ m}^3/\text{s}$.

Rešenje. (a) Kvantili raspodela. Prema izrazu (8.17), određivanje kvantila godišnjih maksimuma povratnog perioda 20, 50 i 100 godina znači određivanje kvantila za vrednosti funkcije raspodele 0.95, 0.98 i 0.99.

Kvantili *Pirson III raspodele* mogu se odrediti pomoću faktora frekvencije K_p definisanog izrazom (7.40):

$$K_p(F) = \frac{X(F) - \mu}{\sigma}$$

Ako se u gornjem izrazu srednja vrednost μ i standardna devijacija σ zamene odgovarajućim statistikama \bar{x} i S , onda se kvantil $x(F)$ može oceniti kao:

$$x(F) = \bar{x} + S \cdot K_p(F)$$

Vrednosti faktora frekvencije K_p su date u dodatku D.5 u zavisnosti od vrednosti funkcije raspodele F i koeficijenta asimetrije C_s . Za $F = 0.95$ i za koeficijent asimetrije razmatranog niza $c_s = 0.562$, faktor frekvencije se može odrediti interpolacijom između vrednosti za koeficijente asimetrije od 0.5 i 0.6:

$$K_p(F = 0.95, c_s = 0.7) = 1.819, \quad K_p(F = 0.95, c_s = 0.8) = 1.839$$

$$K_p(F = 0.95, c_s = 0.757) = 1.819 + (1.839 - 1.819) \cdot \frac{0.757 - 0.7}{0.8 - 0.7} = 1.830$$

Za zadati niz je $\bar{x} = 4155 \text{ m}^3/\text{s}$ i $S = 799 \text{ m}^3/\text{s}$. Vrednost kvantila za $F = 0.95$ tada je jednaka:

$$x_{0.95} = 4155 + 799 \cdot 1.830 = 5617 \text{ m}^3/\text{s}$$

Kvantili *Gumbelove raspodele* određuju se jednostavno jer postoji eksplicitan oblik inverzne funkcije raspodele (videti tabelu 7.5). Sa vrednostima parametara Gumbelove raspodele određenim u primeru 7.5 i za $F = 0.95$ sledi:

$$x_{0.95} = u - \alpha \ln(-\ln F) = 3796 - 623 \cdot 2.97 = 5646 \text{ m}^3/\text{s}$$

Kvantili *uopštene raspodele ekstremnih vrednosti* (skraćeno GEV) određuju se iz eksplicitnog oblika inverzne funkcije raspodele (tabela 7.5). Sa vrednostima parametara određenim u primeru 7.5 i za $F = 0.95$ dobija se:

$$x_{0.95} = u + \frac{\alpha}{k} [1 - (-\ln F)^k] = 3809 + \frac{679}{0.073} [1 - (-\ln 0.95)^{0.073}] = 5686 \text{ m}^3/\text{s}$$

Kvantili *log-normalne (LN) raspodele* određuju se korišćenjem veze između log-normalne promenljive X i standardizovane promenljive Z , prema izrazu (7.36):

$$Z = \frac{Y - \mu_Y}{\sigma_Y} = \frac{\ln X - a}{b}$$

U gornjem izrazu a i b su parametri log-normalne raspodele koji predstavljaju srednju vrednost μ_Y i standardnu devijaciju σ_Y slučajne promenljive $Y = \ln X$. Ako se μ_Y i σ_Y zamene odgovarajućim statistikama \bar{y} i S_y , onda se kvantil može oceniti kao:

$$x(F) = \exp[\bar{y} + S_y \cdot z(F)]$$

gde je $z(F)$ vrednost standardne normalne promenljive za vrednost funkcije raspodele F koja se može pročitati u tablicama u dodatku D.3. Za $F = 0.95$ iz tablica se čita vrednost $z_{0.95} = 1.645$. Na osnovu statistika logaritmovanog niza $Y = \ln X$ određenih u primeru 7.5 sledi:

$$y_{0.95} = \bar{y} + S_y \cdot z_{0.95} = 8.3147 + 0.1860 \cdot 1.645 = 8.6206$$

$$x_{0.95} = \exp(y_{0.95}) = \exp(8.6206) = 5545 \text{ m}^3/\text{s}$$

Na sličan način dobijaju se i kvantili za $F = 0.98$ i $F = 0.99$. Ove vrednosti prikazane su u tabeli 8.1.

(b) Verovatnoće prevazilaženja najvećeg opaženog protoka od 6600 m³/s. Za ovaj deo zadatka sprovodi se isti proračun kao i u prethodnom delu, ali u suprotnom smeru, jer za zadatak vrednost slučajne promenljive treba odrediti odgovarajuće verovatnoće. Da bi se odredila verovatnoća prevazilaženja p , određuje se najpre vrednost funkcije raspodele F kao verovatnoće neprevazilaženja, a potom i $p = 1 - F$.

Prema *Pirson III raspodeli*, verovatnoća se određuje pomoću faktora frekvencije. Za zadatak osmotrenu vrednost on iznosi:

$$K_p(F) = \frac{X(F) - \bar{x}}{S} = \frac{6600 - 4155}{799} = 3.062$$

Za ovu vrednost faktora frekvencije očitava se vrednost funkcije raspodele F iz tablica u dodatku D.5. Da bi se to uradilo za koeficijent asimetrije od $c_s = 0.757$, neophodno je da se pronađe odgovarajuća vrednost F za koeficijente asimetrije od 0.7 i 0.8, a potom da se do konačne ocene F dođe interpolacijom. Tako za $c_s = 0.7$ imamo:

$$K_p(F = 0.99, c_s = 0.7) = 2.824, \quad K_p(F = 0.995, c_s = 0.7) = 3.223$$

$$F(K_p = 3.062, c_s = 0.7) = 0.99 + (0.995 - 0.99) \cdot \frac{3.062 - 2.824}{3.223 - 2.824} = 0.9930$$

Na sličan način, za $c_s = 0.8$ se dobija:

$$K_p(F = 0.99, c_s = 0.8) = 2.891, \quad K_p(F = 0.995, c_s = 0.8) = 3.312$$

$$F(K_p = 3.062, c_s = 0.8) = 0.99 + (0.995 - 0.99) \cdot \frac{3.062 - 2.891}{3.312 - 2.891} = 0.9920$$

Konačno, za $c_s = 0.757$ imamo:

$$F(K_p = 3.062, c_s = 0.757) = 0.9930 + (0.9920 - 0.9930) \cdot \frac{0.757 - 0.7}{0.8 - 0.7} = 0.9924$$

Za *Gumbelovu raspodelu*, na osnovu izraza u tabeli 7.5 i već izračunatih vrednosti parametara, sledi:

$$F(6600) = \exp\{-\exp[-(x - u)/\alpha]\} = \exp\{-\exp[-(6600 - 3796)/623]\} = \exp\{-\exp(-4.502)\} = 0.9890$$

Verovatnoća prema *uopštenoj raspodeli ekstremnih vrednosti* (GEV) određuje se iz izraza za funkciju raspodele u tabeli 7.5 sa prethodno određenim vrednostima parametara:

$$F(6275) = \exp\{-[1 - k(x - u)/\alpha]^{1/k}\} = \exp\{-[1 - 0.073 \cdot (6600 - 3809)/679]^{1/0.073}\} = 0.9880$$

Za *log-normalnu (LN) raspodelu* najpre se računa standardizovana promenljiva Z za logaritmovanu vrednost protoka $Y = \ln X$, prema izrazu (7.36):

$$z = \frac{y - \bar{y}}{S_y} = \frac{\ln 6600 - 8.3147}{0.1860} = 2.582$$

Iz tablica standardne normalne raspodele u dodatku D.2 očitavaju se vrednosti F za $z = 2.58$ i $z = 2.59$, koje iznose 0.9951 i 0.9952. Kako je razlika između ove dve vrednosti veoma mala, interpolacija za traženo $z = 2.582$ nema svrhe, pa se može napisati:

$$F(2.582) = 0.9951$$

U tabeli 8.2 data je rekapitulacija verovatnoća prevazilaženja i povratnih perioda prema različitim teorijskim raspodelama.

Tabela 8.1. Pregled kvantila godišnjih maksimuma protoka na Savi kod Sremske Mitrovice u primeru 8.1 prema četiri teorijske raspodele.

Povratni period <i>T</i> (god)	Funkcija raspodele <i>F</i>	Kvantili (m ³ /s)			
		Pirson III	Gumbel	GEV	LN
20	0.95	5617	5646	5686	5545
50	0.98	6098	6226	6275	5983
100	0.99	6441	6661	6713	6294

Tabela 8.2. Pregled ocena verovatnoće pojave najvećeg izmerenog godišnjeg maksimuma protoka od 6600 m³/s na Savi kod Sremske Mitrovice u primeru 8.1 prema četiri teorijske raspodele.

Teorijska raspodela	Pirson III	Gumbel	GEV	LN
Funkcija raspodele <i>F(x)</i>	0.9924	0.9890	0.9880	0.9951
Verov. prevazilaženja <i>p(x) = 1 - F(x)</i>	0.0076	0.0110	0.0120	0.0049
Povratni period <i>T(x) = 1/p(x)</i>	132	91	84	204

8.2.3 Grafička predstava raspodela: dijagrami verovatnoće

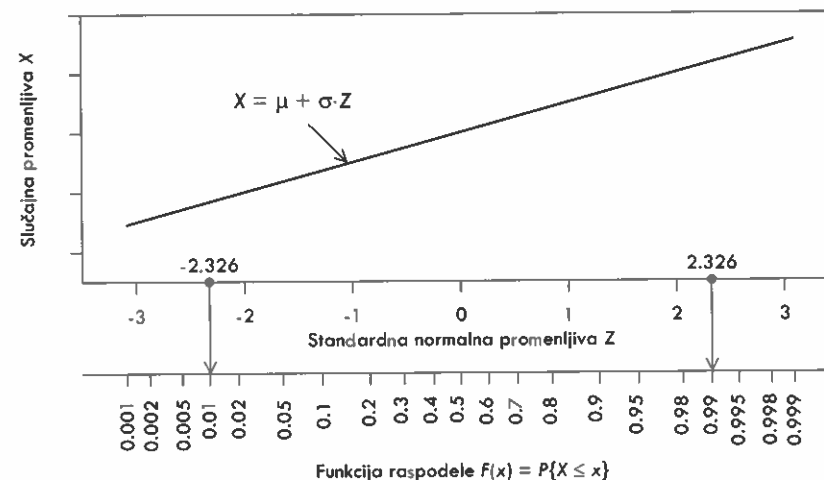
Vizuelna inspekcija slaganja empirijske i teorijske raspodele je veoma korisna da bi se ocenilo koliko se dobro teorijska raspodela slaže sa podacima, tj. sa empirijskom raspodelom, kao i da se izabere ona teorijska raspodela koja ima najbolje slaganje. Grafička predstava funkcija raspodela na dijagramima u linearnoj razmeri često nije pogodna za praktičnu primenu jer se verovatnoće ekstremnih vrednosti na takvim dijagramima teško očitavaju u oblastima gde funkcija raspodele teži nuli ili jedinici (videti npr. dijagram funkcije normalne raspodele na slici 7.13).

Ovaj problem se može prevazići konstrukcijom dijagrama verovatnoće (ili papira verovatnoće), koji predstavlja grafik neke funkcije raspodele sa osom za verovatnoću koja ima posebnu razmeru. Ta razmera se bira tako da se funkcija raspodele *F(x)* prikazuje kao prava linija. Linearizacija zavisnosti *x-F* znači da se na dijagramu verovatnoće vrednosti slučajne promenljive *X* crtaju u zavisnosti od neke veličine, recimo *u*, koja zavisi od *F*, ali tako da je *x-u(F)* linearna zavisnost. Opisana linearizacija se može postići za one teorijske raspodele u kojima je moguće uvesti smenu slučajne promenljive *X* u obliku standardizovane slučajne promenljive tako da njena funkcija raspodele ne zavisi od parametara. Takve raspodele imaju jedan ili dva parametra, pa se najčešće koriste dijagrami normalne, Gumbelove i eksponencijalne raspodele. Za troparametarske raspodele se ne može konstruisati univerzalan dijagram verovatnoće, već samo ako se fiksira vrednost parametra oblika te raspodele (tj. koeficijenta asimetrije).

Dijagram normalne raspodele je najčešće korišćen dijagram verovatnoće. Ulogu *u(F)* kod normalne raspodele ima standardna normalna promenljiva *Z* jer ispunjava oba pomenuta uslova. S jedne strane, *Z* je u linearnoj vezi sa slučajnom promenljivom *X* na poznat način (izraz 7.30):

$$X = \mu + \sigma Z$$

gde su μ i σ parametri normalne raspodele promenljive *X*. Sa druge strane, postoji jednoznačna veza između vrednosti *z* i funkcije raspodele $\Phi(z) = F$ (videti formule 7.32 i 7.33). Zavisnost *X-Z* je na dijagramu očigledno prava linija (slika 8.6). Ispod ose za vrednosti *z*, na slici 8.6 je prikazana i osa za odgovarajuće vrednosti funkcije raspodele

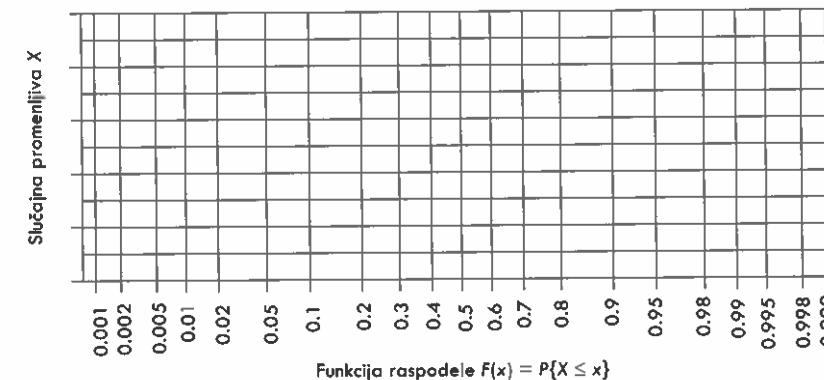


Slika 8.6. Konstrukcija dijagrama normalne verovatnoće i prava linija koja predstavlja teorijsku normalnu raspodelu.

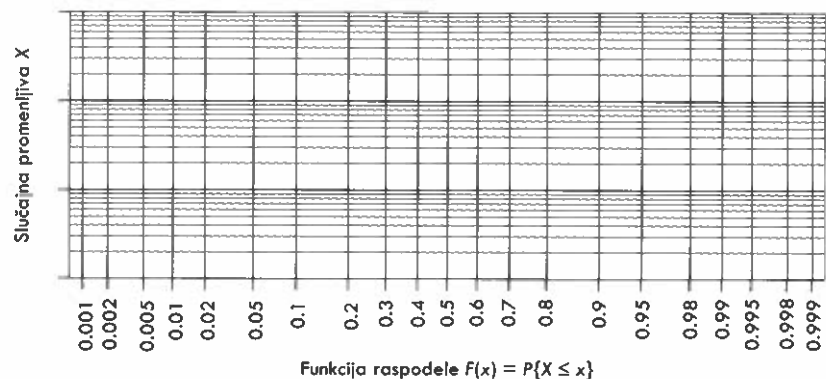
F. Vrednosti *F* nanose se na osnovu vrednosti *z*, kao što je na ovoj slici pokazano za *F* = 0.01 i *F* = 0.99; ove vrednosti nanose se na $z = \pm 2.326$ jer je $\Phi(-2.326) = 0.01$ i $\Phi(2.326) = 0.99$ (videti tablicu normalne raspodele u dodatku D.3). Treba primetiti da se linearna podela na osi za promenljivu *Z* pretvara u nelinearnu podelu na osi za funkciju raspodele *F*.

Prava linija na ovom dijagramu predstavlja normalnu raspodelu i prolazi kroz tačku $x = \mu$ za $z = 0$ odnosno za *F* = 0.5. Isto tako, ova linija prolazi i kroz tačke $x = \mu \pm \sigma$ za $z = \pm 1$ odnosno za *F* = 0.841 i *F* = 0.159. Na osnovu ovih karakterističnih tačaka, sa dijagrama se mogu grafički očitati srednja vrednost i standardna devijacija podataka.

Ako se sa dijagrama verovatnoće izostavi osa za standardizovanu slučajnu promenljivu *Z*, a nanese mreža linija za karakteristične vrednosti verovatnoće i slučajne promenljive, dijagram normalne verovatnoće izgleda kao na slici 8.7. Ovakvi „nemi“ dijagrami su ranije štampani u blokovima i prodavani u knjižarama kao i milimetarski ili logaritamski papir, pa otuda i naziv *papiri verovatnoće*.



Slika 8.7. Papir normalne verovatnoće u finalnom obliku.



Slika 8.8. Papir log-normalne verovatnoće.

Umesto funkcije raspodele F , na apscisu se mogu nanositi i verovatnoće $P\{X > x\}$ ili vrednosti povratnog perioda T , s obzirom da su sve ove veličine međusobno jednoznačno povezane.

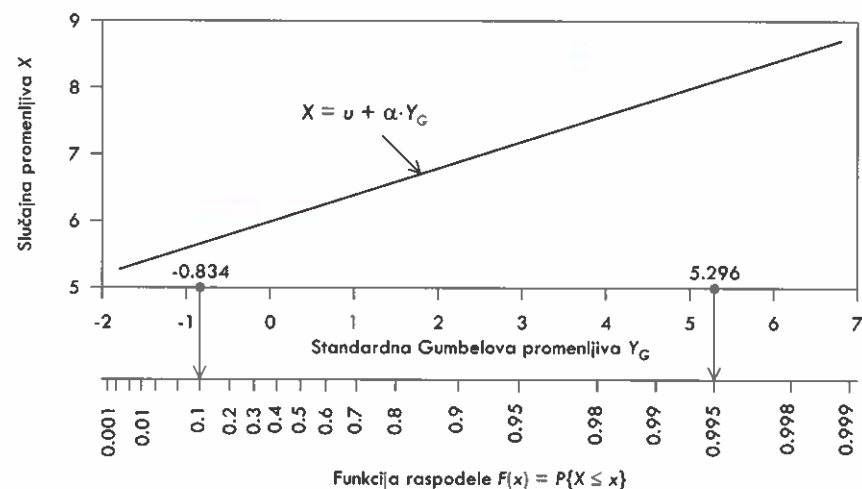
Dijagram log-normalne raspodele može se konstruisati isto kao i dijagram normalne raspodele sa osom za vrednosti slučajne promenljive X u logaritamskoj razmeri (slika 8.8). U tom slučaju log-normalna raspodela se prikazuje kao prava linija.

Dijagram Gumbelove raspodele se konstruiše na osnovu veze:

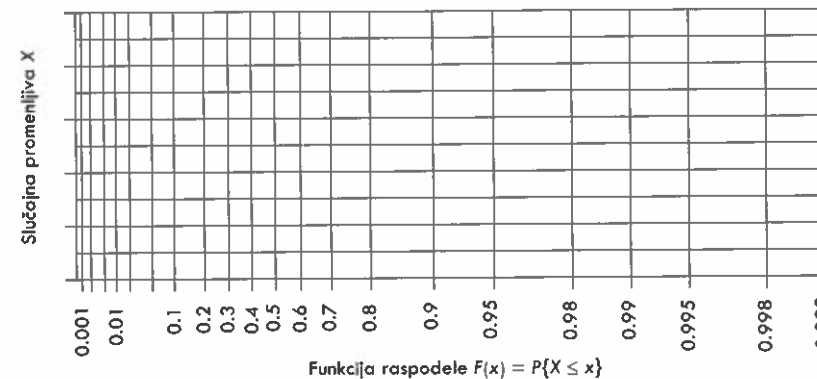
$$X = u + \alpha Y_G(F)$$

gde je Y_G standardizovana Gumbelova promenljiva, a u i α parametri Gumbelove raspodele za promenljivu X . Standardizovana Gumbelova promenljiva je u eksplicitnoj zavisnosti sa funkcijom raspodele (prema 7.45):

$$Y_G = -\ln(-\ln F)$$



Slika 8.9. Konstrukcija dijagrama Gumbelove verovatnoće i prava linija koja predstavlja teorijsku Gumbelovu raspodelu.



Slika 8.10. Papir Gumbelove verovatnoće u finalnom obliku.

Konstrukcija dijagrama Gumbelove raspodele prikazana je na slici 8.9, a finalni oblik papira Gumbelove verovatnoće prikazan je na slici 8.10. Može se uočiti da se on razlikuje od dijagrama normalne raspodele po tome što podela na apscisi nije simetrična oko vrednosti $F = 0.5$, već je razvučena za $F > 0.5$ i sabijena za $F < 0.5$. To je posledica pozitivne asimetrije Gumbelove raspodele. Zbog toga je dijagram Gumbelove raspodele pogodan za prikaz raspodela maksimuma.

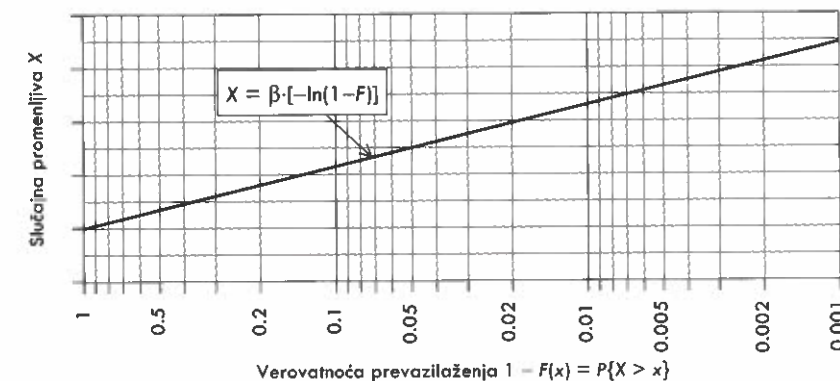
Dijagram eksponencijalne raspodele se jednostavno konstruiše. Iz izraza (7.48) sledi da je verovatnoća prevazilaženja prema ovoj raspodeli:

$$1 - F(x) = e^{-x/\beta}$$

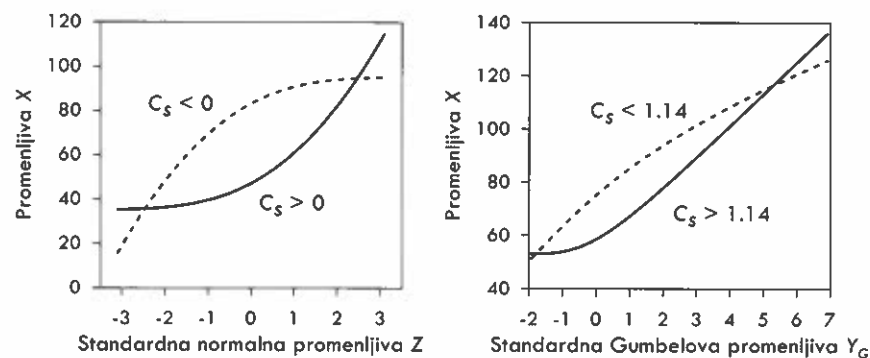
na osnovu čega se može formirati linearna veza između slučajne promenljive i logaritma verovatnoće prevazilaženja:

$$x = -\beta \ln(1 - F)$$

Dakle, crtanjem verovatnoće prevazilaženja u logaritamskoj podeli i vrednosti slučajne promenljive u aritmetičkoj podeli dobija se dijagram eksponencijalne raspodele, kao što je prikazano na slici 8.11.



Slika 8.11. Dijagram eksponencijalne raspodele – semilogaritamski dijagram sa logaritmom verovatnoće prevazilaženja na apscisi i slučajnom promenljivom na ordinati.

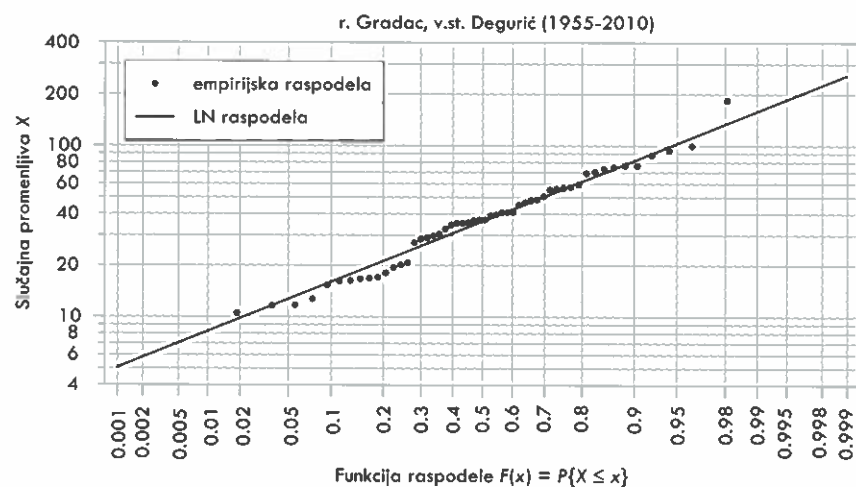


Slika 8.12. Uticaj asimetrije raspodele na njen oblik na papiru normalne verovatnoće (levo) i Gumbelove verovatnoće (desno).

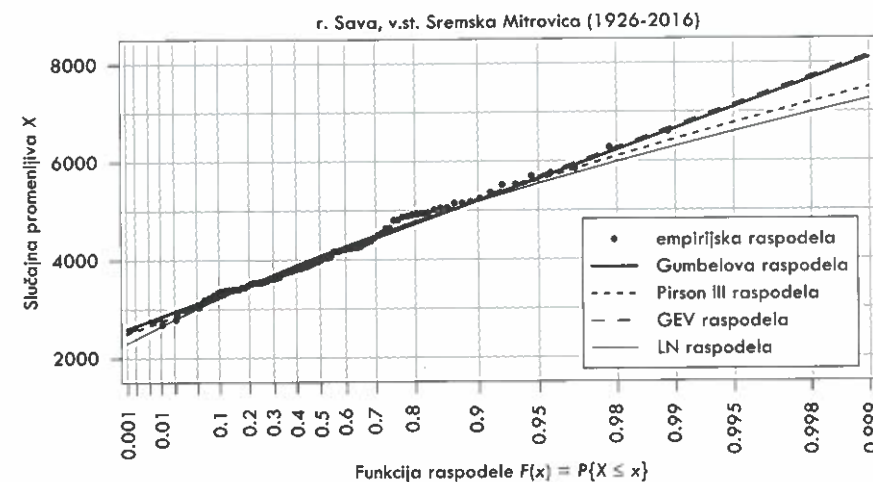
Za raspodelu Pirson III ne može se konstruisati dijagram verovatnoće, s obzirom da ova raspodela ima tri parametra i ne postoji standardizovana promenljiva koja je u linearnoj vezi sa originalnom slučajnom promenljivom. Ova raspodela se najčešće prikazuje na dijagramu normalne raspodele.

Na dijagramima normalne ili Gumbelove raspodele mogu se crtati i druge teorijske funkcije raspodele, ali se one tada neće prikazati kao prave linije. Zakrivljenost raspodele u odnosu na pravu liniju zavisi od asimetrije raspodele. Na papiru normalne verovatnoće raspodela sa pozitivnom asimetrijom ima konveksni oblik, a raspodela sa negativnom asimetrijom ima konkavni oblik (slika 8.12 levo). Slično tome, raspodele sa $C_s > 1.14$ na dijagramu Gumbelove raspodele imaju konveksni oblik, a konkavni oblik one sa $C_s < 1.14$ (slika 8.12 desno).

Empirijska raspodela nekog niza nanosi se na dijagrame verovatnoće uz pomoć parova vrednosti slučajne promenljive i odgovarajućih kompromisnih verovatnoća.



Slika 8.13. Primer niza koji se dobro prilagođava log-normalnoj raspodeli jer su empirijske tačke približno linearno postavljene na papiru log-normalne raspodele.



Slika 8.14. Empirijska i teorijske raspodele maksimalnih godišnjih protoka Save kod Sremske Mitrovice iz primera 8.1.

Ukoliko se tačke empirijske raspodele na dijagramu verovatnoće rasporede približno linearno, to je znak da se razmatrani niz može prilagoditi raspodelom čiji je to dijagram verovatnoće. Na slici 8.13 prikazana je empirijska raspodela maksimalnih godišnjih protoka na reci Gradac kod Degurića naneta na dijagram log-normalne raspodele. Sa slike se vidi da empirijska raspodela približno prati pravu liniju, pa se može zaključiti da se log-normalna raspodela dobro prilagođava empirijskoj raspodeli.

Ukoliko empirijske tačke zauzimaju konveksni (ili konkavni) oblik u odnosu na pravu liniju, to ukazuje da tom nizu više odgovara teorijska raspodela sa većom (ili manjom) asimetrijom u odnosu na raspodelu čiji je to papir. Na slici 8.14 prikazan je dijagram Gumbelove verovatnoće na koji su, pored empirijske raspodele, nanete sve teorijske raspodele maksimalnih godišnjih protoka na Savi kod Sremske Mitrovice koje su razmatrane u primeru 8.1.

8.2.4 Testiranje slaganja teorijske i empirijske funkcije raspodele

Nanošenjem empirijske raspodele osmotrenog niza na dijagram verovatnoće može se steći utisak o tome da li se neka teorijska raspodela dobro slaže sa empirijskom. Iako empirijske tačke mogu biti vizuelno dobro raspoređene oko krivih linija pojedinih teorijskih raspodela, potrebna je objektivna ocena slaganja. Kriterijum koji se obično postavlja odnosi se na prihvatljivo odstupanje teorijske od empirijske raspodele, koje se ispituje kroz odgovarajuće *testove saglasnosti* empirijske i teorijske raspodele. U odeljku 7.2.4 objašnjeni su osnovni pojmovi u vezi sa testiranjem statističkih hipoteza, dok se u nastavku prikazuje nekoliko testova saglasnosti koji se najčešće koriste u hidrološkoj praksi.

Pirsonov χ^2 -test. Nulta hipoteza ovog testa je da slučajna promenljiva X , za koju raspolažemo podacima u uzorku, ima neku teorijsku raspodelu sa r parametara. Test je primenljiv na diskretne i kontinualne slučajne promenljive. Kontrolna statistika je

formulisana tako da se porede empirijske i teorijske frekvencije podataka svrstanih u određeni broj klasa:

$$\chi^2 = \sum_{j=1}^K \frac{(f_j - f_{t,j})^2}{f_{t,j}} \quad (8.19)$$

gde je f_j empirijska frekvencija u klasi j , $f_{t,j}$ teorijska frekvencija u klasi j , a K ukupan broj klasa. Teorijska frekvencija za klasu j , sa donjom granicom x_j i gornjom granicom x_{j+1} , računa se na osnovu pretpostavljene teorijske raspodele kao:

$$f_{t,j} = np_j = n \cdot P\{x_j < X < x_{j+1}\}$$

Pri proračunu frekvencija u ovom testu treba voditi računa da se uzorak podeli na klase tako da sve klase imaju približno iste teorijske frekvencije. Na taj način klase reprezentuju istu verovatnoću, što je uslov nepristrasnosti ovog testa. Broj klasa K treba da bude veći od $r + 2$. Postoje i preporuke da broj klasa K treba da bude manji od $n/2$ za prag značajnosti $\alpha = 0.05$, odnosno manji od $n/4$ za prag značajnosti $\alpha = 0.01$ (Moore, 1986).

Ako razlike između teorijskih i empirijskih frekvencija nisu velike, vrednost statistike χ^2 će biti mala, i obrnuto. Pod pretpostavkom važenja nulte hipoteze, statistika χ^2 približno prati χ^2 -raspodelu sa $v = K - r - 1$ stepeni slobode (gde je K broj klasa, a r broj parametara teorijske raspodele koji se ocenjuju iz uzorka). Oblast prihvatanja nulte hipoteze je definisana kritičnom vrednošću statistike χ^2 za prag značajnosti α :

$$\chi^2 < \chi_{kr}^2(\alpha; v)$$

Tabela kritičnih vrednosti statistike χ^2 u zavisnosti od praga značajnosti α i broja stepeni slobode v data je u dodatku D.13.

Test Kolmogorov-Smirnova. Ovaj test je već opisan u odeljku 8.1.2 kao metoda kojom se testira jednakost empirijskih raspodela dva uzorka. Isti test može da se koristi i da bi se ispitala saglasnost empirijske i teorijske raspodele kontinualnih slučajnih promenljivih. Nulta hipoteza je da slučajna promenljiva X za koju imamo neki uzorak ima određenu teorijsku raspodelu. Kao mera slaganja, i u ovom testu se koristi statistika D_{\max} koja predstavlja maksimalno apsolutno odstupanje empirijske i teorijske raspodele:

$$D_{\max} = \max_x |F_e(x) - F_t(x)|$$

gde su $F_e(x)$ i $F_t(x)$ empirijska i teorijska funkcija raspodele. U praktičnim proračunima sa uzorcima u kojima su svi podaci različiti, statistika D_{\max} se može izračunati kao veća od dve pomoćne statistike D^+ i D^- :

$$D_{\max} = \max(D^+, D^-), \quad D^+ = \max_i \left\{ \frac{i}{n} - F_t(x_i) \right\}, \quad D^- = \max_i \left\{ F_t(x_i) - \frac{i-1}{n} \right\}$$

Statistika D^+ je najveće odstupanje dve raspodele kada je empirijska funkcija raspodele veća od teorijske, a D^- kada je obrnuto. Oblast prihvatanja nulte hipoteze o saglasnosti empirijske i teorijske raspodele tada je definisana sa:

$$D_{\max} < D_{kr}(\alpha, n)$$

Kritične vrednosti D_{kr} zavise od praga značajnosti α i od obima uzorka n , a date su u dodatku D.10.

Test Kramera i fon Mizesa (Cramer - von Mises). Ovaj test takođe poredi empirijsku i teorijsku raspodelu kontinualne slučajne promenljive kroz statistiku:

$$\omega^2 = \frac{1}{12n} + \sum_{i=1}^n \left[F_t(x_i) - \frac{i-0.5}{n} \right]^2 \quad (8.20)$$

gde su x_i članovi osmotrenog niza uređenog u rastućem redosledu ($i = 1, 2, \dots, n$). Za razliku od statistike D_{\max} u Kolmogorov-Smirnov testu kojom se meri najveće odstupanje dve raspodele, ova statistika je mera srednjeg kvadratnog odstupanja dve raspodele. Oblast prihvatanja nulte hipoteze da uzorak reprezentuje slučajnu promenljivu sa pretpostavljenom raspodelom $F(x)$ je data sa:

$$\omega^2 < \omega_{kr}^2(\alpha, n) \quad (8.21)$$

Kritične vrednosti statistike ω^2 zavise od praga značajnosti α i obima uzorka n , dok za modifikovanu statistiku $(\omega^2 - 0.4/n + 0.6/n^2)(1 + 1/n)$ kritične vrednosti zavise samo od praga značajnosti (Stephens, 1986). Tablica sa kritičnim vrednostima ω^2 data je u dodatku D.14.

Test PPCC (test koeficijenta korelacije dijagrama verovatnoće). Ovaj test saglasnosti nastao je kao formalizacija tehnike linearizacije raspodele na papiru verovatnoće (Filliben, 1975; Vogel, 1986), o čemu je bilo reči u odeljku 8.2.3. Test je razvijen za normalnu raspodelu, ali je kasnije proširen i za druge raspodele. Ako se na dijagramu normalne verovatnoće tačke rasporede približno linearno, tada se može smatrati da je normalna raspodela dobra aproksimacija za razmatrani niz. Jednostavnu meru linearne veze tada daje koeficijent korelacije između empirijskih vrednosti x_i (uređenih u rastući niz) i odgovarajućih vrednosti standardizovane normalne promenljive z_i :

$$r(x, z) = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})(z_i - \bar{z})}{\sqrt{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^N (z_i - \bar{z})^2}} \quad (8.22)$$

U gornjem izrazu standardizovana normalna promenljiva z_i ima vrednost koja odgovara kompromisnoj verovatnoći p_i i -te vrednosti u nizu uređenom po rastućem redosledu:

$$z_i = \Phi^{-1}(p_i)$$

gde je sa Φ^{-1} označena inverzna funkcija standardne normalne raspodele. Za kompromisnu verovatnoću p_i se uzima formula Filibena:

$$p_i = \frac{i - 0.3175}{n + 0.365}, \quad i = 2, 3, \dots \quad p_1 = 1 - 0.5^{1/n}, \quad p_n = 0.5^{1/n}$$

Što je vrednost $r(x, z)$ kao kontrolne statistike bliža jedinici, to je stepen linearne veze jači. Nulta hipoteza o saglasnosti normalne i empirijske raspodele se prihvata ako je vrednost od kritične vrednosti za izabrani prag značajnosti α i dužinu niza n :

$$r(x, z) > r_{kr}(\alpha; n)$$

Kritične vrednosti r_{kr} date su u dodatku D.15. Napominje se da prikazane kritične vrednosti za testiranje saglasnosti sa normalnom raspodelom važe samo uz Filibenovu kompromisnu verovatnoću.

U primeni ovog testa za saglasnost sa log-normalnom raspodelom, umesto podataka x_i u formulu (8.22) treba uneti njihove logaritme, $y_i = \log x_i$. Koeficijent korelacije $r(\log x, z)$ poredi se sa kritičnim vrednostima za normalnu raspodelu.

Za testiranje saglasnosti Gumbelove raspodele sa empirijskom, umesto standardne normalne promenljive z_i u formulu (8.22) se unosi standardna Gumbelova promenljiva (7.45):

$$y_{G,i} = G^{-1}(p_i) = -\ln(-\ln p_i)$$

gde G^{-1} označava inverznu funkciju standardne Gumbelove raspodele, dok se za kompromisnu verovatnoću uzima Gringortenova formula:

$$p_i = \frac{i - 0.44}{n + 0.12}, \quad i = 1, 2, \dots$$

Tako određen koeficijent korelacije $r(x, y_G)$ poredi se sa kritičnim vrednostima koje se odnose na Gumbelovu raspodelu (Vogel, 1986), a date su u dodatku D.16.

U literaturi se mogu naći i postupci za primenu testa PPCC na Pirson III raspodelu, log-Pirson III raspodelu, dvoparametarsku Vejbulovu raspodelu i na uopštenu raspodelu ekstremnih vrednosti (Vogel & Kroll, 1989; Chowdhury i sar., 1991; Vogel & McMartin, 1991).

8.2.5 Izbor teorijske raspodele

U hidrološkim analizama je uobičajeno da se za jedan osmotreni niz razmotri više teorijskih raspodela, a da se na kraju usvoji jedna koja se „najbolje“ slaže sa osmotrenim nizom. Kvalifikacija neke teorijske raspodele kao „najbolje“ nema striktnu definiciju. Izbor najbolje raspodele se najčešće zasniva na subjektivnoj oceni, pri čemu u tome ulogu ima nekoliko faktora koji se opisuju u nastavku.

Primenljivost teorijskih raspodela. Osobine osmotrenog niza (tj. njihove numeričke karakteristike) ukazuju na primenljivost pojedinih teorijskih raspodela. Jedna od najvažnijih osobina raspodele je njena asimetrija. Ako osmotreni niz pokazuje asimetriju, onda se iz razmatranja tipova teorijskih raspodela mogu isključiti simetrične raspodele. Hidrološki nizovi su po svojoj prirodi najčešće pozitivno asimetrični, pa se zato za njih koristi Gumbelova raspodela čiji koeficijent asimetrije iznosi 1.14, ili troparametarske raspodele koje se lako prilagođavaju uzoračkoj asimetriji kao što je Pirsonova III tipa, log-Pirsonova III tipa ili uopštena raspodela ekstremnih vrednosti. Takođe treba imati u vidu da se logaritmovanjem smanjuje asimetrija niza, pa primenljivost log-normalne ili log-Pirson III raspodele zavisi od koeficijenta asimetrije logarit-

movanog niza c_{sy} . Ako je c_{sy} blisko nuli, log-normalna raspodela može biti dobar model za podatke, a u suprotnom je na raspolaganju fleksibilna log-Pirson III raspodela. Za Pirsonovu raspodelu III tipa je takođe karakteristično da parametar lokacije c za pozitivnu asimetriju predstavlja donju granicu vrednosti slučajne promenljive, a za negativnu asimetriju predstavlja gornju granicu. Ako se ova raspodela koristi za nizove maksimuma, postojanje gornje granice nije poželjno jer je tada nemoguće proceniti vrednosti slučajne promenljive za veoma male verovatnoće prevazilaženja. Isti problem je moguć i kod nizova minimuma i postojanja donje granice. Raspodele kao što su Gumbelova i normalna nemaju ograničen domen vrednosti koje slučajna promenljiva može da uzme, ali se zbog toga na donjem kraju raspodele mogu dobiti i negativne vrednosti za slučajnu promenljivu, što u hidrologiji nije fizički moguće. Iz tog razloga je primena logaritamskih raspodela (log-normalne ili log-Pirson III) pogodnija, jer one ne mogu dati negativne kvantile.

U razmatranjima primenljivosti pojedinih raspodela od koristi mogu da budu i dijagrami zavisnosti momenata teorijskih raspodela (npr. odnos koeficijenta varijacije i koeficijenta asimetrije, ili odnos koeficijenta asimetrije i koeficijenta spljoštenosti). Na takvim dijagramima se onda mogu razlikovati oblasti primenljivosti pojedinih raspodela. Nanošenjem empirijskih momenata na takve dijagrame može se zaključiti koje su raspodele primenljive za razmatrani niz (Radić i Mihailović, 2010; Mihailović, 2011).

Testiranje saglasnosti raspodela. Drugi faktor u izboru raspodele su rezultati testiranja saglasnosti teorijskih raspodela sa empirijskom. Mora se naglasiti da se u primeni ovih testova u hidrološkoj praksi obično odstupa od osnovnih pretpostavki testova, čime se dovodi u pitanje validnost rezultata testova. Kritične vrednosti test statistika u testovima Kolmogorov-Smirnova i Kramera i fon Mizesa koje su prikazane u ovoj knjizi i koje se često koriste u praksi važe za slučajeve kada su parametri pretpostavljenih teorijskih raspodela poznati. Međutim, kada se parametri teorijskih raspodela ocenjuju iz uzorka, raspodele test statistika, a time i kritične vrednosti testa, su drugačije i zavise od tipa pretpostavljene teorijske raspodele. Iz teorije statistike je poznato da u takvim slučajevima moć testova značajno opada (D'Agostino & Stephens, 1986), a to znači da se lako može dogoditi da o saglasnosti neke teorijske raspodele sa empirijskom donesemo pogrešan zaključak. Takođe, nema jasnih preporuka u literaturi da li nekim testovima treba dati prednost jer imaju veću moć. Na primer, Conover (1999) smatra da test Kramer-fon Mizesa, iako uzima u obzir sve razlike između empirijske i teorijske raspodele, a ne samo najveću kao Kolmogorov-Smirnov test, ima sličnu moć kao i taj test. S druge strane, Stephens (1986) navodi da Kolmogorov-Smirnov test ima znatno manju moć od testova Kramer-fon Mizesa i Anderson-Darlinga (koji ovde nije prikazan).

Ipak, testovi saglasnosti su veoma korisni za izbor teorijske raspodele. Svaki test saglasnosti ima test statistiku koja je neka kvantitativna mera slaganja teorijske i empirijske raspodele. Poređenjem vrednosti test statistika za više teorijskih raspodela stiže se uvid u to koja se raspodela bolje slaže sa empirijskom. Pretpostavljene teorijske raspodele se mogu onda rangirati prema vrednostima test statistika, što olakšava izbor najbolje raspodele, ali naravno uz razmatranje i drugih faktora kao što je primenljivost pojedinih raspodela i vizuelno slaganje na dijagramima verovatnoće.

Dijagrami verovatnoće. Vizuelna provera slaganja empirijske i teorijske raspodele je veoma važna u donošenju odluke o najboljoj teorijskoj raspodeli. Svaka pretpostavljena teorijska raspodela je samo probabilistički model za osmotrene nizove bez fizičkog značenja i treba da posluži za procenu verovatnoća događaja sa vrednostima izvan raspona osmotrenih vrednosti. Drugim rečima, teorijskom raspodelom se može napraviti ekstrapolacija veze verovatnoće i vrednosti slučajne promenljive u domenu koji nismo osmotrili, a potrebni su nam za analizu i projektovanje objekata. Na dijagramima verovatnoće se lako može videti kako ta ekstrapolacija izgleda, pa se može sagledati i kako bi izbor teorijske raspodele uticao na računске vrednosti hidroloških veličina u zoni ekstrapolacije.

8.2.6 Intervali poverenja kvantila

Interval poverenja kvantila služi da se opiše (ne)preciznost ocene kvantila iz uzorka. Kada bi se isti kvantil X_T povratnog perioda T ocenjivao iz više uzoraka, tada bi se dobilo više različitih ocena u određenom rasponu vrednosti. Na primer, unutar intervala poverenja od 90% našlo bi se 90% ocena X_T iz različitih uzoraka. Za velike uzorke se smatra da ocene kvantila X_T imaju normalnu raspodelu. Rasipanje ocene X_T iz različitih uzoraka opisuje se njenom disperzijom $D[X_T]$, čiji se kvadratni koren naziva *standardna greška kvantila* i označava kao $SE[X_T]$.

Interval poverenja kvantila X_T se određuje tako što se računaju donja i gornja granica intervala poverenja $x_{T,d}$ i $x_{T,g}$:

$$x_{T,d} = x_T - z_{1-\alpha/2} SE[X_T], \quad x_{T,g} = x_T + z_{1-\alpha/2} SE[X_T] \quad (8.23)$$

gde je x_T ocena kvantila iz uzorka, $SE[X_T]$ standardna greška kvantila, a $z_{1-\alpha/2}$ standardizovana normalna promenljiva za prag značajnosti α koji odgovara *nivou poverenja* $\beta = 1 - \alpha$. Izraz (8.23) omogućava da se odredi približan interval poverenja za kvantile onih raspodela za koje u literaturi postoje pouzdane ocene njihovih standardnih grešaka $SE[X_T]$.

Normalna raspodela. Kvantil normalne raspodele se određuje kao:

$$x_T = \bar{x} + z_T \cdot S_x$$

gde su \bar{x} i S_x aritmetička sredina i standardna devijacija razmatranog niza, a z_T standardna normalna promenljiva za razmatranu verovatnoću, odnosno povratni period T ; $z_T = \Phi^{-1}(1-1/T)$. Može se pokazati da standardna greška kvantila za normalnu raspodelu približno iznosi:

$$SE[X_T] = \frac{S_x}{\sqrt{n}} \sqrt{1 + \frac{1}{2} z_T^2}$$

gde je n je dužina niza. Granice intervala poverenja za nivo poverenja $\beta = 1 - \alpha$ tada su date sa:

$$x_{T,d} = x_T - z_{1-\alpha/2} SE[X_T], \quad x_{T,g} = x_T + z_{1-\alpha/2} SE[X_T]$$

Log-normalna raspodela. Jednostavan približni postupak za određivanje standardne greške kvantila za log-normalnu raspodelu sastoji se od primene istog izraza kao i za normalnu raspodelu uz zamenu originalnog niza logaritmovanim nizom $Y = \ln X$. Ako je y_T logaritamski kvantil:

$$y_T = \ln x_T = \bar{y} + z_T \cdot S_y$$

gde su \bar{y} i S_y srednja vrednost i standardna devijacija logaritmovanog niza, tada je standardna greška logaritamskog kvantila:

$$SE[Y_T] = \frac{S_y}{\sqrt{n}} \sqrt{1 + \frac{1}{2} z_T^2} \quad (8.24)$$

Granice intervala poverenja za kvantile x_T su date sa:

$$x_{T,d} = \exp(y_T - z_{1-\alpha/2} SE[Y_T]), \quad x_{T,g} = \exp(y_T + z_{1-\alpha/2} SE[Y_T]) \quad (8.25)$$

Gumbelova raspodela. Kvantili Gumbelove raspodele ocenjuju se iz eksplicitnog izraza za inverznu funkciju Gumbelove raspodele:

$$x_T = u + \alpha_G \cdot y_G(T)$$

gde su α_G i u parametri Gumbelove raspodele (parametar razmere α Gumbelove raspodele ovde je označen sa α_G da bi se napravila razlika u odnosu na prag značajnosti), a y_G je standardizovana Gumbelova promenljiva:

$$y_G(T) = -\ln(-\ln F) = -\ln\left(\ln \frac{T}{T-1}\right)$$

Za Gumbelovu raspodelu standardna greška kvantila iznosi:

$$SE[X_T] = \frac{S_x}{\sqrt{n}} \sqrt{1 + 1.1396 K_G(T) + 1.1 K_G^2(T)}$$

gde je $K_G(T)$ faktor frekvencije Gumbelove raspodele:

$$K_G(T) = \frac{x_T - \bar{x}}{S_x} = \frac{u + \alpha_G y_G(T) - \bar{x}}{S_x}$$

gde su \bar{x} i S_x aritmetička sredina i standardna devijacija razmatranog niza. Ukoliko se parametri α_G i u Gumbelove raspodele odrede metodom momenata prema izrazima iz tabele 7.7, može se pokazati da faktor frekvencije Gumbelove raspodele postaje funkcija samo povratnog perioda:

$$K_G(T) = -0.78 \ln\left(\ln \frac{T}{T-1}\right) - 0.45$$

Pirson III raspodela. Uprošćeni postupak za određivanje standardne greške kvantila za Pirson III raspodelu koristi isti izraz kao za standardnu grešku kvantila

normalne raspodele uz zamenu standardizovane normalne promenljive z_T faktorom frekvencije K_P za Pirson III raspodelu:

$$SE[X_T] = \frac{S_x}{\sqrt{n}} \sqrt{1 + \frac{1}{2} K_P^2(T)} \quad (8.26)$$

Faktor frekvencije $K_P(T)$ definisan je izrazom (7.40) i može se odrediti ili iz tablica u dodatku D.5 ili pomoću približnog obrasca (7.41). Tačniji postupak (Kite, 1988) isto koristi faktor frekvencije, pri čemu je standardna greška kvantila:

$$SE[X_T] = \frac{S_x}{\sqrt{n}} \cdot \delta \quad (8.27)$$

gde je δ funkcija faktora frekvencije $K_P(T)$ i koeficijenta asimetrije niza c_s :

$$\delta^2 = 1 + c_s K_P + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{3}{4} c_s^2\right) K_P^2 + 6 \left(1 + \frac{1}{4} c_s^2\right) K_P \left[\frac{1}{2} c_s K_P + \left(1 + \frac{5}{4} c_s^2\right) K_P'\right] \quad (8.28)$$

Za faktor frekvencije K_P u gornjoj formuli koristi se obrazac (7.41), tj.:

$$K_P(T) = \frac{2}{c_s} \left[\left(1 + \frac{c_s}{6} z_T - \frac{c_s^2}{36}\right)^3 - 1 \right] \quad (8.29)$$

gde je $z_T = \Phi^{-1}(1-1/T)$ standardizovana normalna promenljiva za dati povratni period T , dok se izvod faktora frekvencije K_P dobija diferenciranjem gornjeg izraza:

$$K_P' = \frac{\partial K_P}{\partial c_s} \approx \frac{1}{6} (z_T^2 - 1)(1 - 3k^2) + \frac{1}{9} (z_T^3 - 6z_T)k + 4z_T k^3 - \frac{5}{18} k^4, \quad k = \frac{c_s}{6} \quad (8.30)$$

Log-Pirson III raspodela. Za log-Pirson III raspodelu mogu se koristiti isti postupci kao za Pirson III raspodelu, ali primenjeni na logaritamski kvantil $y_T = \ln x_T$. Tada su granice intervala poverenja date sa:

$$x_{T,d} = \exp(y_T - z_{1-\alpha/2} SE[Y_T]), \quad x_{T,g} = \exp(y_T + z_{1-\alpha/2} SE[Y_T])$$

Uopštena raspodela ekstremnih vrednosti. Ova raspodela se u praksi najčešće koristi tako što se za ocenu parametara koriste L-momenti, a ne obični momenti kao u tabeli 7.7. Intervali poverenja za ovu raspodelu sa parametrima ocenjenim metodom L-momenata mogu se naći u literaturi (Stedinger i sar., 1993).

Primer 8.2. Odrediti interval poverenja od 90% za kvantile povratnog perioda 100 godina određenih u primeru 8.1 primenom Pirson III i log-normalne raspodele za niz maksimalnih godišnjih protoka Q_{\max} na Savi kod Sremske Mitrovice u periodu od 1926. do 2016. godine. Osnovne statistike razmatranog niza i ocene parametara raspodele date su u primerima 7.5 i 7.6.

Rešenje. (1) Pirson III raspodela. Za maksimalni godišnji protok povratnog perioda 100 godina prema Pirson III raspodeli u primeru 8.1 dobijeno je $x_{100} = 6441 \text{ m}^3/\text{s}$, a odgovarajući faktor frekvencije iznosi

$$K_{P,100} = \frac{x_{100} - \bar{x}}{S} = \frac{6441 - 4155}{799} = 2.862$$

Izvod faktora frekvencije računa se prema izrazu (8.30), u kome figuriše koeficijent asimetrije $c_s = 0.757$, veličina $k = c_s/6 = 0.126$ i standardizovana normalna promenljiva z_T za dati povratni period T . Za $T = 100$ godina funkcija raspodele ima vrednost $F = 1 - 1/T = 0.99$, pa je odgovarajuća vrednost standardne normalne promenljive $z_{100} = \Phi^{-1}(0.99) = 2.326$ (videti tablice normalne raspodele u dodatku D.3). Sa ovim vrednostima, izvod faktora frekvencije je jednak:

$$K_P' = \frac{1}{6} (2.326^2 - 1)(1 - 3 \cdot 0.126^2) + \frac{1}{9} (2.326^3 - 6 \cdot 2.326) \cdot 0.126 + 4 \cdot 2.326 \cdot 0.126^3 - \frac{5}{18} \cdot 0.126^4 = 0.6996$$

Pomoćna veličina δ^2 iz izraza (8.28) tada dobija vrednost:

$$\delta^2 = 1 + 0.757 \cdot 2.862 + \frac{1}{2} (1 + \frac{3}{4} \cdot 0.757^2) \cdot 2.862^2 + 6 (1 + \frac{1}{4} \cdot 0.757^2) \cdot 0.6996 \cdot [\frac{1}{2} \cdot 0.757 \cdot 2.862 + (1 + \frac{5}{4} \cdot 0.757^2) \cdot 0.6996] = 19.985$$

Standardna greška kvantila je onda (formula 8.27):

$$SE[X_{100}] = \frac{S_x}{\sqrt{n}} \cdot \delta = \frac{799}{\sqrt{91}} \cdot \sqrt{19.985} = 83.7 \text{ m}^3/\text{s}$$

Širina intervala poverenja za nivo poverenja $\beta = 1 - \alpha = 0.9$ (tj. 90%) zavisi od standardne greške kvantila i od vrednosti standardne normalne promenljive za verovatnoću $1 - \alpha/2 = 0.95$, a koja iznosi $z_{0.95} = \Phi^{-1}(0.95) = 1.645$ (dodatak D.3). Donja i gornja granica intervala poverenja od 90% za 100-godišnji kvantil prema Pirson III raspodeli tada su jednake (izraz 8.23):

$$x_{100,d} = x_{100} - z_{0.95} SE[X_{100}] = 6441 - 1.645 \cdot 83.7 = 6303 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$x_{100,g} = x_{100} + z_{0.95} SE[X_{100}] = 6441 + 1.645 \cdot 83.7 = 6578 \text{ m}^3/\text{s}$$

(2) Log-normalna raspodela. Za maksimalni godišnji protok povratnog perioda 100 godina prema log-normalnoj raspodeli u primeru 8.1 dobijeno je $x_{100} = 6294 \text{ m}^3/\text{s}$. Odgovarajuća logaritmovana vrednost iznosi

$$y_{100} = \log 6294 = 3.79891$$

Standardna greška kvantila zavisi od standardizovane normalne promenljive z_T , koja za $T = 100$ godina iznosi $z_{100} = \Phi^{-1}(0.99) = 2.326$ (dodatak D.3). Standardna greška kvantila je tada (formula 8.24):

$$SE[Y_{100}] = \frac{S_y}{\sqrt{n}} \sqrt{1 + \frac{1}{2} z_T^2} = \frac{0.186}{\sqrt{91}} \cdot \sqrt{1 + \frac{2.326^2}{2}} = 0.03753$$

Širina intervala poverenja za nivo poverenja $\beta = 1 - \alpha = 0.9$ (tj. 90%) zavisi od standardne greške kvantila i od vrednosti standardne normalne promenljive za verovatnoću $1 - \alpha/2 = 0.95$, koja iznosi $z_{0.95} = \Phi^{-1}(0.95) = 1.645$ (dodatak D.3).

Donja i gornja granica intervala poverenja od 90% za 100-godišnji kvantil prema log-normalnoj raspodeli prvo se računaju za logaritmovane protoke (izraz 8.25):

$$y_{100,d} = y_{100} - z_{0.95} SE[Y_{100}] = 3.79891 - 1.645 \cdot 0.03753 = 3.73718$$

$$y_{100,g} = y_{100} + z_{0.95} SE[Y_{100}] = 3.79891 + 1.645 \cdot 0.03753 = 3.86064$$

odakle se za protoke dobija:

$$x_{100,d} = 10^{y_{100,d}} = 10^{3.73718} = 5460 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$x_{100,g} = 10^{y_{100,g}} = 10^{3.86064} = 7255 \text{ m}^3/\text{s}$$

8.2.7 Analiza diskretnih promenljivih

Analiza hidroloških veličina koje predstavljaju diskretne slučajne promenljive sastoji se od istih koraka koji su navedeni na početku ovog potpoglavlja, a to su: 1) formiranje empirijske raspodele, 2) ocena parametara i proračun teorijskih raspodela, i 3) izbor teorijske raspodele na osnovu testova saglasnosti empirijske i teorijske raspodele i njihovog vizuelnog poređenja.

Empirijska raspodela diskretne slučajne promenljive se sastoji od frekvencija vrednosti koje slučajna promenljiva može da uzme. Mogu se posmatrati apsolutne ili relativne frekvencije. Parametri binomne i Puasonove raspodele mogu se oceniti prema izrazima datim u tabeli 7.6, na osnovu čega se mogu odrediti teorijske verovatnoće vrednosti slučajne promenljive. Ove teorijske verovatnoće se mogu porediti sa empirijskim relativnim frekvencijama, ili se mogu izračunati teorijske apsolutne frekvencije (množenjem teorijske verovatnoće sa obimom uzorka) da bi se poredile sa empirijskim apsolutnim frekvencijama. Za testiranje saglasnosti empirijske i teorijske raspodele diskretne promenljive pogodan je Pirsonov χ^2 -test. Pored toga, za izbor diskretne raspodele korisno je izračunati indeks disperzije niza I_D koji ukazuje na tip raspodele (za Puasonovu raspodelu $I_D = 1$, a za binomnu $I_D < 1$).

Primer 8.3. Na profilu hidrološke stanice Bezdana na Dunavu u periodu 1931-2000. razmatrana je pojava talasa velikih voda većih od 3300 m³/s. Dobijene su empirijske frekvencije broja ovih događaja koje su date u drugoj koloni tabele 8.3. Izračunati teorijske frekvencije pojave talasa velikih voda prema Puasonovoj raspodeli.

Rešenje. Sabiranjem frekvencija u ukupno 8 klasa razmatrane diskretne slučajne promenljive (za $x = 0, 1, 2, \dots, 7$), može se videti da ukupan broj podataka iznosi:

$$n = \sum_{k=1}^8 f_k = 70$$

Ovaj broj odgovara broju godina osmatranja. Srednja vrednost diskretne slučajne promenljive X se može izračunati na sledeći način:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^8 x_k f_k = \frac{227}{70} = 3.243$$

Na sličan način se može izračunati i njena disperzija:

$$s_x^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \bar{x}^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^8 x_k^2 f_k - \bar{x}^2 = \frac{943}{70} - 3.243^2 = 2.955$$

Indeks disperzije onda iznosi:

$$I_D = \frac{s_x^2}{\bar{x}} = \frac{2.955}{3.243} = 0.925$$

Na osnovu ove vrednosti, koja je bliska 1, može se zaključiti da je primena Puasonove raspodele opravdana. Parametar λ Puasonove raspodele ocenjuje se kao srednja vrednost niza (videti tabelu 7.6):

$$\hat{\lambda} = \bar{x} = 3.243$$

Teorijske verovatnoće javljanja diskretnih vrednosti x za Puasonovu raspodelu računaju se prema formuli (7.29), to jest:

$$p(x) = P\{X = x\} = \frac{3.243^x e^{-3.243}}{x!}$$

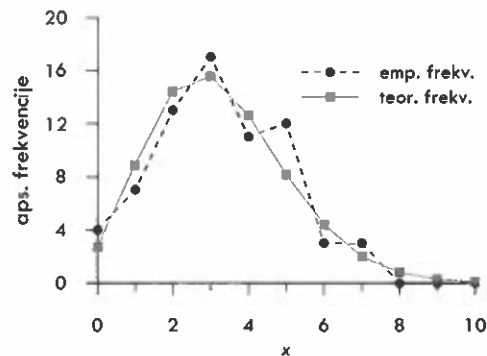
Izračunate verovatnoće su prikazane u trećoj koloni tabele 8.3, a u četvrtoj koloni su prikazane teorijske frekvencije koje su dobijene množenjem teorijske verovatnoće sa brojem podataka n :

$$f_t(x) = p_x \cdot n$$

Empirijske i teorijske frekvencije su prikazane i grafički na slici 8.15.

Tabela 8.3. Osmotrene frekvencije broja talasa velikih voda iznad 3300 m³/s na Dunavu kod Bezdana i teorijske frekvencije prema Puasonovoj raspodeli u primeru 8.3.

Diskretna sluč. promenljiva x	Empirijske frekvencije $f_e(x)$	Puasonova raspodela	
		Teor. verovatnoće $p(x)$	Teor. frekvencije $f_t(x)$
0	4	0.039	2.7
1	7	0.127	8.9
2	13	0.205	14.4
3	17	0.222	15.5
4	11	0.180	12.6
5	12	0.117	8.2
6	3	0.063	4.4
7	3	0.029	2.0
8	0	0.012	0.8
9	0	0.004	0.3
10	0	0.001	0.1



Slika 8.15. Osmotrene frekvencije broja talasa velikih voda iznad 3300 m³/s na Dunavu kod Bezdana i teorijske frekvencije prema Puasonovoj raspodeli u primeru 8.3.

8.3 Metoda prekoračenja preko ili ispod praga

Metoda prekoračenja preko ili ispod praga se koristi kao alternativa metodi godišnjih ekstrema, tj. statističkoj analizi nizova maksimalnih ili minimalnih protoka iz svake godine. Ova metoda uzima u obzir sve ekstremne vrednosti iznad ili ispod izabranog praga, zbog čega se smatra da koristi više informacija o ekstremima nego nizovi godišnjih vrednosti.

Statistička analiza nizova prekoračenja matematički je složenija u odnosu na analizu nizova godišnjih ekstrema jer se zasniva na teoriji slučajnih procesa. U slučaju gornjih ekstrema, takva analiza se često naziva i metoda pikova iznad praga (engl. *peaks over threshold method*), za koji je teorijske osnove postavio Todorović (1970, 1978).⁷ U slučajnom procesu velikih voda koji su definisali Todorović & Zelenhasić (1970) u jednoj godini se može javiti slučajan broj n prekoračenja

$$Z = Q - Q_0 \tag{8.31}$$

gde je Q_0 izabrani prag. Ovaj proces je ilustrovan na slici 8.16 gde se vidi da u svakoj godini može doći do slučajnog broja prekoračenja (pri čemu u nekoj godini može biti da nema nijednog prekoračenja), dok je sama visina prekoračenja Z takođe slučajna promenljiva.

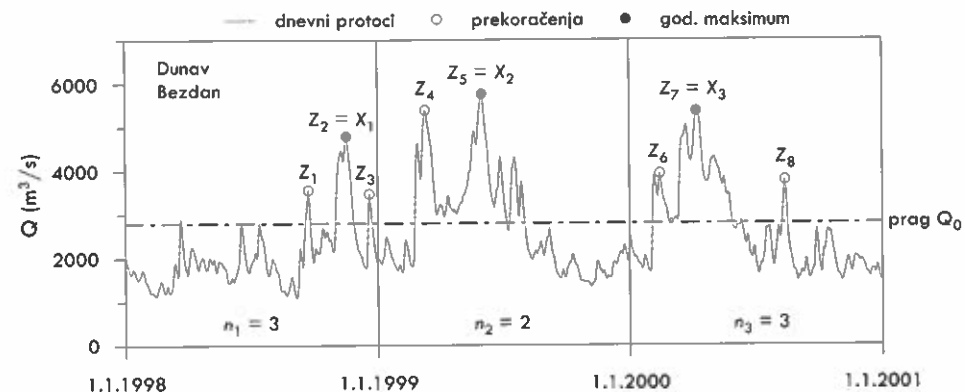
Broj prekoračenja n u godini je diskretna promenljiva koja se obično modelira Puasonovom raspodelom:

$$P\{n=k\} = \frac{\Lambda^k e^{-\Lambda}}{k!}, \quad k=0,1,2,\dots \tag{8.32}$$

gde je Λ parametar Puasonove raspodele koji se može oceniti kao prosečan broj prekoračenja u godini ($\Lambda = \bar{n}$). Pored Puasonove, mogu se primeniti i binomna i negativna binomna raspodela (Vukmirović i Petrović, 1996).

Visina prekoračenja Z je kontinualna slučajna promenljiva sa funkcijom raspodele $H(z)$:

⁷ U literaturi se za nizove prekoračenja preko praga može sresti i naziv „parcijalne serije“.



Slika 8.16. Protoci i prekoračenja preko praga kao slučajni proces.

$$H(z) = P\{Z \leq z\} = P\{Q - Q_0 \leq z | Q > Q_0\} \tag{8.33}$$

Za visinu pikova najčešće se koriste eksponencijalna, Weibulova i opšta Pareto raspodela (Plavšić, 2005). U poglavlju 0 mogu se naći izrazi za ocenu parametara eksponencijalne i Weibulove raspodele, a za opštu Pareto raspodelu u drugoj literaturi (npr. Rao & Hamed, 2000).

Godišnji maksimum protoka X je najveće prekoračenje od svih prekoračenja Z u jednoj godini:

$$X = \max\{Z_1, Z_2, \dots, Z_n\} \tag{8.34}$$

Todorović i Zelenhasić (1970) su pokazali da pod pretpostavkom da su prekoračenja nezavisna i jednako raspoređena, kao i da su prekoračenja nezavisna od trenutka njihove pojave, raspodela najvećeg prekoračenja glasi:

$$F(x) = P\{X \leq x\} = \sum_{k=0}^{\infty} P\{n=k\} \cdot [H(x - Q_0)]^k, \quad x > Q_0 \tag{8.35}$$

Ova raspodela je definisana samo za protoke veće od praga (tj. za $x > Q_0$), dok za protoke ispod praga nije definisana. Vrednost funkcije raspodele godišnjih maksimuma za $x = Q_0$ jednaka je verovatnoći da tokom godine nema nijednog prekoračenja preko praga Q_0 :

$$F(Q_0) = P\{X \leq Q_0\} = P\{n=0\} \tag{8.36}$$

Izraz (8.35) daje odgovor na isto pitanje kao i metoda godišnjih maksimuma, a to je pitanje kolike su verovatnoće pojave maksimalnog godišnjeg protoka. Ako je raspodela broja prekoračenja Puasonova, izraz (8.35) se svodi na:

$$F(x) = \exp\{-\Lambda[1 - H(x - Q_0)]\} \tag{8.37}$$

Računska velika voda se onda može proceniti kao kvantil ove raspodele:

$$x_T = Q_0 + H^{-1} \left(1 + \frac{\ln(1-1/T)}{\Lambda} \right) \quad (8.38)$$

Postupak analize metodom prekoračenja preko praga sastoji se od sledećih koraka:

1) Priprema podataka: iz raspoloživih nizova dnevnih protoka tokom N godina osmatranja izdvajaju se prekoračenja preko izabranog praga Q_0 . Pri tome se vodi računa da prekoračenja treba da budu međusobno nezavisna, pa se ne uzimaju dva maksimuma na bliskom vremenskom rastojanju već samo veći od ta dva. Obično se smatra da su dva maksimuma nezavisna ako su se protoci u međuvremenu smanjili za bar $2/3$ većeg od dva maksimuma (Lang i sar., 1999). Na kraju pripreme formiran je niz od ukupno M prekoračenja.

2) Formira se niz broja prekoračenja n u svakoj godini. Ovaj niz ima N podataka. Računa se Puasonova raspodela kao teorijska raspodela broja prekoračenja, a slaganje teorijskih i empirijskih frekvencija se može testirati χ^2 -testom.

3) Formira se niz visina prekoračenja Z preko praga Q_0 . Ovaj niz ima M podataka. Formira se i empirijska raspodela za Z , a na osnovu izračunatih statistika niza ocenjuju se parametri eksponencijalne i Vejbulove raspodele. Testira se slaganje empirijske i teorijske raspodele nekim testom saglasnosti i bira se raspodela koja se bolje prilagođava.

4) Formira se niz godišnjih maksimuma, koji ima N članova, i njegova empirijska raspodela. Sa definisanim raspodelama broja i visine prekoračenja, računa se raspodela godišnjih maksimuma prema izrazu (8.37) koja čini teorijsku raspodelu godišnjih maksimuma. Testiranjem saglasnosti empirijske i teorijske raspodele potvrđuje se validnost modela prekoračenja za razmatrani niz. Iz usvojene teorijske raspodele godišnjih maksimuma računaju se računске velike vode.

Analiza minimuma metodom prekoračenja je u potpunosti analogna analizi maksimuma, osim što se prekoračenje definiše kao:

$$Z = Q_0 - Q \quad (8.39)$$

Na taj način, najveća prekoračenja Z odgovaraju najmanjim protocima, a njihova raspodela je data sa:

$$H(z) = P\{Z \leq z\} = P\{Q_0 - Q \leq z \mid Q < Q_0\} \quad (8.40)$$

Uz pretpostavku o međusobnoj nezavisnosti članova i nezavisnosti članova niza prekoračenja od broja javljanja, funkcija raspodele godišnjih minimuma glasi (Vukmirović i Petrović, 1996):

$$F(x) = P\{X \leq x\} = 1 - \sum_{k=0}^{\infty} P\{n=k\} \cdot [H(Q_0 - x)]^k, \quad x > Q_0 \quad (8.41)$$

Pored protoka velikih i malih voda, metoda prekoračenja se može koristiti za analizu zapremine talasa velikih voda (Pavlović, 2013; Vukmirović i Vukmirović, 2017), za trajanje malovodnih perioda i deficit zapremine u malovodnim periodima (Zelenhasić & Salvai, 1987; Vukmirović i Petrović, 1996; Zelenhasić, 2002). Takođe,

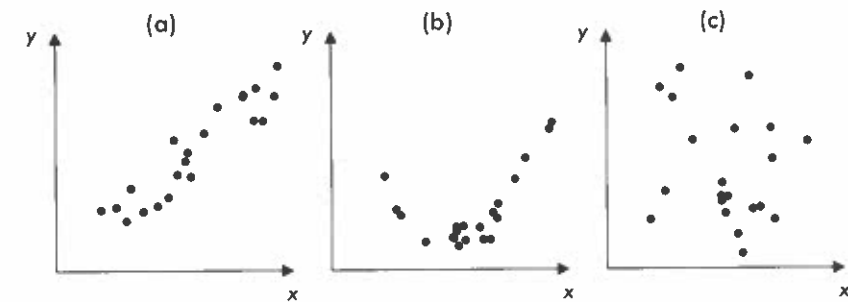
ona je korišćena i za kratkotrajne jake kiše (Vukmirović, 2010), a u složenijim primenama i za uslovne raspodele visina kiša u zavisnosti od broja uzastopnih kišnih dana (Despotović, 1996; Despotović i Plavšić, 2008). Metoda je primenjena i za meteorološke suše kao kombinacije trajanja beskišnog perioda i prosečne temperature tokom beskišnog perioda (Fabian & Zelenhasić, 2016; Gabrić i sar., 2017).

8.4 Korelacija i regresija

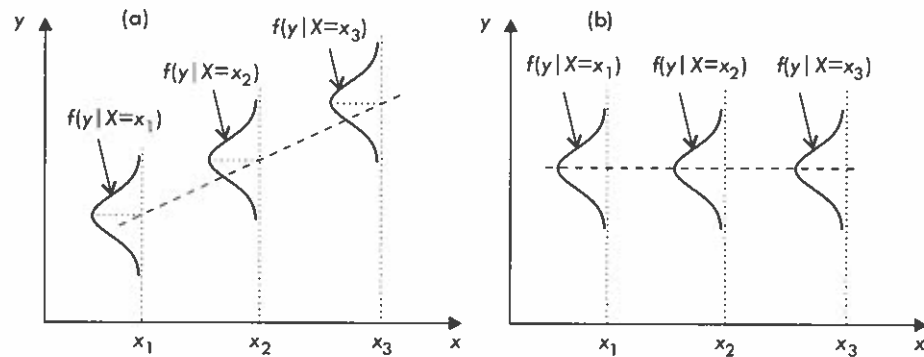
8.4.1 Osnovni pojmovi

Korelacija je veza između dve slučajne promenljive ili više njih. Korelaciona veza je slabija veza od funkcionalne veze. Na primer, površina kruga je funkcija prečnika kruga; takva funkcionalna veza ima deterministički karakter jer nema slučajnih uticaja. Međutim, ako bi prečnik kruga bio slučajna promenljiva (recimo zato što se meri uz određenu slučajnu mernu grešku), tada bi veza između površine i prečnika kruga imala i slučajnu komponentu i ne bi bila čista funkcionalna veza. Na slici 8.17 pod (a) i (b) prikazani su primeri linearne i nelinearne povezanosti dve slučajne promenljive, a pod (c) je prikazan slučaj gde nema korelacije između dve promenljive.

Korelacija između veličina koje imaju slučajni karakter se često koristi u hidrologiji i drugim naukama, naročito kada je teško formulirati fizičke zakonitosti između nekih veličina. Ako se realizacije dve slučajne promenljive ili više njih posmatraju istovremeno, onda se može govoriti i o njihovoj zajedničkoj višedimenzionalnoj raspodeli o kojoj je bilo reči u odeljku 7.1.3. Povezanost dve veličine praktično znači da je jedna promenljiva uslovljena drugom, pa je raspodela jedne promenljive uslovljena vrednošću koju druga promenljiva uzima. Ta raspodela se naziva uslovna raspodela i definisana je izrazom (7.17). Na slici 8.18 shematski je prikazan koncept uslovne raspodele na primeru dve promenljive, gde je u slučaju (a) uslovna raspodela promenljive Y različita za različite vrednosti x koje slučajna promenljiva X može da uzme, što ukazuje na zavisnost između dve promenljive. U slučaju (b) raspodela promenljive Y je ista za bilo koju vrednost promenljive X , što ukazuje na odsustvo korelacije, tj. na nezavisnost dve promenljive.



Slika 8.17. Korelaciona povezanost dve slučajne promenljive: (a) linearna zavisnost, (b) nelinearna zavisnost, (c) odsustvo korelacije i zavisnosti.



Slika 8.18. Uslovne raspodele zavise promjenljive Y za različite vrednosti nezavisne promjenljive X u slučaju kada između dve promjenljive (a) postoji zavisnost i (b) ne postoji zavisnost.

Mera linearne povezanosti dve promjenljive je Pirsonov koeficijent korelacije. On se definiše kao količnik kovarijanse dve promjenljive X i Y i proizvoda njihovih standardnih devijacija:

$$\rho = \frac{\text{cov}[X, Y]}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)]}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{E(XY) - \mu_X \mu_Y}{\sigma_X \sigma_Y}$$

Kovarijansa u brojiocu je dimenziona mera linearne povezanosti dve promjenljive jer opisuje jačinu te veze kroz proizvod istovremenog odstupanja dve promjenljive od njihovih srednjih vrednosti. Što su ova odstupanja dve promjenljive sličnija po veličini, kovarijansa će, kao očekivana vrednost njihovog proizvoda, biti veća. Vrednost koeficijenta korelacije $\rho = 0$ ukazuje na odsustvo linearne povezanosti jer je tada $E(XY) = \mu_X \mu_Y$. S druge strane, vrednost $\rho = \pm 1$ ukazuje na savršenu tj. funkcionalnu linearnu vezu dve promjenljive. Pozitivan koeficijent korelacije pokazuje da se radi o rastućoj linearnoj vezi, a negativan da se radi o opadajućoj linearnoj vezi. Povezanost više od dve promjenljive opisuje se korelacionom matricom, tj. matricom čiji su elementi koeficijenti korelacije između svake dve promjenljive.

U praktičnim proračunima sa podacima osmatranja koeficijent korelacije se ocenjuje na sledeći način:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}} \quad (8.42)$$

Koeficijent korelacije rangova je neparametarska mera monotone zavisnosti između dve promjenljive (u literaturi se naziva i Spirmanov koeficijent korelacije). Ovaj koeficijent takođe može da ima vrednosti između -1 i 1 i koristan je za ispitivanje jačine monotone nelinearne veze. Računa se kada se podaci x_i i y_i u formuli (8.42) zamene odgovarajućim rangovima R_{X_i} i R_{Y_i} , što se svodi na:

$$r_s = 1 - \frac{6 \sum_{i=1}^n (R_{X_i} - R_{Y_i})^2}{n(n^2 - 1)} \quad (8.43)$$

Regresiona analiza je postupak pronalaženja matematičkog modela ili regresije za zavisnost između dve ili više promjenljivih, odnosno određivanja koeficijenata u jednačinama modela za koji se pretpostavlja da važi između promjenljivih. U opštem slučaju, regresioni model glasi:

$$Y = Y_m(X) + \varepsilon$$

gde je Y zavisna promjenljiva, X je nezavisna promjenljiva, $Y_m(X)$ je neka funkcija koja opisuje zavisnost između X i Y , dok ε predstavlja slučajno odstupanje slučajne promjenljive Y od pretpostavljenog modela Y_m :

$$\varepsilon = Y - Y_m$$

Odstupanje ε se još naziva i slučajna greška ili rezidual. Najjednostavniji regresioni model je prosta linearna regresija, za koju je $Y_m = a + bX$. Koeficijenti a i b se zovu regresioni koeficijenti. Regresioni model može biti i nelinearan. Na primer, logaritamska regresija ima oblik $Y = a \ln X + b$, eksponencijalna regresija $Y = ae^{bX}$, stepena regresija $Y = aX^b$. U slučajevima kada se u nelinearnom modelu može napraviti odgovarajuća transformacija nezavisne promjenljive, nelinearna regresija se može svesti na linearnu. Na primer, logaritamska regresija se svodi na linearnu ako se stavi $X' = \ln X$, kod eksponencijalne ako se uvede smena $Y' = \ln Y$, a kod stepene ako se obe promjenljive logaritmuju. Regresija može biti i višestruka, tj. sa više nezavisnih promjenljivih; tada se može govoriti o višestrukoj linearnoj ili višestrukoj nelinearnoj regresiji. Model višestruke linearne regresije ima oblik:

$$Y = a + b_1 X_1 + b_2 X_2 + \dots + b_k X_k + \varepsilon$$

Za opisivanje zavisnosti neke veličine od više faktora, tj. nezavisnih veličina, često se koristi tzv. multiplikativni model:

$$Y = aX_1^{b_1} X_2^{b_2} \dots X_k^{b_k} + \varepsilon$$

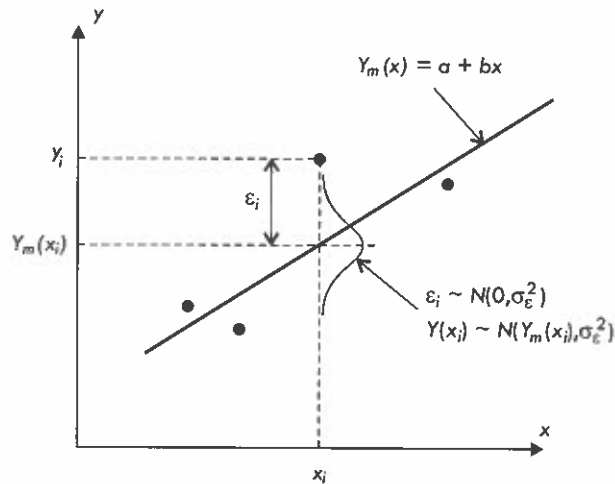
koji se logaritamskom transformacijom svodi na višestruku linearnu regresiju.

8.4.2 Prosta linearna regresija

Model proste linearne regresije sastoji se od dve komponente: linearne zavisnosti promjenljive Y od promjenljive X i slučajnog odstupanja ε :

$$Y = a + bX + \varepsilon \quad (8.44)$$

Za neki realizovani, tj. osmotreni par vrednosti (x_i, y_i) promjenljivih X i Y , deo $a + bx_i$ predstavlja modeliranu ili determinističku komponentu (slika 8.19). Razlika realizovane vrednosti y_i i modelirane komponente $a + bx_i$ je slučajno odstupanje ili rezidual:



Slika 8.19. Model proste linearne regresije i odstupanja eksperimentalnih tačaka.

$$\varepsilon_i = y_i - a - bx_i \quad (8.45)$$

Model proste linearne regresije je formulisan tako da odstupanje ε predstavlja slučajnu promenljivu koja ima normalnu raspodelu sa srednjom vrednošću 0 i disperzijom σ_ε^2 :

$$E[\varepsilon] = 0, \quad D[\varepsilon] = \sigma_\varepsilon^2$$

To znači da promenljiva Y za fiksiranu vrednost x ima očekivanje jednako vrednosti modela za $X = x$ i da odstupa od modela sa disperzijom σ_ε^2 :

$$\begin{aligned} E[Y | X = x] &= E[a + bx + \varepsilon] = a + bx + E[\varepsilon] = a + bx \\ D[Y | X = x] &= D[a + bx + \varepsilon] = D[\varepsilon] = \sigma_\varepsilon^2 \end{aligned} \quad (8.46)$$

Drugim rečima, regresiona prava je očekivano mesto svih eksperimentalnih tačaka, a odstupanja pojedinih eksperimentalnih tačaka od regresione prave imaju normalnu raspodelu sa standardnom devijacijom σ_ε .

Oцена regresionih koeficijenata. Nepoznati regresioni koeficijenti najčešće se određuju *metodom najmanjih kvadrata*. Suština ove metode je u tome da se minimizira suma kvadrata odstupanja SS_ε osmotrenih vrednosti promenljive Y od modela:

$$SS_\varepsilon = \sum_{i=1}^N \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^N [Y_i - a - bx_i]^2 \rightarrow \min \quad (8.47)$$

Diferenciranjem po nepoznatim regresionim koeficijentima a i b dobija se sistem jednačina:

$$\frac{\partial SS_\varepsilon}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial SS_\varepsilon}{\partial b} = 0$$

Rešavanjem ovog sistema jednačina dolazi se do ocenjenih vrednosti regresionih koeficijenata koji će dati najmanju sumu kvadrata grešaka. U slučaju proste linearne regresije može se pokazati da metoda najmanjih kvadrata daje sledeće ocene regresionih koeficijenata:

$$\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}, \quad \hat{b} = r \frac{S_y}{S_x} \quad (8.48)$$

gde je r ocena koeficijenta korelacije dobijena iz uzorka prema formuli (8.42), dok su \bar{x}, \bar{y}, S_x i S_y uzoračke sredine i standardne devijacije promenljivih X i Y . Sa \hat{a} i \hat{b} su označene ocene koeficijenata iz uzorka, dok su a i b parametri koji važe za populaciju.

Ocene regresionih koeficijenata \hat{a} i \hat{b} , kao i sve druge ocene parametara, predstavljaju statistike uzorka i kao takve su slučajne promenljive. Očekivanja ove dve statistike su:

$$E[\hat{a}] = a, \quad E[\hat{b}] = b$$

što znači da su ocene \hat{a} i \hat{b} nepristrasne ocene parametara populacije a i b . Disperzije ovih ocena su:

$$D[\hat{a}] = \sigma_\varepsilon^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{SS_X} \right), \quad D[\hat{b}] = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{SS_X} \quad (8.49)$$

gde je:

$$SS_X = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

Kvadratni koroni disperzija ocena regresionih koeficijenata se nazivaju standardnim greškama regresionih koeficijenata. Poznavanje osobina regresionih koeficijenata omogućava da se konstruišu intervali poverenja za ocene regresionih koeficijenata, kao i da se testira značajnost tih ocena. Na primer, da bi se testiralo da li je koeficijent pravca b jednak nekom broju, npr. b_0 , postavljaju se hipoteze:

$$H_0: b = b_0, \quad H_a: b \neq b_0 \quad (8.50)$$

Test statistika glasi:

$$T = \frac{\hat{b} - b_0}{\sqrt{D[\hat{b}]}} = \frac{\hat{b} - b_0}{\hat{\sigma}_\varepsilon / \sqrt{SS_X}} \quad (8.51)$$

i ona ima Studentovu t raspodelu sa $n - 2$ stepeni slobode. Oblast prihvatanja nulte hipoteze za prag značajnosti α je tada:

$$t_{n-2, \alpha/2} < T < t_{n-2, 1-\alpha/2} \quad (8.52)$$

Ako se u ovom testu stavi $b_0 = 0$, onda se može testirati značajnost linearne regresije. To je čest slučaj ako treba testirati značajnost linearnog trenda u nekom nizu. Interval poverenja koeficijenta pravca b za nivo poverenja $\beta = 1 - \alpha$ definisan je sa:

$$\hat{b} - t_{n-2, 1-\alpha/2} \frac{\hat{\sigma}_\varepsilon}{\sqrt{SS_X}} < b < \hat{b} + t_{n-2, 1-\alpha/2} \frac{\hat{\sigma}_\varepsilon}{\sqrt{SS_X}} \quad (8.53)$$

Testiranje koeficijenta a i njegov interval poverenja mogu se dobiti na analogni način, uzimajući u obzir dispregiju ocene ovog koeficijenta iz izraza (8.49).

Osobine reziduala. Ako se izrazi (8.48) za ocene regresionih koeficijenata unesu u izraz (8.45) za reziduala, lako se može pokazati da je njihova aritmetička sredina jednaka nuli:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{a} - \hat{b}x_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i - \bar{y} + \hat{b}\bar{x} - \hat{b} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = 0$$

Disperzija reziduala se računa deljenjem sume kvadrata reziduala sa $n - 2$, jer se oduzimaju dva stepena slobode za dva regresiona koeficijenta:

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{a} - \hat{b}x_i)^2 \quad (8.54)$$

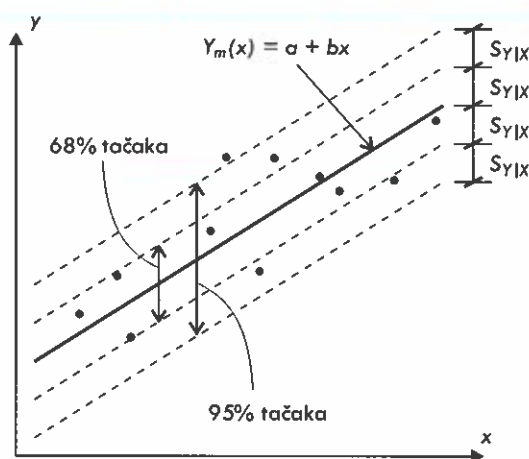
Može se pokazati da se ovaj izraz svodi na:

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{n-1}{n-2} (1-r^2) S_y^2 \quad (8.55)$$

gde je r koeficijent korelacije iz formule (8.42), a S_y standardna devijacija niza Y . Kvadratni koren disperzije reziduala se naziva *standardna greška ocene regresije* Y na X :

$$S_{Y|X} = \hat{\sigma}_\varepsilon = S_y \sqrt{\frac{n-1}{n-2} (1-r^2)} \quad (8.56)$$

Standardna greška $S_{Y|X}$ se može shvatiti kao standardna devijacija reziduala koja opisuje njihovo rasipanje oko regresione prave, a ujedno se može shvatiti kao parametar



Slika 8.20. Regresiona linija i pojasevi sa 68% i 95% eksperimentalnih tačaka prema normalnoj raspodeli.

normalne raspodele reziduala. Ako se oko regresione prave nacrtaju dve paralelne linije na rastojanju od $S_{Y|X}$ iznad i ispod prave, u tom pojasu se, prema normalnoj raspodeli, očekuje oko 68% eksperimentalnih tačaka (slika 8.20). Slično tome, u pojasu od $\pm 2S_{Y|X}$ oko regresione prave očekuje se oko 95% eksperimentalnih tačaka. U opštem slučaju, procenat od $100p = 100(1 - \alpha)$ eksperimentalnih tačaka nalazi se u pojasu:

$$[Y_m(x) - z_{1-\alpha/2} S_{Y|X}, Y_m(x) + z_{1-\alpha/2} S_{Y|X}]$$

gde je $z_{1-\alpha/2}$ vrednost standardne normalne promenljive za vrednost funkcije raspodele $\Phi = 1 - \alpha/2$.

Objašnjena i neobjašnjena varijacija. Varijacija slučajne promenljive Y opisuje se njenom disperzijom, koja se može prikazati i kao suma kvadrata odstupanja Y od srednje vrednosti \bar{y} . Ako je Y_m regresioni model, ukupna disperzija promenljive Y može se razložiti na dve komponente na sledeći način:

$$\sum (Y - \bar{y})^2 = \sum (Y - Y_m)^2 + \sum (Y_m - \bar{y})^2 \quad (8.57)$$

Prvi izraz s desne strane jednakosti predstavlja sumu kvadrata reziduala i naziva se *neobjašnjena varijacija*, a drugi izraz predstavlja sumu kvadrata odstupanja modela od srednje vrednosti ili *objašnjenu varijaciju*. Odnos objašnjene i ukupne varijacije zove se *korelacioni odnos* ili *koeficijent krivolinijske korelacije*:

$$R^2 = \frac{\sum (Y_m - \bar{y})^2}{\sum (Y - \bar{y})^2} = 1 - \frac{\sum (Y - Y_m)^2}{\sum (Y - \bar{y})^2} = 1 - \frac{\sum \varepsilon^2}{\sum (Y - \bar{y})^2} \quad (8.58)$$

i pokazuje procenat objašnjene varijacije pomoću modela Y_m . Za prostu linearnu regresiju može se pokazati da je korelacioni odnos jednak kvadratu koeficijenta korelacije ($R^2 = r^2$).

Provera pogodnosti linearne regresije. Osnovne pretpostavke proste linearne regresije su: 1) slučajne promenljive X i Y su normalno raspoređene, 2) reziduali ε_i imaju normalnu raspodelu sa srednjom vrednošću 0 i disperzijom σ_ε^2 , 3) reziduali ε_i su međusobno nezavisni, i 4) reziduali ε_i su nezavisni od vrednosti x_i slučajne promenljive X . Pretpostavke o normalnosti se mogu proveriti vizuelno crtanjem empirijskih raspodela nizova x_i i y_i na dijagramu normalne verovatnoće ili se mogu testirati pomoću testova saglasnosti. Pretpostavka o međusobnoj nezavisnosti reziduala može se vizuelno proveriti ako se nacrtaju dijagram zavisnosti svakog reziduala ε_i (za $i = 2, 3, \dots, n$) od prethodnog reziduala ε_{i-1} u nizu, a pretpostavka o nezavisnosti reziduala od promenljive x tako što će se nacrtati dijagram zavisnosti ε_i od x_i .

Interval poverenja regresione prave i prognozirane vrednosti Y . Linearni regresioni model definisan je koeficijentima a i b , koji važe za populaciju. Sa ocenama ovih koeficijenata dobijenim iz uzorka, regresiona prava je definisana jednačinom:

$$\hat{Y}_m(x) = \hat{a} + \hat{b}x \quad (8.59)$$

Može se pokazati da ordinata ocenjene regresione prave za neko fiksirano $x = x_0$ ima sledeću disperziju:

$$D[\hat{Y}_m(x_0)] = \hat{\sigma}_\varepsilon^2 \left[\frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{SS_X} \right] \quad (8.60)$$

gde je SS_X definisano u formuli (8.49). Ako je

$$Y_m(x) = ax + b \quad (8.61)$$

regresiona prava koja važi za populaciju, njen interval poverenja za nivo poverenja $\beta = 1 - \alpha$ je dat sa:

$$\hat{Y}_m(x_0) - t_{n-2, 1-\alpha/2} \sqrt{D[\hat{Y}_m(x_0)]} < Y_m(x_0) < \hat{Y}_m(x_0) + t_{n-2, 1-\alpha/2} \sqrt{D[\hat{Y}_m(x_0)]} \quad (8.62)$$

Kada se na osnovu regresione prave prognozira (ocenjuje) vrednost promenljive Y za $x = x_0$ uz neko slučajno odstupanje, tada prognozirana (tj. buduća ili neosmotrena) vrednost Y_0 ima disperziju koja se sastoji od disperzije regresione prave i disperzije reziduala:

$$D[Y_0] = D[\hat{Y}_m(x_0)] + D[\hat{\varepsilon}] = \hat{\sigma}_\varepsilon^2 \left[1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{SS_X} \right] \quad (8.63)$$

a njen interval poverenja onda glasi:

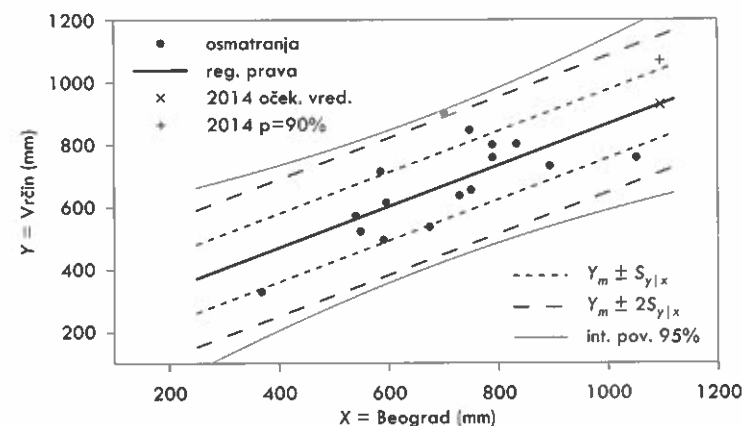
$$\hat{Y}_m(x_0) - t_{n-2, 1-\alpha/2} \sqrt{D[Y_0]} < Y_0 < \hat{Y}_m(x_0) + t_{n-2, 1-\alpha/2} \sqrt{D[Y_0]} \quad (8.64)$$

Na slici 8.21 se vidi primer intervala poverenja regresione prave i prognoziranih vrednosti promenljive Y .

Primer 8.4. Česti prekid u radu padavinskih stanica u okolini Beograda doprineli su da nizovi godišnjih visina padavina na ovim stanicama budu nekompletni. Potrebno je produžiti niz godišnjih visina padavina na stanici Vrčin na osnovu podataka sa stanice Beograd-Observatorija, gde osmatranja nisu prekidana. Podaci iz perioda zajedničkog rada dve stanice prikazani su u tabeli C.2 u dodatku C. (1) Sprovesti regresionu analizu zavisne promenljive Y koja predstavlja padavine u Vrčinu i nezavisne promenljive X koja predstavlja padavine u Beogradu. (2) Ako je 2014. godine u Beogradu izmereno 1095 mm padavina, za stanicu u Vrčinu odrediti: a) očekivanu godišnju visinu padavina i b) godišnju visinu padavina verovatnoće 90%.

Rešenje. (1) Pre pristupanja regresionoj analizi, grubo se može proveriti da li se dva niza mogu smatrati podacima iz normalne raspodele. Koeficijenti asimetrije nizova X i Y iznose $c_{sx} = 0.14$ i $c_{sy} = -0.55$, što u slučaju niza X ukazuje na slaganje sa normalnom raspodelom, dok u slučaju niza Y ukazuje na blago odstupanje od normalne raspodele u smislu negativne asimetrije. Iz ovoga se zaključuje da je logaritamska transformacija podataka nepotrebna, pa se primenjuje prosta linearna regresija.

Nizovi imaju po $n = 16$ podataka. Koeficijent korelacije između dva niza iznosi $r = 0.711$. Srednje vrednosti i standardne devijacije ova dva niza iznose (sve u mm):



Slika 8.21. Linearna regresija godišnjih padavina na stanici Vrčin u odnosu na stanicu Beograd iz primera 8.4: regresiona prava, pojasevi sa 68% i 95% eksperimentalnih tačaka, interval poverenja od 95% za prognozirane vrednosti zavisne promenljive i procenjene vrednosti za 2014. godinu (simboli).

$$\bar{x} = 698.5, \quad S_x = 162.5$$

$$\bar{y} = 666.1, \quad S_y = 150.8$$

Sa ovim podacima mogu se izračunati ocene regresionih koeficijenata:

$$\hat{b} = r \frac{S_y}{S_x} = 0.771 \frac{150.8}{162.5} = 0.660$$

$$\hat{a} = \bar{y} - b\bar{x} = 666.1 - 0.66 \cdot 698.5 = 204.9$$

Standardna greška reziduala je:

$$S_{Y|X} = S_y \sqrt{\frac{n-1}{n-2} (1-r^2)} = 150.8 \sqrt{\frac{15}{14} (1-0.711^2)} = 109.8 \text{ mm}$$

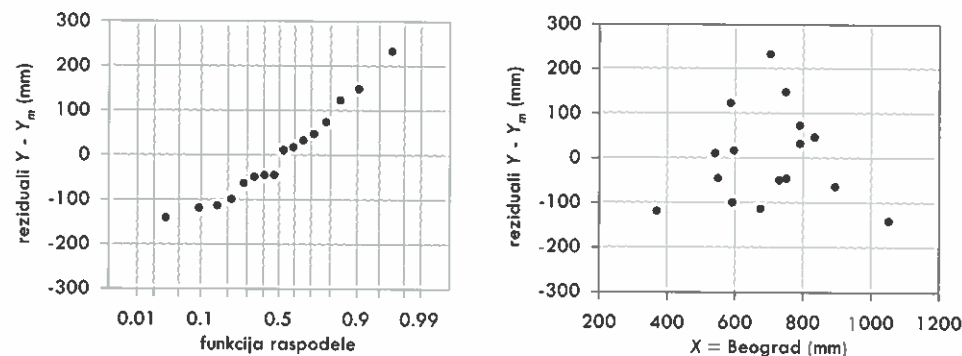
Regresioni model tada glasi:

$$Y = 204.9 + 0.66X + \varepsilon; \quad N(0, 109.8)$$

Na slici 8.21 prikazana je regresiona prava i pojasevi u kojima se očekuje 68% odnosno 95% eksperimentalnih tačaka. Sa slike se može videti da se u užem pojaseu nalazi 10 tačaka, odnosno $10/16 = 62.5\%$ od ukupnog broja tačaka, dok se u širem pojaseu nalazi $15/16 = 94\%$ od ukupnog broja tačaka. Imajući u vidu da je obim uzorka veoma mali, za eksperimentalni procenat tačaka se može reći da se slaže sa očekivanim procentom tačaka prema normalnoj raspodeli.

Na istoj slici je prikazan i interval poverenja od 95% za prognozirane vrednosti zavisne promenljive Y . Ovaj interval poverenja je određen korišćenjem izraza (8.63) i (8.64), pri čemu je prvo određena suma SS_X :

$$SS_X = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = (n-1) \cdot S_x^2 = 15 \cdot 162.5^2 = 364053$$



Slika 8.22. Provera pretpostavki linearne regresije godišnjih padavina na stanici Vrčin u odnosu na stanicu Beograd iz primera 8.4: reziduali na dijagramu normalne raspodele (levo) i zavisnost reziduala od vrednosti nezavisne promenljive (desno).

dok vrednost Studentove promenljive t za traženi nivo poverenja od 95% iznosi $t_{n-2, 1-\alpha/2} = t_{14, 0.975} = 2.145$. Granice ovog intervala poverenja su definisane sa:

$$\hat{Y}_m(x_0) \pm 2.145 \cdot 109.8 \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{16} + \frac{(x_0 - 698.5)^2}{364053}}$$

Ispunjenost pretpostavki linearne regresije proverena je i crtanjem reziduala na dijagramu normalne verovatnoće na slici 8.22 levo, gde se vidi da su reziduali uglavnom raspoređeni pravolinijski, osim na donjem kraju raspodele. Saglasnost empirijske i teorijske raspodele proverena je primenom testa Kolmogorov-Smirnova, pri čemu je dobijeno najveće odstupanje empirijske i normalne raspodele od $D_{\max} = 0.132$, što je manje od kritične vrednosti $D_{kr} = 0.327$ za obim uzorka $n = 16$ i prag značajnosti $\alpha = 0.05$. Na slici 8.22 desno prikazan je i dijagram zavisnosti reziduala od vrednosti slučajne promenljive X , sa kojeg se može videti da nema sistematske zavisnosti između ove dve veličine.

(2) Zavisna promenljiva Y za neku fiksiranu vrednost promenljive $X = x$ ima normalnu raspodelu sa očekivanom vrednošću koja je jednaka ordinati regresione prave za fiksirano x i sa disperzijom koja je jednaka disperziji reziduala (videti izraz 8.46). Prema tome, očekivana vrednost godišnjih padavina u Vrčinu u 2014. godini predstavlja vrednost koja se dobija iz regresionog modela za vrednost padavina u Beogradu za datu godinu:

$$\bar{y}_{2014} = a + bx_{2014} = 204.9 + 0.660 \cdot 1095 = 928 \text{ mm}$$

Godišnja visina padavina u Vrčinu verovatnoće 90% u 2014. godini može se dobiti iz normalne raspodele za vrednost funkcije raspodele $F = 0.9$:

$$y_{2014}(0.9) = \bar{y}_{2014} + y(0.9) \cdot S_{Y|X} = 928 + 1.282 \cdot 109.8 = 1069 \text{ mm}$$

Ove dve vrednosti zavisne promenljive Y dobijene primenom linearnog regresionog modela takođe su označene na slici 8.21.

8.4.3 Višestruka linearna regresija

Model višestruke linearne regresije glasi:

$$Y = a + b_1 X_1 + b_2 X_2 + \dots + b_k X_k + \varepsilon \quad (8.65)$$

gde je Y zavisna promenljiva i u kojoj ima k nezavisnih promenljivih (X_1, X_2, \dots, X_k) sa ukupno $k + 1$ regresionim koeficijentom. Za grešku, odnosno rezidual, ε i u ovom slučaju se pretpostavlja da ima normalnu raspodelu sa srednjom vrednošću 0 i disperzijom σ_ε^2 . Primenom metode najmanjih kvadrata dobija se sistem od $k + 1$ jednačine sa $k + 1$ nepoznatih koeficijenata, koji se može rešiti matricnim računom sa raspoloživim nizovima promenljivih X_1, X_2, \dots, X_k i Y . Sa ocenjenim vrednostima regresionih koeficijenata, regresioni model daje sledeću ocenu promenljive Y :

$$\hat{Y}_m(x) = \hat{a} + \hat{b}_1 x_1 + \hat{b}_2 x_2 + \dots + \hat{b}_k x_k \quad (8.66)$$

Disperzija reziduala se ocenjuje prema formuli:

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{1}{n-k-1} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 = \frac{1}{n-k-1} \sum_{i=1}^n [y_i - \hat{Y}_m(x_i)]^2 \quad (8.67)$$

Podela ukupne varijacije zavisne slučajne promenljive Y na objašnjenu i neobjašnjenu varijaciju, koja je prikazana za prostu linearnu regresiju u izrazu (8.57), važi i u slučaju višestruke regresije, pa je korelacioni odnos (8.58) pokazatelj i jačine višestruke korelacije. Pod pretpostavkom da zavisna promenljiva Y i nezavisne promenljive X_1, X_2, \dots, X_k prate normalnu raspodelu, odnos objašnjene i neobjašnjene varijacije podeljenih sa odgovarajućim brojem stepeni slobode je statistika:

$$F = \frac{\frac{1}{k} \sum (Y_m - \bar{y})^2}{\frac{1}{n-k-1} \sum (Y - Y_m)^2} \quad (8.68)$$

Statistika F ima F -raspodelu sa parametrima $v_1 = k$ i $v_2 = n - k - 1$ (tablica F -raspodele data je u dodatku D.9) i može se koristiti za testiranje značajnosti koeficijenata višestruke regresije. Nulta hipoteza tog testa glasi da su koeficijenti b_1, b_2, \dots, b_k jednaki nuli, a regresija je značajna ako se nulta hipoteza odbaci. Kritična oblast ovog testa za prag značajnosti α je definisana sa:

$$F > F_{k, n-k-1}(\alpha) \quad (8.69)$$

Veća vrednost ove statistike govori o većoj značajnosti regresionog modela, pa se može koristiti i za poređenje više modela (npr. proste i višestruke regresije, ili višestruke regresije sa manje ili više nezavisnih promenljivih).

8.4.4 Primena regresione analize u hidrologiji

Primene regresione analize u hidrologiji su brojne. Jedna od osnovnih primena odnosi se na popunjavanje nedostajućih podataka u hidrološkim nizovima na osnovu podataka sa susednih stanica koje imaju neprekinute zapise. Ukoliko se niz na nekoj

stanici Y popunjava uz pomoć podataka sa jedne stanice X , tada se primenjuje prosta regresija. Ukoliko je na raspolaganju više stanica (X_1, X_2, \dots, X_M) sa kojih se mogu iskoristiti informacije, može se primeniti višestruka regresija. Pored povremenih prekida u pojedinim nizovima koji se na ovaj način mogu popuniti, isti pristup se može primeniti i u slučaju ukidanja neke stanice. Ako je u periodu pre ukidanja stanice postojalo dovoljno simultanih podataka na dve stanice (ili više njih), formiranjem regresionog modela može se produžiti niz na profilu ukinute stanice. Pri ovakvom produžavanju treba imati u vidu da se pri rekonstrukciji nedostajućih podataka mogu napraviti greške, jer regresioni model preslikava varijacije nezavisnih promenljivih X u varijaciju promenljive Y , što u realnosti ne mora da bude tačno.

Pored popunjavanja i produžavanja nizova, regresioni modeli se koriste u hidrologiji i za utvrđivanje veza oticaja sa fizičko-geografskim karakteristikama slivova (površina sliva, nagib i sl.). Kada se takve veze uspostave na osnovu podataka sa izučениh slivova, tj. onih na kojima postoje podaci osmatranja protoka, tada se dobijene regresione jednačine mogu koristiti i za procenu nepoznatog oticaja na neizučениm slivovima sa poznatim fizičkim karakteristikama. U ovakvim primenama je veoma važno da se regresione jednačine odrede za oblasti sličnih klimatskih i fizičkih karakteristika (tzv. homogeni regioni) kako bi njihova primena na neizučениm slivovima bila validna (videti npr. Blagojević, 2011; Blagojević & Plavšić, 2013).

Još jedna česta primena regresione analize jeste analiza trenda u hidrološkim nizovima. Najčešće se pretpostavlja linearni trend, pa se značajnost trenda ispituje kroz značajnost koeficijenta pravca regresione prave. Iako ovakve analize daju uvid u (ne)postojanje dugoročnih promena u hidrološkim nizovima, mora se naglasiti da interpretaciji rezultata takvih analiza treba pristupiti obazrivo. Naime, intenzitet trenda i njegova statistička značajnost u velikoj meri zavise od izabranog perioda obrade podataka (Plavšić i Obuškić, 2012; Stojković i sar., 2014, 2015) jer hidrološki nizovi po pravilu imaju i ciklične promene a ne samo monotono rastuće ili opadajuće. Zato se može desiti da se na osnovu različitih podataka za istu lokaciju donesu različiti zaključci o jačini trenda, pa čak i različiti zaključci o njegovom pravcu. Iz istog razloga, tako dobijene trendove ne treba ekstrapolovati u daleku budućnost.

ČETVRTI DEO: MODELIRANJE OTICAJA

9 MODELIRANJE OTICAJA

9.1 Modeliranje procesa padavine-otica

9.1.1 Veza između padavina i oticaja

Pronalaženje veze između padavina na nekom slivu i protoka na izlaznom profilu sliva je jedan od osnovnih zadataka u hidrologiji. Merenja protoka, koja su neophodna za procenu količina vode, zahtevna su kako u vremenskom, tako i u finansijskom pogledu. Zato su podaci o merenjima protoka dostupni samo za ograničen broj profila (hidroloških stanica) i nisu uvek dostupni za sve profile i slivove od interesa za pojedine projekte. Iz tog razloga je pronalaženje veze između padavina i oticaja, koja bi omogućila procenu količina vode na osnovu ograničenog fonda raspoloživih podataka, stalna tema inženjerske hidrologije i dugogodišnji predmet istraživanja hidrologije kao nauke.

Imajući u vidu međusobnu povezanost procesa u ciklusu oticaja i različite puteve vode na slivu, za vezu između padavina i oticaja se može reći da je složena i nejednolična. Transformacija padavina u oticaj na nekom slivu zavisi od velikog broja faktora. Pored karakteristika samih padavina, tu su i svi fizičko-geografski faktori opisani u poglavlju 6.7. Važan faktor je i prethodna vlažnost sliva, odnosno stanje vlage na slivu pre razmatranih kišnih epizoda, koja je osnovni uzrok nejednoličnosti odgovora sliva na padavine.

Složenost veze između padavina i oticaja se u većini slučajeva može sagledati i kvalitativno opisati, ali je često veoma teško tu vezu opisati kvantitativno, tj. matematički kako bi se omogućili inženjerski proračuni oticaja na osnovu padavina. Opis veze između padavina i oticaja naziva se *model padavine-otica*, samo *model oticaja* ili *hidrološki model*. Kada se govori o modeliranju oticaja, sliv se najčešće posmatra kao sistem koji transformiše ulaz (pre svega padavine) u izlaz (protok na izlaznom profilu sliva). Za izlaz iz sistema, tj. za hidrogram oticaja, često se kaže da predstavlja *odgovor sistema* (sliva) na zadati ulaz (padavine i druge ulazne veličine).

U užem smislu reči, model padavine-otica se sastoji od skupa jednačina, formula i postupaka kojima se opisuju procesi na slivu. Takav model se naziva *formalni* ili *matematički model*. Pomoću formalnog modela, protok na izlaznom profilu sliva računa se na osnovu ulaznih podataka o padavinama, temperaturama, karakteristikama sliva itd. Nasuprot formalnom modelu je *perceptivni model*, koji predstavlja naše shvatanje

kako se odvija proces oticaja na slivu u različitim uslovima i kvalitativan opis tog procesa (Beven 2001, 2009). Da bi se od perceptivnog modela došlo do formalnog, neophodno je uvesti određene pretpostavke o procesima na slivu i pojednostaviti ih na određeni način. Matematički modeli oticaja zato su uvek uprošćene predstave rada sliva kao sistema.

Način transformacije ulaza u izlaz u modelu zavisice od shematizacije procesa oticanja na slivu. Struktura modela padavine-oticaaj u pogledu obuhvaćenih procesa može da bude različita za različite inženjerske zadatke, jer nisu uvek svi procesi od interesa za pojedine zadatke. Na primer, u proračunu oticaja kišnih voda na malim slivovima može se izostaviti proračun evapotranspiracije jer je ona zanemarljiva u relativno kratkom periodu oticanja sa male slivne površine. Takođe, u proračunu oticaja sa gradskih nepropusnih površina često se može izostaviti i infiltracija ako na slivnoj površini nema propusnih površina. S druge strane, na prirodnim slivovima sa značajnom vegetacijom evapotranspiracija i infiltracija će imati ključnu ulogu tokom dužih proračunskih perioda za određivanje količine otekle vode, pa se ne mogu isključiti iz modela.

Za formiranje modela padavine-oticaaj značajnu ulogu imaju i vremenska i prostorna razmera, koje su međusobno povezane. Izbor vremenskog koraka za koji će se u modelu definisati ulazne veličine i sračunati oticaaj zavisi od veličine sliva i od svrhe modeliranja. Za opisivanje hidrograma velike vode usled jake kiše potreban je relativno mali vremenski korak: od nekoliko minuta za male gradske slivove do nekoliko sati za prirodne slivove. Za proračun npr. godišnje zapremine otekle vode sa sliva mogu koristiti mesečni ili godišnji podaci.

Veličina sliva takođe ima značajnu ulogu za formiranje modela oticaja. Male površine, kao što su delovi saobraćajnica i gradskih slivova, po pravilu imaju ujednačene (homogene) karakteristike, pa se na njima može očekivati relativno jednostavna veza između padavina i oticaja. Zato je primena jednostavnih modela (kao što je racionalna metoda, opisana kasnije u ovom poglavlju) na ovim slivovima opravdana. Na velikim slivovima na kojima se promene odvijaju sporije i izražavaju u danima ili mesecima, razlike u lokalnim padavinama i formiranju oticaja se izravnavaju. Na takvim slivovima se veza između padavina i oticaja može lakše uspostaviti, a nije iznenađujuće ni kada se za vrlo velike slivove dobije i linearna veza između padavina i oticaja. Slivovi koji bi se uslovno mogli nazvati slivovima srednje veličine (200–1000 km²) predstavljaju najveći problem za opisivanje veze padavina i oticaja. S jedne strane, ovakvi slivovi su dovoljno veliki da raznovrsnost njihovog reljefa, geoloških karakteristika i nameštaja njihovih površina, kao i prostorna neravnomernost kiša, imaju značajan uticaj na formiranje oticaja. S druge strane, ovakvi slivovi su dovoljno mali da se oticaaj na njima odvija brzo, pa ga treba izražavati u satnim vremenskim koracima (ili čak kraćim). Na slivovima sa ovako promenljivim karakteristikama, gde značajnu ulogu imaju i isparavanje, infiltracija i režim podzemnih voda, veza između padavina i oticaja može da bude veoma komplikovana i izrazito nelinearna. Veliki izazov za modeliranje predstavljaju oblasti složene geološke građe, kao što je karst. U takvim geološkim formacijama topografske i hidrološke vododelnice se ne podudaraju, pa veza između padavina i oticaja postaje nejednoznačna jer se podzemne vode mogu kretati u različitim smerovima, u zavisnosti od trenutnih uslova (videti npr. Jaćimović i sar., 2015a; 2015b).

9.1.2 O vrstama modela i njihovoj primeni

Modeli padavine-oticaaj se danas rutinski koriste u hidrološkim prognozama, projektovanju objekata za zaštitu od velikih voda, analizi sistema za odvođenje kišnih voda u urbanim sredinama i proceni količina vodnih resursa. Pored toga, modeli oticaja se mogu formirati tako da odražavaju neko hipotetičko buduće stanje na slivu i da na taj način omoguće analizu promena hidrološkog režima pod takvim izmenjenim uslovima. Da bi ovakve primene bile moguće, potrebno je da modeli budu u stanju da što bolje predstavljaju procese na slivu. U hidrološkoj literaturi mogu se naći opisi velikog broja hidroloških modela, od veoma jednostavnih do veoma složenih. Modeli se mogu svrstati u različite kategorije po različitim kriterijumima.

Osnovna podela modela oticaja je na *modele epizoda* i *kontinualne modele*. Modeli epizoda namenjeni su proračunu oticaja usled jedne epizode padavina i ne bave se stanjem sliva između kišnih epizoda. Nasuprot njima su kontinualni modeli, koji pretvaraju kontinualni ulaz padavina i drugih veličina u kontinualni izlaz oticaja.

Druga važna podela modela je na *prostorno homogene* i *prostorno raspodeljene (distribuirane)*. Prostorno homogeni modeli oticaja su oni na kojima su sve karakteristike sliva, pa i padavine koje na njega dospevaju, iste na celom slivu. U distribuiranim ili prostorno raspodeljenim modelima različiti delovi sliva mogu da imaju različite karakteristike. Pri tome se sliv može podeliti na podslivove različitih karakteristika ili na mrežu elementarnih površina (koja može da bude mreža kvadratnih, trougaonih ili nekih drugačijih elemenata).

Prema načinu na koji modeli opisuju procese na slivu, modeli se najčešće dele na *fizički bazirane modele* i *konceptualne modele*. Fizički bazirani modeli koriste hidrodinamičke i druge fizičke zakone kao matematički opis procesa na slivu. Ovi zakoni u opštem slučaju zahtevaju veliki stepen uprošćenja osnovnih jednačina zbog složenosti hidroloških procesa i fizičko-geografskih karakteristika prirodnih slivova. U grupu konceptualnih modela spadaju modeli različite složenosti u tzv. sistemskom pristupu u kome model hidrološkog sistema pretvara zadati ulaz u traženi izlaz. Većina konceptualnih modela se sastoji od komponenti koje predstavljaju idealizovane delove ciklusa oticaja i kojima se ulazno-izlazne transformacije opisuju empirijskim ili pojednostavljenim fizičkim relacijama. Ovi modeli mogu da budu veoma jednostavni i da se zasnivaju na jednoj jedinoj komponenti ili formuli (npr. racionalna metoda). Ipak, mnogi modeli se sastoje od kombinacije fizički baziranih i konceptualnih opisa procesa na slivu i ne mogu se strogo svrstati u jednu od ove dve grupe.

Sa gledišta načina na koji se tretiraju varijacije oticaja, modeli padavine-oticaaj se još dele i na *determinističke* i *stohastičke*. Stohastički modeli su oni u kojima se varijacije veličina kao što su padavine i oticaaj opisuju kao slučajne promenljive sa raspodelama verovatnoće. U ovom poglavlju se razmatraju samo deterministički modeli, u kojima se sve veličine tretiraju kao da nemaju slučajne varijacije.

Pored ulaznih podataka, u modelima figurišu i *parametri* modela kojima se jedinačine za proračun oticaja „podešavaju“ tako da simuliraju ponašanje razmatranog sliva. Parametri mogu biti fizičke veličine relevantne za određene procese (npr. koeficijent filtracije u poroznoj sredini) ili nepoznati koeficijenti koje treba podesiti tako da reprodukuju odgovor sliva. U opštem slučaju, parametri se mogu izmeriti, mogu se odrediti na osnovu karakteristika sliva, ili se mogu podesiti postupkom *kalibracije mode-*

la. Kalibracija modela je moguća ukoliko se raspolaže podacima osmatranja padavina i oticaja, tj. na izučenim slivovima, dok se na neizučenim slivovima parametri moraju proceniti na odgovarajući način. Proces kalibracije može se shvatiti kao proces optimizacije parametara modela prema izabranim kriterijumima slaganja izmerenih i modeliranih hidrograma (npr. Todorović, 2015).

U vezi sa izborom modela treba naglasiti dve stvari (Shaw i sar., 2011). Prvo, svi modeli, pa čak i oni veoma složeni, jesu samo matematička aproksimacija veoma složenih procesa na slivu, pa će i rezultati modeliranja oticaja biti približni i neodređeni (neizvesni). Približni opis procesa na slivu se formuliše pod određenim pretpostavkama o odvijanju tih procesa, pa je zato veoma važno proučiti pretpostavke na kojima je model zasnovan kako bi se procenilo da li su te pretpostavke opravdane za razmatranu primenu. Druga napomena odnosi se na kvalitet (pouzdanost i tačnost) ulaznih podataka, od kojih zavisi i kvalitet rezultata modela. Obično se smatra da su modeli sa više ulaznih parametara precizniji i tačniji. Međutim, loši ulazni podaci daće i lošija predviđanja oticaja, pa je poželjno da se ulazni podaci provere pre unošenja u model.

U ovom poglavlju razmatraju se modeli oticaja usled jedne ili više kišnih epizoda, i to su najjednostavniji modeli koji su namenjeni svakodnevnoj inženjerskoj praksi. Postoje, naravno, i složeniji modeli čiji opisi izlaze iz okvira kurseva na osnovnim studijama. Naglašava se da radi o kišnim epizodama, a ne o epizodama snežnih padavina koje prati akumulacija i topljenje snega koje bi zahtevale složenije modele koji uzimaju u obzir i termodinamičke procese. Ovde takođe neće biti reči o kontinualnim hidrološkim modelima. Zainteresovani čitaoci se zato upućuju na drugu literaturu iz ove oblasti (npr. Jovanović i Radić, 1992; Beven, 2001 i 2009).

9.1.3 Komponente modela padavine-oticaaj

U hidrološkim modelima veza između padavina i oticaja obično se uspostavlja u dva koraka, a to su:

- transformacija ukupne kiše u efektivne kiše, odnosno određivanje zapremine otekle vode, i
- transformacija efektivne kiše u hidrogram oticaja

Prvi korak daje količinu oticaja od date kišne epizode. Međutim, ukupna zapremina otekle vode nije adekvatna veličina za većinu zadataka u projektovanju objekata. U nekim zadacima je potrebno poznavati najveći protok koji se može javiti u nekom trenutku, a u nekim drugim i raspored protoka u vremenu, tj. kompletan hidrogram oticaja. Kada je u pitanju opasnost od velikih voda, zapremina oticaja ne mora uvek da bude dobar pokazatelj te opasnosti, već npr. i brzina nailaska poplavnog talasa. Iz tog razloga se sprovodi i drugi korak, tj. proračun celog hidrograma oticaja. Drugi korak može da sadrži dva dela, a to su određivanje hidrograma direktnog oticaja i hidrograma baznog oticaja. U nekim analizama, kao što je određivanje računskih velikih voda, određuje se samo direktni oticaaj, dok se bazni oticaaj zanemaruje. Ako treba odrediti kompletan hidrogram (ne samo tokom kišnih epizoda, već i između njih), bazni oticaaj se ne može zanemariti, već se i on modelira da bi se dobio hidrogram ukupnog oticaja. Komponenta kojom se modelira bazni oticaaj zato je sastavni deo kontinualnih modela.

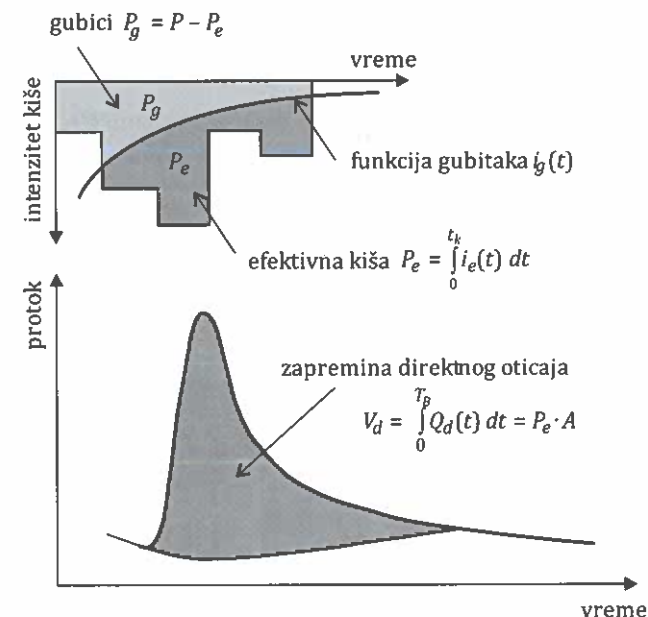
Pored ovih komponenti, koje se često nazivaju hidrološkim, modeli oticaja mogu da sadrže i druge komponente. Česta hidraulička komponenta je model tečenja u vodotokovima kojim se računa transformacija, tj. propagacija oticaja u rečnim koritima. Ova komponenta je neophodna u modelima u kojima se sliv deli na podslivove (videti odeljak 0 o dekompoziciji sliva). Takođe, česte su i komponente kojima se simulira rad objekata, kao što je npr. transformacija talasa u akumulacijama.

U naredna tri potpoglavlja razmatraju se proračuni efektivne kiše, direktnog oticaja i transformacije hidrograma kao najčešćim komponentama hidroloških modela.

9.2 Proračun efektivne kiše

Kada se modelira jedna epizoda padavine-oticaaj, tada transformacija ukupne kiše u efektivne kiše podrazumeva određivanje dela zapremine pale vode na sliv koja će se pojaviti na izlaznom profilu sliva kao direktni oticaaj.

Na slici 9.1 prikazana je jedna kišna epizoda, tj. njen hijetogram, i hidrogram oticaja koji je ta kišna epizoda izazvala. U opštem slučaju, deo pale kiše na sliv se neće pretvoriti u oticaaj, već će se „izgubiti“ kroz procese evapotranspiracije i zadržavanja u površinskim depresijama. Kao što je već opisano u poglavlju 6.1, do vodotoka će u kraćem vremenskom periodu dospeti samo direktni oticaaj koji čine brze komponente oticaja, a to su površinski oticaaj i deo potpovršinskog oticaja. Dakle, i deo vode koja se upije u tlo se neće brzo pojaviti na izlaznom profilu sliva, već se može smatrati izgubljenom sa gledišta direktnog oticaja. Na slici 9.1 je zato ukupna visina kiše P (tj. ukupna površina hijetograma) podeljena na gubitke P_g i na efektivnu kišu P_e , pri čemu važi:



Slika 9.1. Efektivna kiša i zapremina direktnog oticaja.

$$P = P_e + P_g \quad (9.1)$$

Izraz „gubici“ ne znači da je voda nestala, već samo da neće dospeti do izlaznog profila sliva u razmatranom vremenskom periodu. Nasuprot gubicima, efektivna kiša je deo ukupne kiše koja će se pojaviti na izlaznom profilu sliva.

Modeliranje transformacije ukupne (ili bruto) kiše u efektivnu (ili neto) kišu podrazumeva da se pretpostavi neki oblik funkcije gubitaka $i_g(t)$ (slika 9.1) kojom se definišu količina i dinamika gubitaka u nekoj kišnoj epizodi. Sa usvojenom funkcijom gubitaka dolazi se i do efektivne kiše koja se pretvara u oticaj.

Količina i dinamika vode koja čini gubitke, a time određuje i efektivnu kišu, zavisi od karakteristika sliva (namene površina, vegetacije, pedoloških i geoloških karakteristika, reljefa), ali i od konkretne situacije za razmatranu kišnu epizodu, tj. od ukupne visine i intenziteta kiše, trajanja kiše, stanja prethodne vlažnosti na slivu, infiltracionog kapaciteta zemljišta i nivoa podzemnih voda. Različite metode na različit način uzimaju u obzir sve ove faktore.

Metode za proračun gubitaka koje će ovde biti obrađene su: konstantni gubici, konstantni gubici sa početnim gubitkom, proporcionalni gubici, Hortonova jednačina infiltracije i metoda SCS za gubitke.

9.2.1 Metoda konstantnih gubitaka

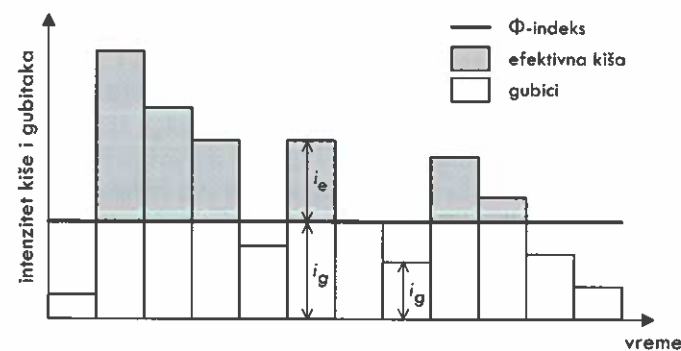
Funkcija konstantnih gubitaka naziva se Φ -indeks i podrazumeva konstantan intenzitet gubitaka i_g tokom kiše (slika 9.2):

$$i_g(t) = \Phi$$

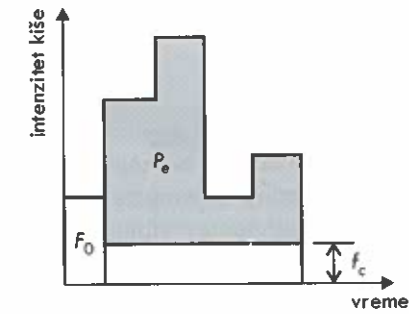
U primeni ove funkcije gubitaka treba voditi računa da intenzitet gubitaka ne može biti veći od intenziteta pale kiše i :

$$i_g(t) = \begin{cases} \Phi, & i > \Phi \\ i, & i < \Phi \end{cases} \quad (9.2)$$

Intenzitet efektivne kiše i_e je tada:



Slika 9.2. Funkcija konstantnih gubitaka ili Φ -indeks.



Slika 9.3. Funkcija konstantnih gubitaka sa početnim gubitkom.

$$i_e(t) = i(t) - i_g(t) = \begin{cases} i - \Phi, & i > \Phi \\ 0, & i < \Phi \end{cases} \quad (9.3)$$

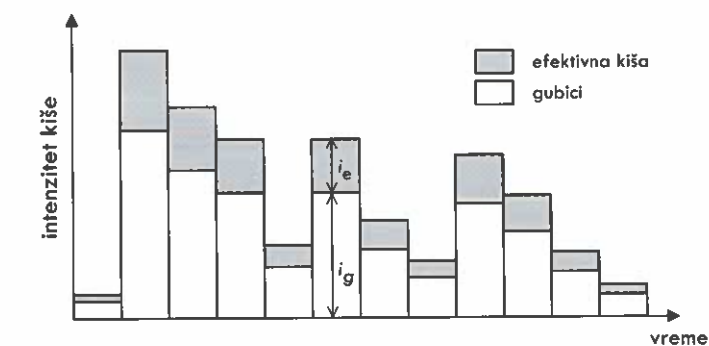
U ovoj metodi konstantan gubitak Φ je jedini nepoznati parametar koji treba odrediti da bi se metoda primenila. On zavisi od velikog broja faktora jer treba da obuhvati uticaj karakteristika zemljišnog pokrivača, tla, vegetacije, prethodnog stanja vlažnosti na slivu itd. Φ -indeks se može odrediti iz podataka osmatranja za pojedinačne kišne epizode, ali tako dobijena vrednost se ne može primeniti na druge epizode osim ako se ne dovede u vezu sa fizičkim karakteristikama sliva.

Za prosečne i suve uslove vlažnosti tla na slivu pre razmatrane kišne epizode obično se može pretpostaviti da su gubici na početku epizode znatno veći nego tokom epizode. U tom slučaju se metoda konstantnih gubitaka može modifikovati tako da se pored intenziteta konstantnog gubitka f_c uključi i početni gubitak F_0 (slika 9.3).

9.2.2 Metoda proporcionalnih gubitaka

Funkcija proporcionalnih gubitaka pretpostavlja da je intenzitet efektivne kiše u svakom intervalu vremena proporcionalan intenzitetu pale kiše (slika 9.4), a koeficijent proporcionalnosti je koeficijent oticaja η :

$$i_e(t) = \eta \cdot i(t) \quad (9.4)$$



Slika 9.4. Funkcija proporcionalnih gubitaka (koeficijent oticaja).

Intenzitet gubitaka je onda:

$$i_g(t) = (1 - \eta) \cdot i(t) \quad (9.5)$$

Slično kao u prethodnoj metodi, i ovde je koeficijent oticaja jedini nepoznati parametar koji treba odrediti i koji takođe treba da obuhvati sve faktore od kojih zavisi odnos efektivne i ukupne kiše. Koeficijent oticaja se može proceniti iz osmotrenih kišnih epizoda i odgovarajućih snimljenih talasa oticaja, ali tako dobijenu vrednost treba primeniti na druge epizode sa velikom pažnjom.

9.2.3 Hortonova jednačina infiltracije

Jednu od prvih jednačina za proračun infiltracije dao je Horton (1939), koji je pretpostavio da intenzitet infiltracije opada eksponencijalno sa vremenom od početne infiltracije f_0 do neke krajnje (ravnotežne) vrednosti f_c :

$$f(t) = f_c + (f_0 - f_c) e^{-kt} \quad (9.6)$$

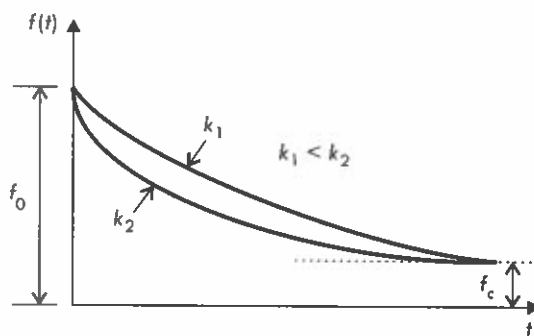
gde je k koeficijent koji pokazuje brzinu opadanja intenziteta infiltracije. Oblik Hortonove jednačine prikazan je na slici 9.5. Kumulativna infiltracija je onda:

$$F(t) = f_c t + \frac{1}{k} (f_0 - f_c) (1 - e^{-kt}) \quad (9.7)$$

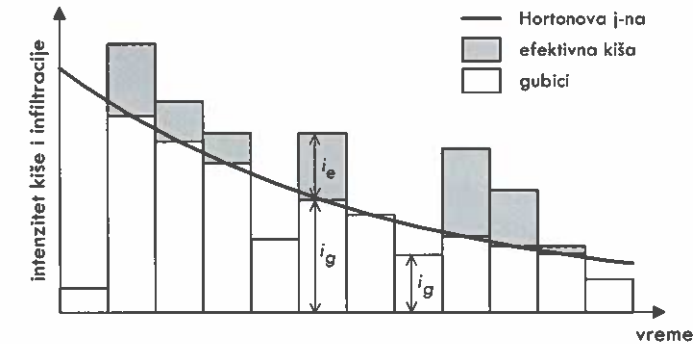
Hortonova jednačina se može izvesti iz Ričardsove jednačine (jednačina 5.11 u poglavlju 5.2.3) pod određenim uslovima, tj. ako se pretpostavi da koeficijent filtracije K i koeficijent difuzije D ne zavise od sadržaja vlage θ (Eagleson, 1970, str. 294).

Hortonova jednačina opisuje potencijalnu infiltraciju ili infiltracioni kapacitet tla. Ako se Hortonova jednačina primenjuje kao funkcija gubitaka (slika 9.6), onda treba voditi računa da li je u nekom intervalu vremena intenzitet kiše i manji od potencijalne infiltracije f , jer se tada može upiti samo onoliko vode koliko pada:

$$i_g(t) = \begin{cases} f, & i > f \\ i, & i < f \end{cases} \quad (9.8)$$



Slika 9.5. Grafički prikaz Hortonove jednačine infiltracije.



Slika 9.6. Primena Hortonove jednačine kao funkcije gubitaka.

Drugim rečima, intenzitet efektivne kiše je:

$$i_e(t) = i(t) - i_g(t) = \begin{cases} i - f, & i > f \\ i, & i < f \end{cases} \quad (9.9)$$

Parametri Hortonove jednačine zavise od karakteristika površine terena, a najviše od pokrivača i tekture površine tla. Ove parametre bi trebalo odrediti iz terenskih merenja, koja su retko na raspolaganju. Početna infiltracija f_0 je obično velika za peskovita tla, a još je veća ako se na njihovoj površini nalazi vegetacioni pokrivač (tabela 9.1). Isto važi i za krajnju infiltraciju f_c , za koju se smatra da zavisi i od nagiba terena (McCuen, 1998). Za ovaj parametar se često savetuje da se usvoji kao vrednost koeficijenta filtracije u zasićenom tlu. Preporučene vrednosti parametra f_c prikazane su u tabeli 9.2. Za parametar k , koji pokazuje brzinu opadanja infiltracije kroz vreme, u literaturi se preporučuju vrednosti u različitim granicama, u rasponu od 1 do 20 h⁻¹ (McCuen, 1998).

Tabela 9.1. Tipične vrednosti parametra f_0 (mm/h) Hortonove jednačine (Rossman i sar., 2015).

Vrsta tla	Stanje vegetacije	Stanje prethodne vlažnosti		
		suvo	delimično vlažno	vlažno
pesak	sa gustom vegetacijom	250	100-170	84
	sa malo ili bez vegetacije	125	50-85	43
ilovača	sa gustom vegetacijom	150	60-100	50
	sa malo ili bez vegetacije	75	30-50	25
glina	sa gustom vegetacijom	50	20-35	18
	sa malo ili bez vegetacije	25	10-17	7.5

Tabela 9.2. Tipične vrednosti parametra f_c (mm/h) Hortonove jednačine (Akan, 1993).

Vrsta tla	f_c (mm/h)
Glinovita ilovača, prašinsto glinovita ilovača, peskovita glina, prašinsto glina, glina	0 - 1.3
Peskovito glinovita ilovača	1.3 - 3.8
Prašinsto ilovača, ilovača	3.8 - 7.6
Pesak, ilovasti pesak, peskovita ilovača	7.6 - 11

Primer 9.1. Za kišnu epizodu, čija je sumarna linija kiše definisana u prve dve kolone tabele 9.3, potrebno je odrediti efektivnu kišu koristeći Hortonovu jednačinu infiltracije. Početna infiltracija f_0 na razmatranom slivu procenjena je na 8 mm/h i krajnja infiltracija f_c na 0.3 mm/h, dok je za koeficijent k usvojena vrednost 0.32 h^{-1} . Kolika je ukupna količina infiltrirane vode? Kolika je efektivna kiša?

Rešenje. Za zadatu kišnu epizodu najpre se određuju intenziteti pale kiše u polučasovnim vremenskim intervalima, i to tako što se prvo računaju priraštaji kiše u trećoj koloni tabele 9.3, a potom i intenziteti u četvrtoj koloni. Intenzitet infiltracije se računa pomoću Hortonove jednačine na sredini svakog vremenskog intervala. Sa pretpostavljenim koeficijentima, Hortonova jednačina glasi:

$$f(t) = 0.3 + 7.7 e^{-0.32t'}$$

gde je t' vreme na sredini razmatranog intervala (peta kolona u tabeli 9.3). Ova kriva je prikazana na slici 9.7. U šestoj koloni tabele 9.3 prikazani su intenziteti infiltracije za pojedine intervale, koji predstavljaju samo potencijalnu infiltraciju. Stvarna infiltracija odnosno gubici i_g su sračunati u sedmoj koloni uzimajući u obzir ograničenja u intenzitetu kiše (izraz 9.8), dok su u poslednjoj koloni prikazane vrednosti intenziteta efektivne kiše.

Ukupna količina infiltrirane vode P_g određuje se na osnovu gubitaka i_g :

$$P_g = \sum \Delta P_g = \sum i_g \cdot \Delta t = 13.0 \text{ mm}$$

Efektivna kiša tokom cele epizode P_e računa se na sličan način:

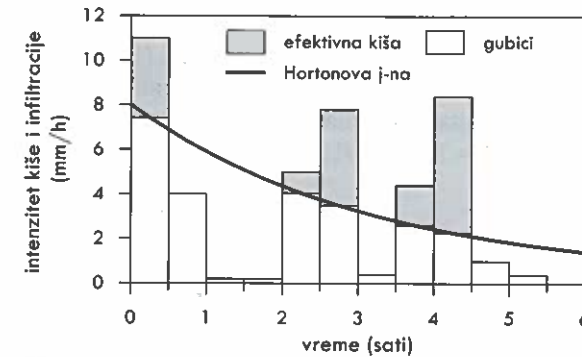
$$P_e = \sum \Delta P_e = \sum i_e \cdot \Delta t = 8.4 \text{ mm}$$

Treba primetiti da je zbir efektivne kiše i gubitaka jednak ukupnoj paloj kiši:

$$P = P_g + P_e = 13.0 + 8.4 = 21.4 \text{ mm}$$

Tabela 9.3. Proračun infiltracije i efektivne kiše po Hortonovoj jednačini u primeru 9.1.

t (h)	P (mm)	ΔP (mm)	i (mm/h)	t' (h)	f (mm/h)	i_g (mm/h)	i_e (mm/h)
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
0	0.0						
0.5	5.5	5.5	11.0	0.25	7.41	7.41	3.59
1	7.5	2.0	4.00	0.75	6.36	4.00	0.00
1.5	7.6	0.1	0.20	1.25	5.46	0.20	0.00
2	7.7	0.1	0.20	1.75	4.70	0.20	0.00
2.5	10.2	2.5	5.00	2.25	4.05	4.05	0.95
3	14.1	3.9	7.80	2.75	3.49	3.49	4.31
3.5	14.3	0.2	0.40	3.25	3.02	0.40	0.00
4	16.5	2.2	4.40	3.75	2.62	2.62	1.78
4.5	20.7	4.2	8.40	4.25	2.28	2.28	6.12
5	21.2	0.5	1.00	4.75	1.98	1.00	0.00
5.5	21.4	0.2	0.40	5.25	1.74	0.40	0.00



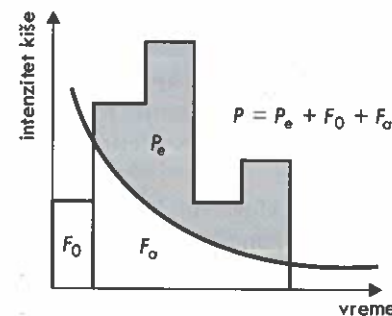
Slika 9.7. Hortonova jednačina kao funkcija gubitaka u primeru 9.1.

9.2.4 Metoda SCS (NRCS) za efektivnu kišu

Američka agencija Soil Conservation Service⁸ ili SCS (NRCS, 1986; 2004) razvila je vezu između padavina i oticaja, odnosno između ukupne pale i efektivne kiše, u kome se ukupna kiša P deli na tri komponente (slika 9.8): početni gubitak F_0 , stvarni gubitak F_a i efektivnu kišu P_e . Osnovna pretpostavka ove metode je da važi sledeća proporcija:

$$\frac{F_a}{d} = \frac{P_e}{P - F_0} \quad (9.10)$$

gde je d maksimalni gubitak ili tzv. retenzioni kapacitet sliva. Stvarni gubitak F_a i maksimalni gubitak d obuhvataju stvarne, odnosno maksimalne gubitke na intercepciju, zadržavanje u površinskim depresijama i infiltraciju. Kako se ova metoda u standardnoj inženjerskoj praksi najčešće koristi za proračun merodavnih velikih voda za dimenzionisanje hidrotehničkih objekata, obično se smatra da se intercepcija i zadržavanje u površinskim depresijama mogu zanemariti u odnosu na infiltraciju, pa se F_a i d često nazivaju i stvarno, odnosno maksimalno upijanje.



Slika 9.8. Postavka metode SCS za proračun gubitaka.

⁸ Ova agencija Ministarstva za poljoprivredu Sjedinjenih Američkih Država promenila je ime u Natural Resources Conservation Service (NRCS).

Kada se od ukupne visine kiše P oduzme početni gubitak F_0 , razlika $P - F_0$ može da se shvati kao deo pale kiše raspoložive za formiranje oticaja. Jednačina (9.10) pretpostavlja da će se od dela kiše raspoložive za oticaj formirati efektivna kiša u istom odnosu kao što je i stvarno upijanje u odnosu na potencijalno. Ako se u izrazu (9.10) eliminiše stvarno upijanje tako što se stavi $F_0 = P - F_0 - P_e$, a potom jednačina reši po efektivnoj kiši P_e , dobija se izraz:

$$P_e = \frac{(P - F_0)^2}{P - F_0 + d} \quad (9.11)$$

Gornja jednačina za efektivnu kišu ima dva parametra koje treba odrediti u praktičnim proračunima: početni gubitak F_0 i retenzioni kapacitet d . Oba parametra zavise od vrste pokrivača, stanja vegetacije, sastava tla, ali i od stanja vlage u tlu pre razmatrane epizode. Na osnovu empirijskih podataka sa velikog broja malih eksperimentalnih slivova, metoda SCS predlaže da se u uslovima prosečne prethodne vlažnosti sliva usvoji da početni gubitak iznosi 20% retenzionog kapaciteta sliva:

$$F_0 = 0.2d \quad (9.12)$$

Uz ovu pretpostavku, izraz (9.11) postaje:

$$P_e = \frac{(P - 0.2d)^2}{P + 0.8d} \quad (9.13)$$

Umesto retenzionog kapaciteta d kao parametra u ovoj metodi koristi se tzv. broj krive CN. Broj CN nema dimenziju i vrednosti mu se kreću između 0 i 100, a njegova veza sa d je data sa:

$$d = 25.4 \left(\frac{1000}{CN} - 10 \right) \text{ (mm)} \quad (9.14)$$

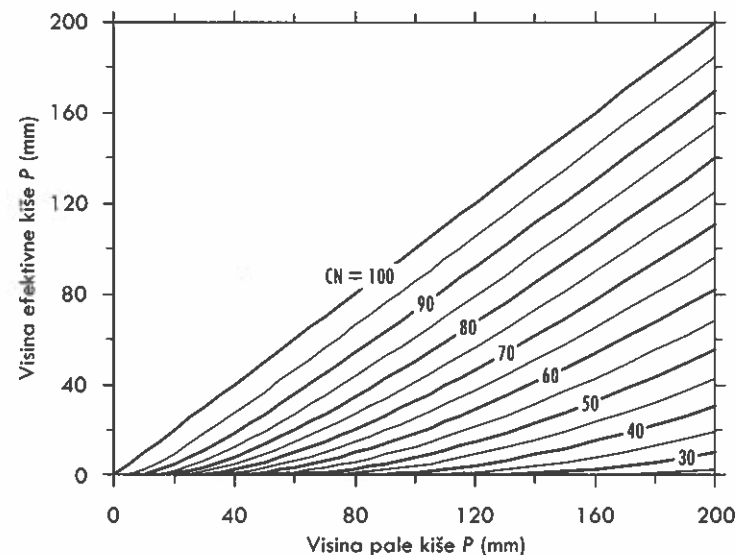
gde se d dobija u milimetrima. Za nepropusne i vodene površine CN = 100, dok je za prirodne površine CN < 100. Veza između P , P_e i CN za prosečne uslove prethodne vlažnosti (tj. za $F_0 = 0.2d$) predstavlja dobro poznati SCS dijagram, dat na slici 9.9.

Tabela tipičnih CN brojeva data je u tabelama 9.4 i 9.5 za ruralne i urbane oblasti. Brojevi CN se određuju iz ove klasifikacije na osnovu vrste zemljišta i namene površine. U toj klasifikaciji zemljišta su podeljena u četiri tzv. hidrološke grupe tla prema sposobnosti za upijanje vode: pesak (grupa A), les i peskovita ilovača (grupa B), ilovača (grupa C) i glina (grupa D). U tabeli 9.6 prikazane su karakteristike ove četiri hidrološke grupe tla.

S obzirom da su na slivovima za koje je potrebno odrediti efektivnu kišu najčešće zastupljene različite vrste tla i površine različitih namena, potrebno je utvrditi njihovu zastupljenost na slivu i odrediti prosečan broj CN za sliv:

$$CN_{\text{sliv}} = \sum_i \frac{A_i}{A} \cdot CN_i \quad (9.15)$$

gde su A_i površine sa pojedinačnim vrstama tla ili namenama za koje važe hidrološki brojevi CN_i , dok je A ukupna površina sliva.



Slika 9.9. Dijagram odnosa ukupne i efektivne kiše po SCS metodi za prosečne uslove prethodne vlažnosti.

Metoda SCS je osmišljena da omogući ocenu zapremine oticaja, tj. ukupne visine efektivne kiše, usled dnevnih kiša (Woodward i sar., 2010). Iz tog razloga se ova metoda ne preporučuje za proračun efektivne kiše kraćih trajanja. Ipak, zbog svoje jednostavnosti, ova metoda se koristi u praksi i za kraća trajanja kiša. U takvoj primeni treba biti oprezan i validnost rezultata proveriti i drugim metodama.

Ukoliko metodom SCS treba odrediti efektivnu kišu za višednevnu epizodu sa neravnomernim intenzitetom kiše tokom vremena, proračun se sprovodi korišćenjem sumarne linije kiše. Za svaki vremenski interval, ordinata sumarne linije efektivne kiše $P_e(t)$ dobija se prema formuli (9.11) na osnovu ordinate sumarne linije pale kiše $P(t)$. Pri tome treba voditi računa da ukupna visina kiše mora biti veća od početnih gubitaka F_0 , jer se ne može izgubiti više kiše nego što je palo. Dakle:

$$P_e(t) = \frac{[P(t) - F_0]^2}{P(t) - F_0 + d}, \quad P > F_0 \quad (9.16)$$

$$P_e(t) = 0, \quad P < F_0$$

Sa ovako određenom sumarnom linijom efektivne kiše, može se konstruisati i hijetogram efektivne kiše.

Odnos ukupne i efektivne kiše na dijagramu na slici 9.9 važi za prosečne uslove prethodne vlažnosti tla (tzv. ARC II). Za suve uslove (ARC I) ili za veliku prethodnu vlažnost (ARC III) SCS predlaže modifikaciju CN brojeva:

$$CN_I = \frac{4.2CN_{II}}{10 - 0.058CN_{II}}, \quad CN_{III} = \frac{23CN_{II}}{10 + 0.13CN_{II}} \quad (9.17)$$

Prethodna vlažnost sliva zavisi od prethodnih padavina na slivu. Jedan od mogućih pokazatelja prethodne vlažnosti sliva su prethodne petodnevne padavine. Definicija uslova prethodne vlažnosti u zavisnosti od prethodnih petodnevnih padavina data je u tabeli 9.8.

Tabela 9.4. Hidrološki brojevi CN za ruralne oblasti (za prosečne uslove vlažnosti na slivu i $F_0 = 0.2d$) (izvori: Đorović, 1984; McCuen, 1998).

Namena zemljišta ili pokrivač	Obrada tla ¹	Hidrološki uslovi ²	Hidrološka grupa tla ³			
			A	B	C	D
Neobrađeno (ugar) Okopavine	SR		77	86	91	94
	SR	slabi	72	81	88	91
	SR	dobri	67	78	85	89
	C	slabi	70	79	84	88
	C	dobri	65	75	82	86
	C/T	slabi	66	74	80	82
	C/T	dobri	62	71	78	81
Sitnozrnaste žitarice	SR	slabi	65	76	84	88
	SR	dobri	63	75	83	87
	C	slabi	63	74	82	85
	C	dobri	61	73	81	84
	C/T	slabi	61	72	79	82
	C/T	dobri	69	70	78	81
	C/T	dobri	69	70	78	81
Gusto sejane mahunarke ili livade u plodoredu	SR	slabi	66	77	85	89
	SR	dobri	58	72	81	85
	C	slabi	64	75	83	85
	C	dobri	55	69	78	83
	C/T	slabi	63	73	80	83
	C/T	dobri	51	67	76	80
	C/T	dobri	51	67	76	80
Pašnjak ili prirodna livada		slabi	68	79	86	89
		srednji	49	69	79	84
		dobri	39	61	74	80
	C	slabi	47	67	81	80
	C	srednji	25	59	75	83
	C	dobri	6	35	70	79
	C	dobri	6	35	70	79
Livada kultivirana Šuma (šumske površine)		dobri	30	58	71	78
		slabi	45	66	77	83
		srednji	36	60	73	79
Poljoprivredna imanja sa zgradama (salaši, majuri)		dobri	25	55	70	77
		dobri	59	74	83	86
Putevi zemljani tvrdi			72	82	87	87
			74	84	90	92

¹ Oznake za način obrade tla:

SR pravolinijska obrada (u smeru pada terena)

C po izohipsama

T u terasama

C/T po izohipsama i terasama

² Opis hidroloških uslova dat je u tabeli 9.7

³ Opis hidroloških grupa tla dat je u tabeli 9.6

Tabela 9.5. Hidrološki brojevi CN za urbane oblasti (za prosečne uslove vlažnosti na slivu i $F_0 = 0.2d$) (izvor: McCuen, 1998).

Namena zemljišta	Hidrološka grupa tla			
	A	B	C	D
Otvoren prostor, travnjaci, travnati sportski tereni, groblja i sl.				
dobri uslovi ¹ : trava na više od 75% površine	39	61	74	80
srednji uslovi: trava na 50% do 75% površine	49	69	79	84
slabi uslovi: trava na manje od 50% površine	68	79	86	89
Asfaltirani parkinzi, krovovi, prilazi	98	98	98	98
Putevi i ulice:				
asfaltirani sa ivičnjacima i slivnicima	98	98	98	98
asfaltirani sa otvorenim putnim kanalima	83	89	92	93
nasuti tucanikom ili šljunkom	76	85	89	91
zemljani	72	82	87	89
Gradska jezgra, površine sa poslovnom i komercijalnom namenom (85% nepropusnih površina ²)	89	92	94	95
Industrijske zone (72% nepropusnih površina ²)	81	88	91	93
Stambene zone:				
parcele od 5 ari sa 65% nepropusnih površina ²	77	85	90	92
parcele od 10 ari sa 38% nepropusnih površina ²	61	75	83	87
parcele od 13.5 ari sa 30% nepropusnih površina ²	57	72	81	86
parcele od 20 ari sa 25% nepropusnih površina ²	54	70	80	85
parcele od 40 ari sa 20% nepropusnih površina ²	51	68	79	84
parcele od 80 ari sa 12% nepropusnih površina ²	46	65	77	82
Neizgrađene parcele (poravnato propusno zemljište bez vegetacije)	77	86	91	94

¹ Opis hidroloških uslova dat je u tabeli 9.7

² Nepropusne površine koje su direktno priključene na sistem kišne kanalizacije

Tabela 9.6. Hidrološke grupe tla prema klasifikaciji SCS (izvor: Đorović, 1984; McCuen, 1998).

Hidrološka grupa tla	Minimalna infiltracija (mm/h)
A: Velika propustljivost i mali potencijal oticanja: duboki pesak, duboki les, agregirane prašine	7.6 - 11.4
B: Srednja propustljivost u potpuno vlažnom stanju: plitak les, peskovita ilovača	3.8 - 7.6
C: Mala propustljivost u potpuno vlažnom stanju: glinovita ilovača, plitka peskovita ilovača, tla sa malo organskog sadržaja, tla sa visokim sadržajem gline	1.3 - 3.8
D: Veoma slaba propustljivost i veliki potencijal oticanja: tla koja značajno bubre pri vlaženju, tla sa stalno visokom podzemnom vodom, plitka tla na nepropusnoj podlozi, veoma plastične gline, neka slana tla	0 - 1.3

Tabela 9.7. Hidrološki uslovi pri izboru broja CN (izvor: McCuen, 1998).

Uslovi za oticanje	Opis
Slabi (veliki oticaj)	Veoma ogoljeno ili redovno paljeno zemljište. Manje od 50% površine je zaštićeno biljnim pokrivačem, niskim rastinjem ili krošnjama drveća.
Srednji	Umeren pokrivač sa 50% do 75% površine zaštićene vegetacijom.
Dobri (mali oticaj)	Gust pokrivač sa više od 75% površine zaštićene vegetacijom.

Tabela 9.8. Definicija uslova prethodne vlažnosti sliva po metodi SCS (izvor: Chow i sar., 1988).

Uslovi prethodne vlažnosti (ARC)	Ukupne prethodne petodnevne padavine (mm)	
	jesen/zima	proleće/leto
ARC I	< 1.3	< 3.6
ARC II	1.3 - 2.8	3.6 - 5.3
ARC III	> 2.8	> 5.3

Primer 9.2. Na slivu reke Obnice do stanice Belo Polje, ukupne površine 185 km², njive su zastupljene sa 35%, šume sa 25%, a voćnjaci, livade, pašnjaci i neplodno tlo sa po 10% (Petrović, 1996). Zemljište na slivu najvećim delom pripada hidrološkoj grupi B. Za petodnevnu kišnu epizodu iz maja 2014. godine zabeleženu na pluviografu u Majinovićima sa dnevnim visinama kiše prikazanim u drugoj koloni tabele 9.9, odrediti efektivnu kišu na ovom slivu koristeći metodu SCS uz pretpostavku o vlažnim prethodnim uslovima na slivu.

Rešenje. Za razmatrani sliv najpre se određuje prosečan broj CN za sliv na osnovu klasifikacije u tabeli 9.4. Za hidrološku grupu B iz tabele se očitava broj CN: 77 za njive, 60 za šume, 66 za voćnjake, 58 za livade, 69 za pašnjake i 82 za neplodno tlo. Na osnovu zadatih procenata zastupljenosti ovih površina, primenom formule (9.15) dobija se broj CN koji važi za prosečne uslove prethodne vlažnosti:

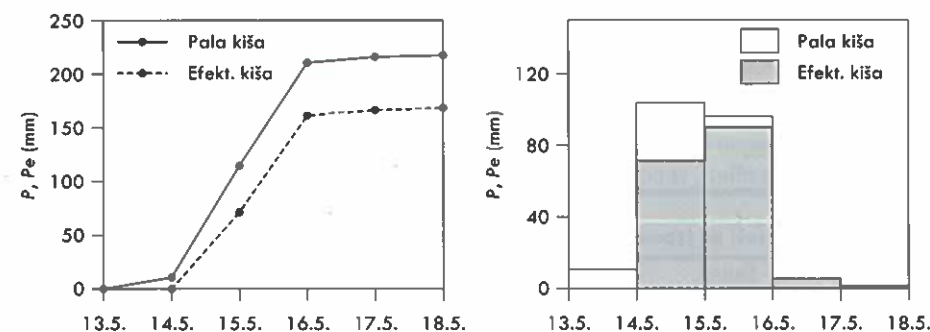
$$CN_{sliv} = 0.35 \cdot 77 + 0.25 \cdot 60 + 0.10 \cdot (66 + 58 + 69 + 82) = 69.45$$

Za uslove velike prethodne vlažnosti, korigovani CN prema obrascu (9.17) iznosi:

$$CN_{III} = \frac{23 \cdot 69.45}{10 + 0.13 \cdot 69.45} = 83.95$$

Retenzioni kapacitet zemljišta d tada je jednak (formula 9.14):

$$d = 25.4 \left(\frac{1000}{83.95} - 10 \right) = 48.6 \text{ mm}$$



Slika 9.10. Primer proračuna efektivne kiše po SCS metodi: sumarna linija efektivne kiše dobija se na osnovu sumarne linije pale kiše (levo), a zatim se računaju dnevne vrednosti (desno).

Tabela 9.9. Proračun efektivne kiše metodom SCS u primeru 9.2.

Datum	P_{dn} (mm)	P (mm)	$P - F_0$ (mm)	P_e (mm)	$P_{e,dn}$ (mm)
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
13.5.2014.	10.6	10.6	0.9	0.02	0.02
14.5.2014.	103.8	114.4	104.7	71.5	71.5
15.5.2014.	96.1	210.5	200.8	161.7	90.2
16.5.2014.	5.5	216.0	206.3	167.0	5.3
17.5.2014.	1.5	217.5	207.8	168.4	1.4

Proračun sumarne linije efektivne kiše sproveden je prema formuli (9.16) na osnovu sumarne linije pale kiše u trećoj koloni tabele 9.9 uz pretpostavku da početni gubici iznose $F_0 = 0.2d = 9.7$ mm. U četvrtoj koloni tabele prikazana je raspoloživa visina pale kiše posle odbijanja početnih gubitaka, dok je dobijena sumarna linija efektivne kiše data u petoj koloni. U poslednjoj koloni tabele su prikazane dnevne visine efektivne kiše. Rezultati su grafički prikazani i na slici 9.10.

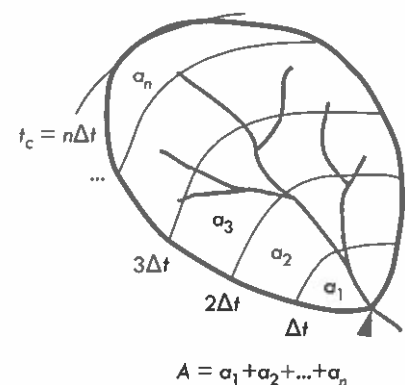
9.3 Proračun hidrograma direktnog oticaja

Modeli kojima se efektivna kiša transformiše u hidrogram direktnog oticaja mogu biti veoma različiti po svojim osnovnim pretpostavkama, pojednostavljenjima i ulaznim podacima. U slučaju kada na posmatranom slivu postoje merenja makar kratkog obima, postoji mogućnost da se ovakav model kalibriše, odnosno da se odrede parametri u modelu sa kojima se sračunati hidrogrami oticaja kao rezultat modela najbolje slažu sa osmotrenim hidrogramima. U slučaju neizučenihih slivova, odnosno onih na kojima ne postoje osmatranja protoka, model se ne može prilagođavati merenjima, pa se pribegava izradi *sintetičkih hidrograma*. Pod sintetičkim hidrogramima se podrazumevaju različite vrste hidrograma jednostavne forme, najčešće trougaone, čiji se elementi (karakteristična vremena i maksimalna ordinata) određuju na osnovu fizičkih karakteristika sliva (površine sliva, dužine toka, nagiba sliva i slično) i karakteristika kiše.

U ovoj knjizi razmatraju se metode koje se najčešće primenjuju u praksi. U njih spada *racionalna metoda* koja se najviše koristi u urbanoj hidrologiji za potrebe komunalne hidrotehnike, a potom koncept *jediničnog hidrograma* koji se primenjuje na prirodnim slivovima. Pre prikaza ovih metoda razmatra se putovanje vode na slivu, jer vreme koje prođe od trenutka kada kiša dospe na površinu terena do njenog pojavljivanja na izlaznom profilu sliva ima ključni uticaj na oblik hidrograma oticaja sa sliva.

9.3.1 Vreme putovanja vode i vreme koncentracije

Ako se sliv posmatra kao homogena celina na čiju svaku tačku na površini dospeva ista visina pale kiše, tada se obično pretpostavlja da su i gubici isti u svakoj tački, a time i efektivna kiša. Pitanje koje se onda može postaviti jeste za koje vreme će se efektivna kiša iz neke tačke sliva pojaviti na njegovom izlaznom profilu. To vreme će



Slika 9.11. Izohrone kao linije istog vremena putovanja vode do izlaznog profila sliva. Ukupna površina sliva A podeljena je na površine između izohrona a_i ($i = 1, 2, \dots, n$).

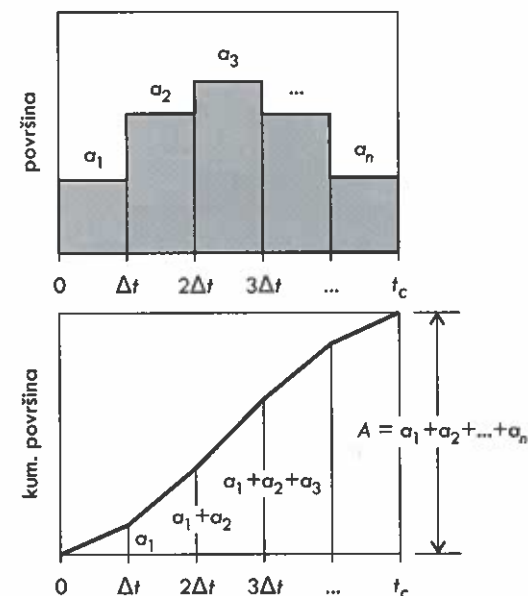
zavisiti od toga kojim putevima i kojom brzinom voda putuje od razmatrane tačke do izlaznog profila sliva.

Vreme koncentracije je najduže vreme putovanja vode na nekom slivu, odnosno vreme koje je potrebno nekom deliću (elementarnoj zapremini) vode da dospe do izlaznog profila sliva. Vreme koncentracije se definiše i kao vreme potrebno da voda doputuje od hidraulički najudaljenije tačke sliva do izlaznog profila. Pod hidraulički najudaljenijom tačkom se smatra ona od koje će voda najsporije stići do izlaza sa sliva. Takođe, pod koncentracijom se podrazumeva „koncentrisanje“ odnosno sakupljanje vode na izlaznom profilu sliva. Metode za procenu vremena koncentracije su opisane u odeljku 0.

Linije jednakih vremena putovanja vode do izlaznog profila sliva nazivaju se *izohrone* (slika 9.11). Dijagram zastupljenosti vremena putovanja u odnosu na površinu sliva naziva se *dijagram vreme-površina* (slika 9.12). Ako bi se proces oticaja na slivu zamislio kao čista translacija vode, tj. efektivne kiše od neke tačke na slivu do izlaznog profila, tada bi dijagram vreme-površina predstavljao hidrogram oticaja na izlaznom profilu usled 1 mm efektivne kiše. Ovakva ideja za proračun oticaja razmatra se u narednom odeljku kao *metoda izohrona*. Međutim, pretpostavka o čistoj translaciji oticaja nije uvek opravdana jer se voda na slivu zadržava, pa hidrogram na izlaznom profilu sliva ne mora da ima (i najčešće nema) isti oblik kao hijetogram efektivne kiše. Na prirodnim slivovima to zadržavanje može da bude značajno (zadržavanje u tlu, u depresijama i sl.). Na urbanim slivovima na kojima je zadržavanje vode praktično zanemarljivo, pretpostavka o čistoj translaciji može da bude opravdana.

9.3.2 Metoda izohrona

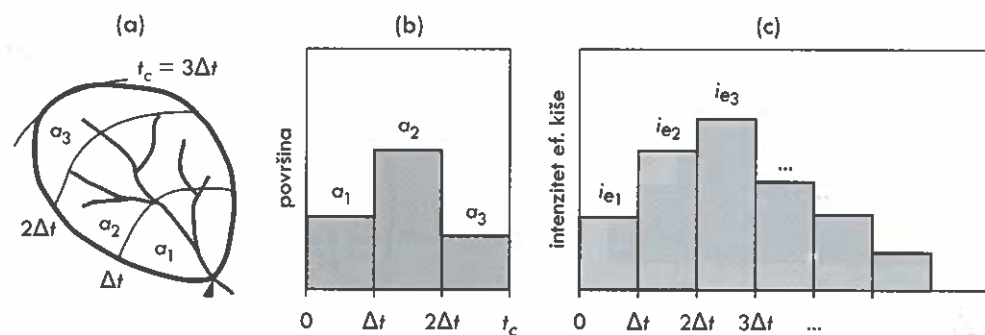
U prethodnom odeljku, uz definisane izohrone i dijagram vreme-površina, predstavljena je ideja da se oticaj na slivu tretira kao čista translacija efektivne kiše od neke tačke na slivu do izlaznog profila. Takav način proračuna oticaja se naziva metoda izohrona, genetska metoda (Jovanović, 1989) ili metoda vreme-površina (Shaw, 1994).



Slika 9.12. Dijagram vreme-površina: inkrementalni (gore) i kumulativni (dole).

Za određivanje količine vode na izlaznom profilu sliva u ovoj metodi se koriste hijetogram efektivne kiše i dijagram vreme-površina. Osnovna pretpostavka jeste da je efektivna kiša raspoređena ravnomerno po slivu, odnosno da na svakoj tački sliva važi isti hijetogram efektivne kiše. Dijagram vreme-površina pokazuje koji deo sliva učestvuje u oticaju na izlaznom profilu sliva u pojedinim vremenskim koracima. Ceo sliv će doprinositi protoku na izlazu tek po isteku vremena koncentracije. Drugim rečima, ako kiša traje bar onoliko koliko iznosi vreme koncentracije ili duže od toga, oticaj će moći da se formira sa cele površine sliva. U suprotnom, ako kiša traje kraće od vremena koncentracije, ceo sliv ne može da učestvuje u formiranju maksimalnog protoka na izlaznom profilu.

Za opis ove metode razmotrimo primer sliva na slici 9.13-a. Neka je Δt vremenski korak izabran za proračun oticaja. Vreme koncentracije sliva iznosi $t_c = 3\Delta t$. Delovi sliva odvojeni izohronama sa vremenom putovanja $\Delta t, 2\Delta t$ i $3\Delta t$ imaju površine a_1, a_2 i a_3 . Ukupna površina sliva je $A = a_1 + a_2 + a_3$. Odgovarajući dijagram vreme-površina prikazan je na slici 9.13-b, a na slici 9.13-c prikazan je hijetogram efektivne kiše na slivu, koja je diskretizovana u istim vremenskim intervalima Δt . Tabela 9.10 pokazuje koji deo sliva proizvodi oticaj od pojedinih delova kiše. Usled kiše iz prvog vremenskog intervala Δt sa intenzitetom i_{e1} , do izlaznog profila sliva stiže samo oticaj sa površine a_1 . Oticaj od kiše i_{e1} sa površine a_2 stiže do izlaznog profila posle $2\Delta t$, ali tada stiže i oticaj od kiše iz drugog intervala sa površine a_1 . Iz tabele se vidi da tek posle $3\Delta t$, tj. posle vremena koncentracije, do izlaznog profila stiže i oticaj usled i_{e1} sa površine a_3 , odnosno sa najudaljenijeg dela sliva. Dakle, to je trenutak kada ceo sliv počinje da učestvuje u oticaju na izlaznom profilu. Ukoliko kiša nastavi da pada i posle isteka vremena koncentracije, u svim narednim vremenskim koracima oticaj se formira sa celog sliva.



Slika 9.13. Metoda izohrona: (a) izohrone, (b) dijagram vreme-površina, (c) hijetogram efektivne kiše na slivu.

Kada kiša traje duže od vremena koncentracije ($t_k > t_c$), opšta formula za proračun oticaja metodom izohrona tada glasi:

$$Q_j = \sum_{l=1}^j i_{e,j-l+1} \cdot a_l, \quad j < N \quad (t < t_c)$$

$$Q_j = \sum_{l=1}^N i_{e,j-l+1} \cdot a_l, \quad N \leq j \leq M \quad (t_c \leq t \leq t_k)$$

$$Q_j = \sum_{l=j-M+1}^N i_{e,j-l+1} \cdot a_l, \quad j > M \quad (t > t_k)$$
(9.18)

gde je N broj vremenskih koraka u vremenu koncentracije ($t_c = N\Delta t$), a M broj vremenskih koraka u trajanju kiše ($t_k = M\Delta t$).

Ukoliko bi kiša trajala kraće od vremena koncentracije, npr. samo dva vremenska koraka ($t_k = 2\Delta t$), tada bi svi intenziteti kiše u tabeli 9.10 osim i_{e1} i i_{e2} bili jednaki nuli, pa se vidi da ni u jednom vremenskom intervalu oticaj ne bi formirale sve tri elementarne površine, tj. ceo sliv. U ovom slučaju, sabirci u gornjim izrazima će postojati ukoliko je intenzitet kiše u datom vremenskom koraku veći od nule, pa opšta formula za ovaj slučaj glasi:

Tabela 9.10. Proračun oticaja na izlaznom profilu po metodi izohrona za sliv sa slike 9.13 čije vreme koncentracije iznosi $t_c = 3\Delta t$.

Vremenski korak	Deo površine sliva			Ukupan protok na izlazu sliva
	a_1	a_2	a_3	
$t_1 = \Delta t$	i_{e1}			$Q_1 = i_{e1} \cdot a_1$
$t_2 = 2\Delta t$	i_{e2}	i_{e1}		$Q_2 = i_{e2} \cdot a_1 + i_{e1} \cdot a_2$
$t_3 = 3\Delta t$	i_{e3}	i_{e2}	i_{e1}	$Q_3 = i_{e3} \cdot a_1 + i_{e2} \cdot a_2 + i_{e1} \cdot a_3$
$t_4 = 4\Delta t$	i_{e4}	i_{e3}	i_{e2}	$Q_4 = i_{e4} \cdot a_1 + i_{e3} \cdot a_2 + i_{e2} \cdot a_3$
$t_5 = 5\Delta t$	i_{e5}	i_{e4}	i_{e3}	$Q_5 = i_{e5} \cdot a_1 + i_{e4} \cdot a_2 + i_{e3} \cdot a_3$
$t_6 = 6\Delta t$	i_{e6}	i_{e5}	i_{e4}	$Q_6 = i_{e6} \cdot a_1 + i_{e5} \cdot a_2 + i_{e4} \cdot a_3$
...				

$$Q_j = \sum_{l=1}^j i_{e,j-l+1} \cdot a_l, \quad j < M \quad (t < t_k)$$

$$Q_j = \sum_{l=j-M+1}^j i_{e,j-l+1} \cdot a_l, \quad M \leq j \leq N \quad (t_k \leq t \leq t_c)$$

$$Q_j = \sum_{l=j-M+1}^N i_{e,j-l+1} \cdot a_l, \quad j > N \quad (t > t_c)$$
(9.19)

9.3.3 Racionalna metoda

Racionalna metoda za određivanje maksimalnih protoka na osnovu izmerenih kiša je jedan od najstarijih modela za vezu između padavina i oticaja, i potiče od irskog inženjera Malvanija (Mulvaney, 1851). Prema racionalnoj metodi, maksimalni protok Q_m usled kiše konstantnog intenziteta je proporcionalan tom intenzitetu kiše:

$$Q_m = \eta i A \quad (9.20)$$

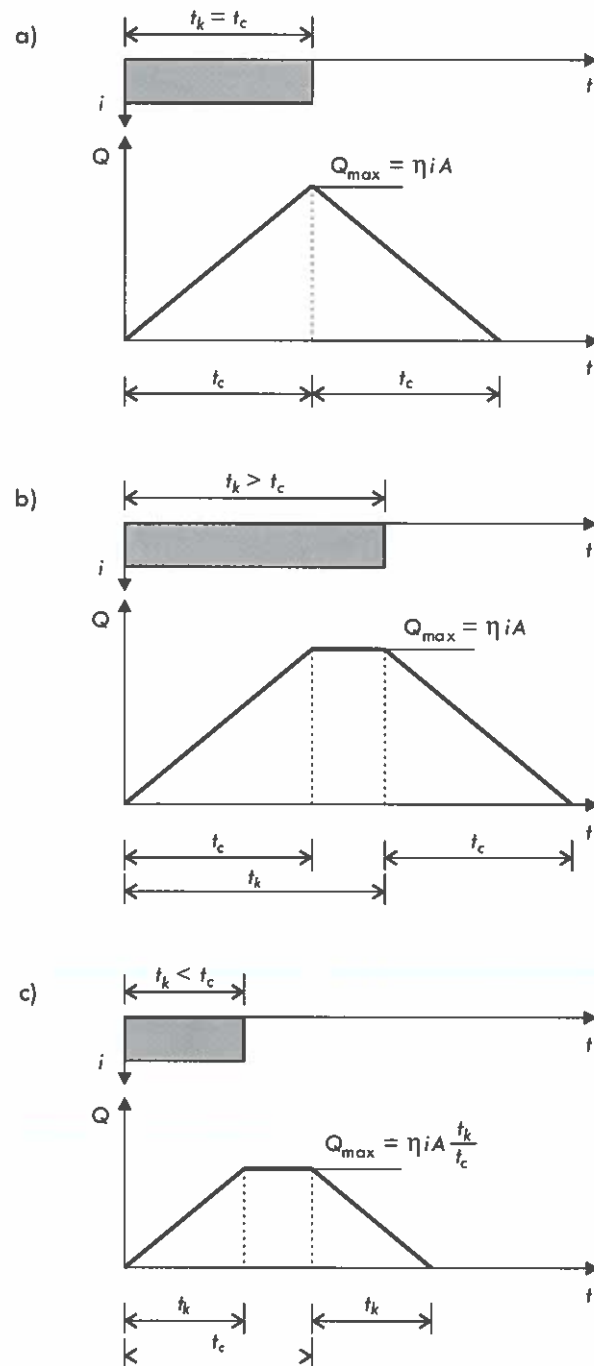
gde je η koeficijent oticaja, i intenzitet kiše trajanja t_c , a A površina sliva. Za intenzitet kiše i se smatra da je ravnomeran po površini sliva. Trajanje t_c je jednako vremenu koncentracije, odnosno vremenu potrebnom da kiša sa najudaljenije tačke sliva dospe do izlaznog profila sliva. Dakle, ceo sliv učestvuje u formiranju oticaja tek posle vremena t_c od početka kiše, kada se dostiže maksimalni protok Q_m .

Protok određen formulom (9.20) predstavlja maksimalnu ordinatu trougaonog hidrograma oticaja prikazanog na slici 9.14-a. Ovaj oblik hidrograma važi za slučaj kada je trajanje kiše jednako vremenu koncentracije ($t_k = t_c$). Ako kiša traje duže od vremena koncentracije ($t_k > t_c$), maksimalni protok se održava sve dok kiša ne prestane (slika 9.14-b). Ukoliko je trajanje kiše kraće od vremena koncentracije ($t_k < t_c$), nema dovoljno vremena da se oformi oticaj sa celog sliva i da se dostigne maksimalni protok prema formuli (9.20). U tom slučaju, maksimalni protok će biti manji od onog prema formuli (9.20) proporcionalno odnosu između trajanja kiše i vremena koncentracije:

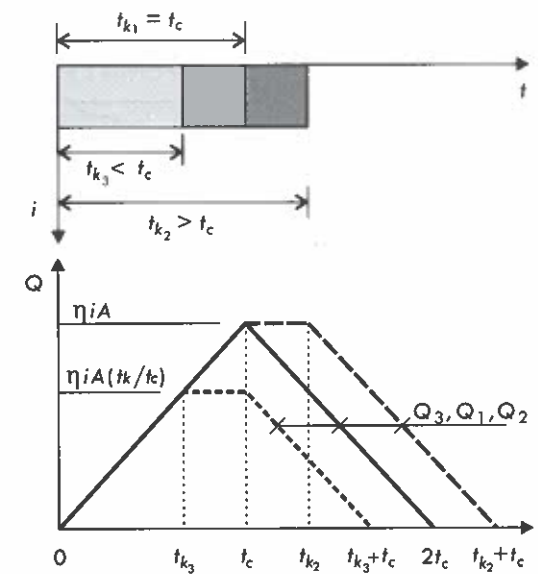
$$Q_m = \eta i A \frac{t_k}{t_c} \quad (9.21)$$

Hidrogram oticaja od kiše trajanja manjeg od vremena koncentracije po racionalnoj metodi prikazan je na slici 9.14-c. Na slici 9.15 uporedno su prikazani hidrogrami oticaja za tri slučaja usled kiša istog intenziteta ali različitog trajanja.

Koeficijent oticaja η , koji u racionalnoj metodi služi da se definiše efektivna kiša u odnosu na palu kišu, zavisi od karakteristika sliva, ali i od karakteristika kiše. On praktično uključuje sve faktore koji utiču na količinu oticaja, tako da je njegovo precizno određivanje moguće samo uz detaljno poznavanje karakteristika sliva. Zbog eventualne pogrešne procene koeficijenta oticaja greška u proceni maksimalnog protoka Q_m može biti velika. Neke preporuke za vrednosti koeficijenta oticaja date su u tabeli 9.11. Za slivne površine koje se sastoje od delova sa različitim pokrivačem, koeficijent oticaja treba odrediti kao ponderisanu srednju vrednost koeficijenata oticaja na pojedinim delovima sliva, odnosno srazmerno njihovom udelu u ukupnoj površini:



Slika 9.14. Hidrogrami oticaja po racionalnoj metodi: (a) trajanje kiše jednako vremenu koncentracije, (b) trajanje kiše duže od vremena koncentracije, (c) trajanje kiše kraće od vremena koncentracije.



Slika 9.15. Uporedni prikaz hidrograma oticaja po racionalnoj metodi za kiše različitog trajanja ali istog intenziteta.

$$\eta_{sr} = \frac{\sum \eta_i A_i}{A} \quad (9.22)$$

gde je η_{sr} težinski osrednjena vrednost koeficijenta oticaja, η_i koeficijent oticaja na delu sliva i , A_i površina dela i i A ukupna slivna površina.

Da bi se maksimalni protok prema racionalnoj metodi u prethodnim formulama dobio u L/s, uobičajeno je da se površina sliva unosi u hektarima (ha), a intenzitet u $Ls^{-1}ha^{-1}$. Ako su ulazne veličine date u drugim jedinicama, potrebno ih je uskladiti (napominje se da je $1 \text{ mm/min} = 167 \text{ Ls}^{-1}ha^{-1}$).

Zbog pretpostavki o ravnomernom intenzitetu kiše u vremenu i po površini sliva, primena racionalne teorije ima opravdanja za određivanje maksimalnih protoka na veoma malim slivnim površinama, odnosno na onim sa kratkim vremenom koncentracije. Takve slivne površine su delovi gradskih površina ili deonice gradskih i vangradskih puteva. Prema McCuenu (1998), racionalnu metodu treba koristiti za slivove manje od 80 ha. Racionalna metoda je standardna metoda za dimenzionisanje kišnih kolektora u gradovima.

Racionalna metoda je specijalan slučaj metode izohrona koji se dobija iz osnovne postavke prikazane u tabeli 9.10 i u formulama (9.18) i (9.19) uz dva pojednostavljenja. Prvo pojednostavljenje je pretpostavka da je kiša ravnomerna tokom svog trajanja tako da su svi intenziteti kiše jednaki i iznose $i_e = \text{const}$. Drugo pojednostavljenje je da su sve elementarne površine između izohrona jednake i iznose $a = A/N$, gde je N ukupan broj površina između izohrona. Ako se ove pretpostavke unesu u izraze u tabeli 9.10, može se videti da se dobijaju vrednosti protoka koje definišu hidrograme prikazane na slici 9.14.

Tabela 9.11. Orijentacione vrednosti koeficijenta oticaja za primenu u racionalnoj metodi (izvor: McCuen, 1998).

Vrsta površine	Koeficijent oticaja*
Komerijalna namena (trgovine, poslovni prostor):	
Centralni delovi naselja	0.70 - 0.95
Delovi grada sa uredenim površinama	0.50 - 0.70
Rezidencijalna namena:	
Individualno stanovanje	0.30 - 0.50
Stambene zgrade, odvojene	0.40 - 0.60
Stambene zgrade, u nizu	0.60 - 0.75
Prigradski stambeni objekti	0.25 - 0.40
Naselja apartmanskog tipa	0.50 - 0.70
Industrijska namena:	
Manji udeo nepropusnih površina	0.50 - 0.80
Veći udeo nepropusnih površina	0.60 - 0.90
Parkovi, groblja	0.10 - 0.25
Železničke stanice sa tucanikom ispod koloseka	0.20 - 0.35
Neuređene prirodne površine	0.10 - 0.30
Kolovoz:	
Asfalt ili beton	0.70 - 0.95
Kamen ili cigla	0.70 - 0.85
Krovovi	0.70 - 0.95
Travnjaci i livade:	
Peskovito zemljište, mali nagib (2%)	0.05 - 0.10
Peskovito zemljište, srednji nagib (2 - 7%)	0.10 - 0.15
Peskovito zemljište, veliki nagib (7%)	0.15 - 0.20
Glinovito zemljište, mali nagib (2%)	0.13 - 0.17
Glinovito zemljište, srednji nagib (2 - 7%)	0.18 - 0.22
Glinovito zemljište, veliki nagib (7%)	0.25 - 0.35

* Za povratne periode duže od 25 do 100 godina može se usvojiti koeficijent oticaja veći za 10-25% (ali ne može biti veći od 1).

Primer 9.3. (Vukmirović i Pavlović, 2005) Slivnik prihvata vodu sa dve saobraćajne površine (videti sliku 9.16). Odrediti hidrograme oticaja sa sliva I, sa sliva II kao i zbirni hidrogram oticaja sa obe površine (dotok u slivnik) usled kiše trajanja 15 minuta ukupne visine 15 mm. Pretpostaviti da je koeficijent oticaja jednak 1.

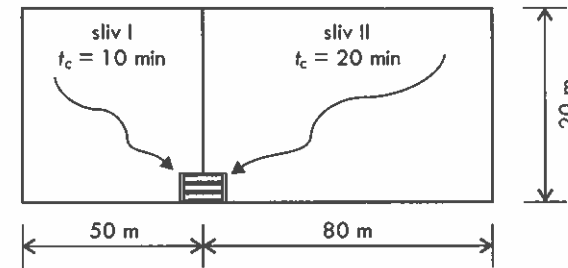
Rešenje. Prosečni intenzitet pale kiše od 15 mm tokom 15 minuta iznosi:

$$i = \frac{P}{t_k} = \frac{15}{15} = 1 \text{ mm/min} = 166.7 \text{ L s}^{-1} \text{ ha}^{-1}$$

Površine dva sliva su jednake:

$$A_I = 50 \cdot 20 = 1000 \text{ m}^2 = 0.1 \text{ ha}$$

$$A_{II} = 80 \cdot 20 = 1600 \text{ m}^2 = 0.16 \text{ ha}$$



Slika 9.16. Skica slivnih površina u primeru 9.3.

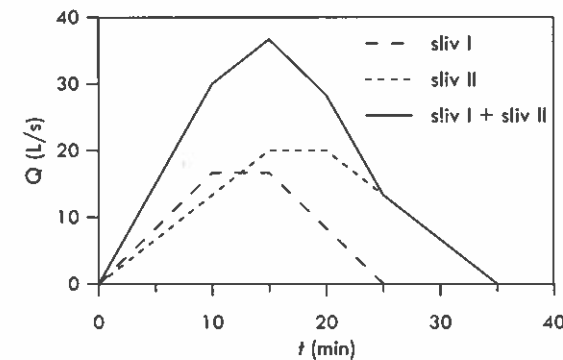
Hidrogram oticaja sa sliva I, čije je vreme koncentracije manje od trajanja kiše, ima oblik trapeza sa vremenom porasta i opadanja jednakom vremenu koncentracije (hidrogram I na slici 9.17) sa maksimalnom ordinatom:

$$Q = \eta \cdot i \cdot A_I = 1 \cdot 166.7 \cdot 0.1 = 16.67 \text{ L/s}$$

Vreme koncentracije sliva II je duže od trajanja kiše, pa hidrogram oticaja ima oblik trapeza sa vremenom porasta i opadanja jednakom trajanju kiše (hidrogram II na slici 9.17) i sa maksimalnom ordinatom:

$$Q = \eta \cdot i \cdot A_{II} \cdot \frac{t_k}{t_{c,II}} = 1 \cdot 166.7 \cdot 0.16 \cdot \frac{15}{20} = 20 \text{ L/s}$$

Zbirni hidrogram sa obe površine dobija se superpozicijom hidrograma oticaja sa površina I i II (na slici 9.17 označen sa I+II). Tabelarni prikaz ordinata ovog hidrograma date su u donjoj tabeli.



Slika 9.17. Hidrogrami oticaja sa slivnih površina u primeru 9.3.

Tabela 9.12. Tabelarni proračun zbirnog hidrograma u primeru 9.3.

t (min)	0	5	10	15	20	25	30	35
Q _I (L/s)	0	8.33	16.67	16.67	8.33	0	0	0
Q _{II} (L/s)	0	6.67	13.33	20	20	13.33	6.67	0
Q _{I+II} (L/s)	0	15	30	36.67	28.33	13.33	6.67	0

9.3.4 Jedinični hidrogram

Koncept jediničnog hidrograma potiče od američkog inženjera L. Šermana (Sherman, 1932) i predstavlja jedan od najzastupljenijih modela kojim se opisuje veza između padavina i oticaja. Ovaj koncept se često koristi zbog svoje jednostavnosti, ali se ponekad kritikuje zbog toga što neke njegove pretpostavke ne mogu biti zadovoljene u potpunosti u prirodnim uslovima. Međutim, kada se podaci za određivanje i primenu jediničnog hidrograma pažljivo izaberu, ovaj model daje veoma prihvatljive rezultate (Chow i sar., 1988; Wanielista i sar., 1997, Shaw i sar., 2011).

Jedinični hidrogram se definiše kao hidrogram direktnog oticaja usled jedinične efektivne kiše (obično 1 mm) koja je ravnomerno raspoređena po površini sliva i konstantnog je intenziteta tokom zadatog trajanja. Zadato trajanje treba da bude dovoljno kratko da se intenzitet kiše može smatrati konstantnim, odnosno da promene intenziteta tokom tog trajanja ne utiču značajno na oblik hidrograma oticaja. U praksi se definiše T -časovni jedinični hidrogram kao hidrogram oticaja od efektivne kiše visine 1 mm tokom T sati. Vreme T se bira prema veličini sliva i vremenu odgovora sliva na značajnije kišne epizode (Shaw i sar., 2011).

Ordinate jediničnog hidrograma $u(t)$ treba shvatiti kao direktni oticaj po jedinici efektivne kiše, tako da one imaju dimenziju protoka po jedinici visine efektivne kiše (najčešće $\text{m}^3\text{s}^{-1}\text{mm}^{-1}$).

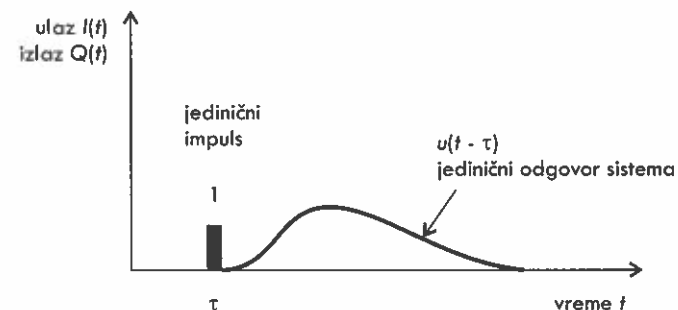
Osnovne pretpostavke i principi. Osnovne pretpostavke vezane za koncept jediničnog hidrograma o kojima treba voditi računa pri primeni jediničnog hidrograma su sledeće:

- 1) Jedinični hidrogram za dati sliv je nepromenljiv, odnosno za istu kišu nekog trajanja uvek daje isti odgovor sliva.
- 2) Intenzitet efektivne kiše je konstantan tokom trajanja kiše.
- 3) Efektivna kiša je ravnomerno raspoređena po površini sliva.

Za jedno trajanje kiše, jedinični hidrogram ima jedinstven oblik, odnosno uvek ima istu bazu, isto vreme podizanja i opadanja i iste ordinate bez obzira na druge uslove na slivu, kao što je stanje vlažnosti ili vegetacije pre razmatrane epizode. Zbog toga se kaže da je jedinični hidrogram jedinstven za dati sliv i nepromenljiv u vremenu.

Teorija jediničnog hidrograma potiče iz teorije linearnih sistema (Dooge, 1973). Ako se sliv posmatra kao linearan i nepromenljiv sistem, jedinični hidrogram se može shvatiti kao odgovor linearnog sistema na jedinični impuls (slika 9.18). Jedinični impuls je efektivna kiša kratkog trajanja, takva da proizvod njenog intenziteta i i trajanja Δt daje jediničnu visinu efektivne kiše ($i \Delta t = 1 \text{ mm}$). Iz ovog razmatranja se vidi da interval Δt treba da bude dovoljno mali kako bi pretpostavka o konstantnom intenzitetu kiše bila realna.

Ravnomernost kiše po prostoru može se očekivati za male ili srednje slivove (do par stotina km^2) pri značajnijim kišnim epizodama. Na većim slivovima kiše su po pravilu promenljive po površini sliva; međutim, izlazni hidrogram sa velikog sliva je integralni odgovor sliva kao celine i predstavlja zbirni, odnosno prosečni efekat parcijalnih delova sliva. U tom smislu pretpostavka o prostornoj ravnomernosti nije tako striktna kao što deluje na prvi pogled. Efekat prostorne neravnomernosti kiše se može smanjiti podelom sliva na podslivove (ako su podaci raspoloživi), ili određivanjem više jediničnih hidrograma za različite prostorne rasporede kiše po slivu.



Slika 9.18. Jedinični hidrogram kao odgovor linearnog sistema na jedinični impuls, odnosno na jediničnu efektivnu kišu.

Da bi se dobio odgovor sistema, tj. hidrogram direktnog oticaja od neke zadate visine efektivne kiše, smatra se da važi *princip proporcionalnosti* za linearne sisteme (slika 9.19). To znači da se ordinate hidrograma direktnog oticaja $Q_d(t)$ usled efektivne kiše visine P_e dobijaju se množenjem ordinata jediničnog hidrograma $u(t)$ sa tom visinom efektivne kiše:

$$Q_d(t) = u(t) \cdot P_e \quad (9.23)$$

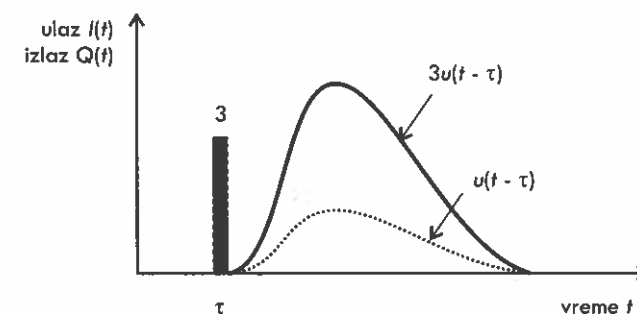
Iz principa proporcionalnosti sledi važna osobina jediničnog hidrograma da je površina ispod njega jednaka zapremini direktnog oticaja po 1 mm efektivne kiše, što je jednako površini sliva A . Drugim rečima, kako je zapremina direktnog oticaja jednaka:

$$\int Q_d(t) dt = V_d = P_e A \quad (9.24)$$

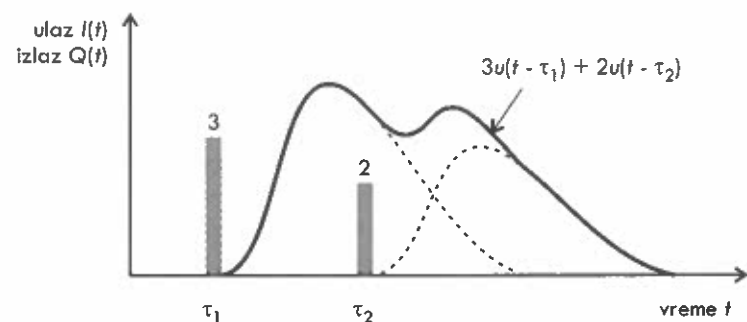
tada iz izraza (9.23) i (9.24) sledi:

$$\int u(t) dt = A \quad (9.25)$$

Pored principa proporcionalnosti, koristi se i *princip superpozicije* kada treba odrediti hidrogram direktnog oticaja od kiše neravnomernog intenziteta, tj. kada treba odrediti složeni odgovor sistema na više impulsa (slika 9.20). Ovaj princip podrazu-



Slika 9.19. Princip proporcionalnosti: odgovor sistema na trostruki impuls jednak je trostrukom jediničnom odgovoru sistema (drugim rečima, trostruko veća efektivna kiša daje trostruko veće ordinate hidrograma direktnog oticaja).



Slika 9.20. Kombinovanje principa proporcionalnosti i superpozicije za određivanje odgovora sistema na složeni ulaz (hidrogrami usled dve kiše se najpre proporcionalno povećavaju, a zatim sabiraju).

meva da se hidrogram direktnog oticaja usled dve kiše može dobiti sabiranjem elementarnih hidrograma kao odgovora na pojedinačne kiše, pri čemu se vodi računa o vremenu između dve kiše. U primeru na slici 9.20 prva kiša se javila u trenutku τ_1 , a druga u trenutku τ_2 . Odgovor sliva na drugi impuls tada kasni za prvim odgovorom za vreme $(\tau_2 - \tau_1)$. Zbog toga se ukupni odgovor sliva pre pojave drugog impulsa sastoji samo od prvog hidrograma, a posle pojave drugog impulsa od zbira dva hidrograma. Pri sabiranju se vodi računa i o visinama efektivne kiše svakog impulsa, pa je svaki elementarni hidrogram proporcionalan odgovarajućoj visini efektivne kiše.

Princip superpozicije važi za bilo koji broj blokova efektivne kiše, čime se dobija mogućnost proračuna hidrograma direktnog oticaja usled vremenski neravnomerne kiše. Odgovor $Q(t)$ linearnog sistema na složeni ulaz $I(t)$ matematički se opisuje *integralom konvolucije*:

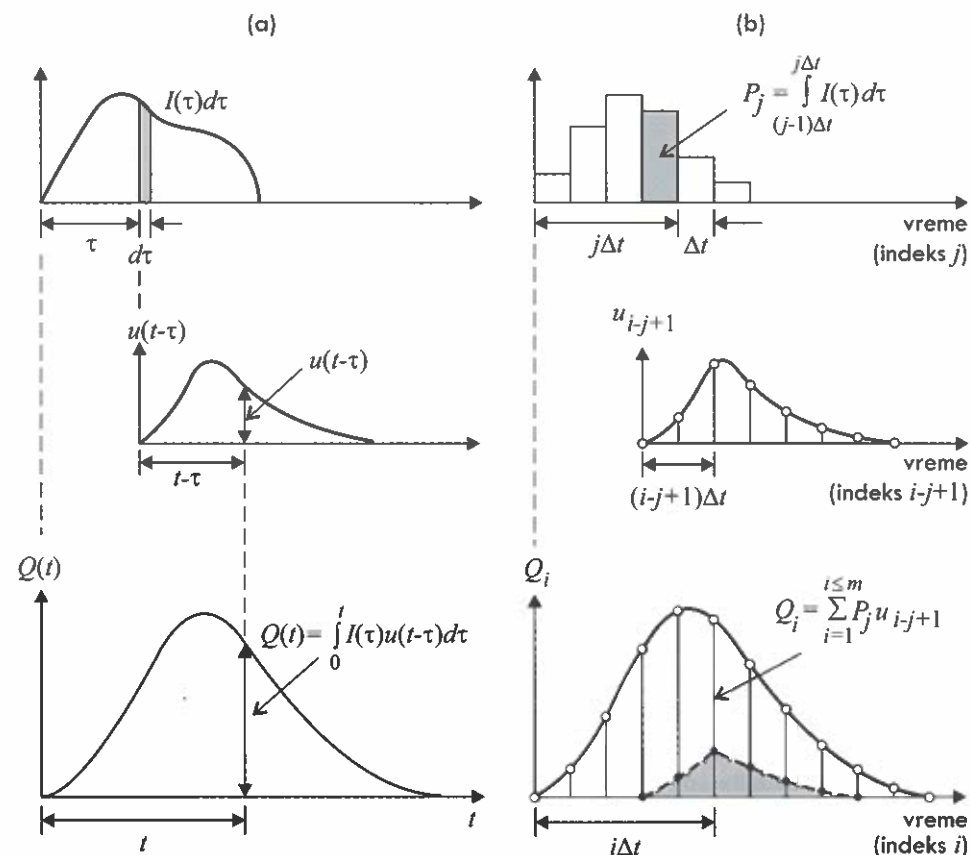
$$Q(t) = \int_0^t I(\tau)u(t - \tau)d\tau \quad (9.26)$$

gde je $u(t - \tau)$ jedinični odgovor sistema na ulaz u trenutku τ . U praktičnim proračunima koristi se *zbir konvolucije* u diskretnom vremenskom domenu. Ako se raspolože T -časovnim jediničnim hidrogramom i ako se kao ulaz posmatra kiša diskretizovana u vremenskim intervalima dužine T ukupnog trajanja mT , tada zbir konvolucije glasi:

$$Q_i = \sum_{j=1}^{i \leq m} P_j u_{i-j+1} \quad i=1, 2, \dots \quad (9.27)$$

gde su P_j visine efektivne kiše u intervalima vremena j , u_{i-j+1} ordinate jediničnog hidrograma, a Q_i ordinate hidrograma direktnog oticaja. Slika 9.21 ilustruje konvoluciju u kontinualnom i diskretnom vremenu.

Određivanje (identifikacija) jediničnog hidrograma. Jedinični hidrogram za neki sliv može se odrediti na osnovu osmotrenih kišnih epizoda i odgovarajućih hidrograma oticaja, pri čemu kišne epizode treba izabrati vodeći računa o pretpostavkama o ravnomernosti kiše po slivu koliko god je to moguće. Jednostavniji način za definisanje jediničnog hidrograma jeste da se izaberu osmotreni talasi prostijeg oblika od izolovanih kišnih epizoda relativno ravnomernog intenziteta u vremenu. Postupak odre-



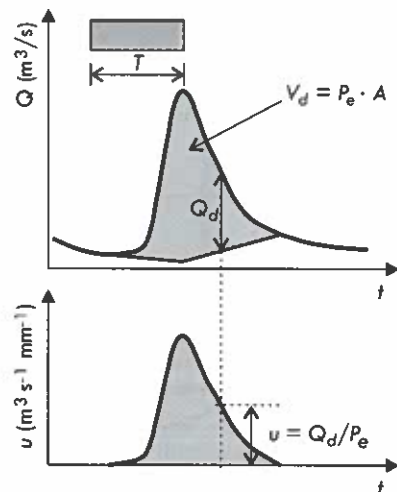
Slika 9.21. Jedinični hidrogram kao model linearnog sistema: princip superpozicije prikazan kroz konvoluciju u (a) kontinualnom i (b) diskretnom vremenu (prema Chow i sar, 1988).

đivanja T -časovnog jediničnog hidrograma tada se sastoji od sledećih koraka (slika 9.22):

1. Na osmotrenom hidrogramu usled epizode trajanja T časova odvojiti bazni i direktni oticaj jer se za konstrukciju jediničnog hidrograma koristi samo hidrogram direktnog oticaja.
2. Odrediti zapreminu direktnog oticaja V_d i odgovarajuću visinu efektivne kiše $P_e = V_d/A$, gde je A površina sliva.
3. Odrediti ordinate $u(t)$ jediničnog hidrograma deljenjem ordinata hidrograma direktnog oticaja $Q_d(t)$ sa visinom efektivne kiše za razmatranu epizodu P_e :

$$u(t) = \frac{Q_d(t)}{P_e} \quad (9.28)$$

Drugi način za određivanje T -časovnog jediničnog hidrograma jeste da se sistem jednačina (9.27) reši numerički po nepoznatim ordinatama u . Takav sistem linearnih jednačina je po pravilu preodređen (ima više jednačina u odnosu na broj promenlji-



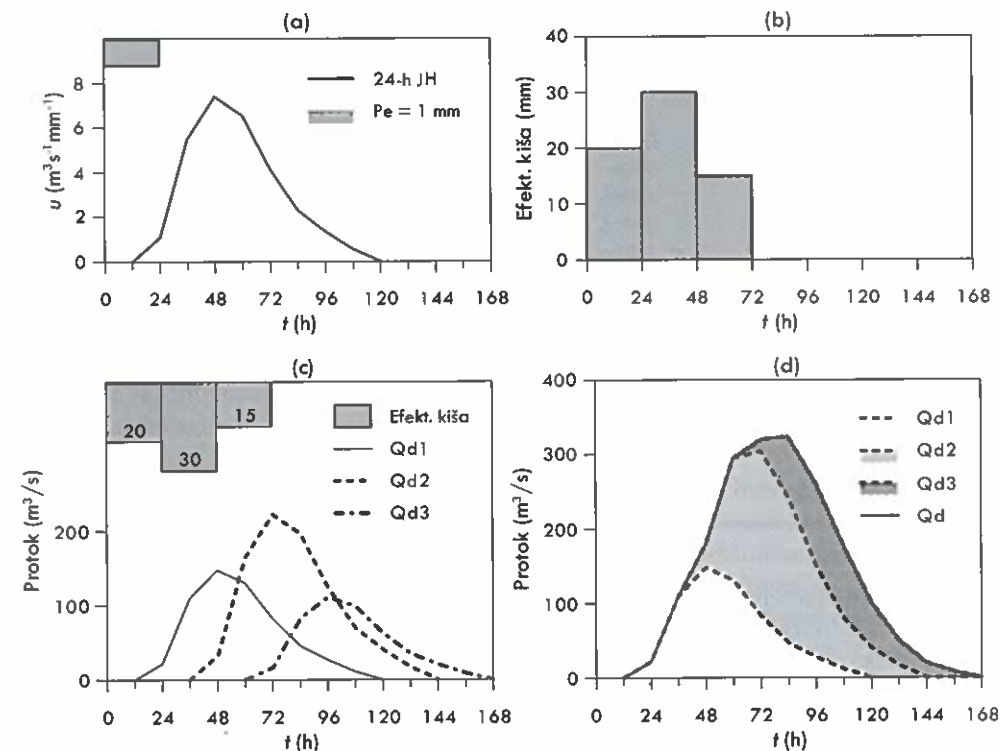
Slika 9.22. Identifikacija T -časovnog jediničnog hidrograma iz osmotrenog talasa izolovane kišne epizode trajanja T časova.

vih), tako da se za njihovo rešavanje primenjuju regresione metode i metode optimizacije (Chow i sar., 1988). Jedinični hidrogram dobijen na ovaj način obično ima negativne ordinate i oscilacije oko očekivanog oblika, pa ga je potrebno izgladiti uz poštovanje uslova da površina ispod jediničnog hidrograma treba da bude jednaka površini sliva. Izgladivanje se može raditi ručno ili korišćenjem funkcije u obliku gustine gama raspodele (videti odeljak 7.3.5). Konačni jedinični hidrogram se dobija osrednjavanjem rezultata iz pojedinih epizoda. Ovaj postupak je relativno složen, ali ako se podaci pažljivo odaberu, jedinični hidrogram kao model može dati veoma prihvatljive rezultate.

Primena jediničnog hidrograma. U primeni jediničnog hidrograma rukovodimo se principima proporcionalnosti i superpozicije. Osnovna primena T -časovnog jediničnog hidrograma sastoji se od određivanja hidrograma direktnog oticaja usled kiše trajanja T časova i visine P_e , prema izrazu (9.23). Princip superpozicije omogućava da se T -časovni jedinični hidrogram koristi i za proračun hidrograma direktnog oticaja za kiše čije je trajanje jednako umnošku od T časova, tj. mT . Tada se kiša podeli na m blokova i za svaki blok trajanja T odredi se elementarni hidrogram direktnog oticaja. Pri tome se vodi računa o vremenskom pozicioniranju elementarnih hidrograma u odnosu na odgovarajuće blokove kiše. Ukupni hidrogram od cele kiše dobija se sabiranjem m elementarnih hidrograma od svakog bloka kiše.

Primer 9.4. Za jedan sliv određen je 24-časovni jedinični hidrogram čije su ordinate date u drugoj koloni tabele 9.13. Potrebno je odrediti hidrogram direktnog oticaja usled kišne epizode trajanja 72 sata, ako se zna da je u prvih 24 sata efektivna kiša iznosila 20 mm, u drugih 30 mm, a u trećih 15 mm.

Rešenje. S obzirom da se raspolaze 24-časovnim jediničnim hidrogramom, razmatrana kišna epizoda se deli na tri bloka od 24 sata za koje se računaju elementarni



Slika 9.23. Primer superpozicije složenog hidrograma direktnog oticaja pomoću 24-časovnog jediničnog hidrograma (gore levo) usled kišne epizode trajanja 72 sata sa različitim efektivnim kišama u blokovima od po 24 sata (gore desno). Elementarni hidrogrami za svaki blok kiše (dole levo) se sabiraju kako bi se dobio složeni hidrogram (dole desno).

hidrogrami direktnog oticaja. Ovo je prikazano u tabeli 9.13 i na slici 9.23. Slika 9.23-a prikazuje 24-časovni jedinični hidrogram, gde se može primetiti da direktan oticaj počinje 12 h nakon početka kiše koja traje od 0 do 24 h, i završava se 120 h od početka kiše. Slika 9.23-b prikazuje razmatranu kišnu epizodu trajanja 72 h.

Hidrogram oticaja od prvog bloka razmatrane kiše dobija se množenjem ordinate jediničnog hidrograma sa 20 mm, koliko iznosi efektivna kiša u prvom bloku:

$$Q_{d1}(t) = P_{e1} \cdot u(t) \quad (9.29)$$

Ovaj hidrogram je sračunat u trećoj koloni tabele 9.13 i prikazan na slici 9.23-c kao Q_{d1} . Hidrogram oticaja od drugog bloka kiše sračunat je u četvrtoj koloni tabele 9.13 tako što su ordinate jediničnog hidrograma pomnožene sa 30 mm efektivne kiše iz ovog bloka. Pri tome se vodilo računa da ovaj blok kiše počinje u 24 h i traje do 48 h, pa se jedinični hidrogram translira za 24 h:

$$Q_{d2}(t) = P_{e2} \cdot u(t - 24) \quad (9.30)$$

Tabela 9.13. Proračun složenog hidrograma oticaja pomoću jediničnog hidrograma u primeru 9.4.

t (h)	u ($m^3s^{-1}mm^{-1}$)	Q_{d1} (m^3/s)	Q_{d2} (m^3/s)	Q_{d3} (m^3/s)	Q_d (m^3/s)
0					
12	0	0			0
24	1.08	21.6			21.6
36	5.48	109.6	0		109.6
48	7.38	147.6	32.4		180.0
60	6.53	130.6	164.4	0	295.0
72	4.12	82.4	221.4	16.2	320.0
84	2.29	45.8	195.9	82.2	323.9
96	1.33	26.6	123.6	110.7	260.9
108	0.54	10.8	68.7	97.95	177.45
120	0	0	39.9	61.8	101.7
132			16.2	34.35	50.55
144			0	19.95	19.95
156				8.1	8.1
168				0	0

Na taj način elementarni hidrogram od drugog bloka kiše kasni 24 h u odnosu na elementarni hidrogram od prvog bloka kiše, kao što se vidi na slici 9.23-c gde je ovaj hidrogram označen kao Q_{d2} . Na sličan način, elementarni hidrogram direktnog oticaja usled trećeg bloka kiše dobija se množenjem jediničnog hidrograma sa visinom efektivne kiše od 15 mm uz translaciju jediničnog hidrograma za 48 h:

$$Q_{d3}(t) = P_{e2} \cdot u(t - 48) \quad (9.31)$$

Tako treći elementarni hidrogram kasni 24 h za drugim hidrogramom i 48 h za prvim hidrogramom. Ovaj hidrogram je sračunat u petoj koloni tabele 9.13 i prikazan na slici 9.23-c kao Q_{d3} .

Ukupan složeni hidrogram direktnog oticaja usled cele kišne epizode dobija se superpozicijom elementarnih hidrograma, pri čemu se sabiraju ordinate tri elementarna hidrograma u svakom vremenskom trenutku (šesta kolona tabele 9.13):

$$Q_d(t) = Q_{d1}(t) + Q_{d2}(t) + Q_{d3}(t) \quad (9.32)$$

Gornji izraz može da se napiše za pojedine vremenske korake u razvijenom obliku. Na primer:

$$Q_d(24) = P_{e1} \cdot u(24) = 20 \cdot 1.08 = 21.6 \text{ m}^3/\text{s} \quad (9.33)$$

$$Q_d(48) = P_{e1} \cdot u(48) + P_{e2} \cdot u(24) = 20 \cdot 7.38 + 30 \cdot 1.08 = 147.6 + 32.4 = 180 \text{ m}^3/\text{s} \quad (9.34)$$

$$Q_d(72) = P_{e1} \cdot u(72) + P_{e2} \cdot u(48) + P_{e3} \cdot u(24) = 20 \cdot 4.12 + 30 \cdot 7.38 + 15 \cdot 1.08 = 82.4 + 221.4 + 16.2 = 320 \text{ m}^3/\text{s} \quad (9.35)$$

Tri poslednja izraza predstavljaju zbir konvolucije iz izraza (9.27) za vremenske trenutke od 24, 48 i 72 h. Na slici 9.23-d dat je složeni hidrogram oticaja sa elementarnim hidrogramima naslaganim jedan preko drugog kako bi se shematski prikazala diskretna konvolucija koja je ovde primenjena.

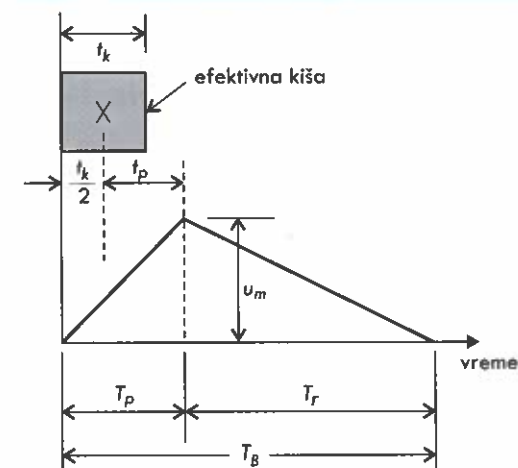
9.3.5 Sintetički jedinični hidrogrami

Jedinični hidrogram se može konstruisati samo za slivove na kojima postoje osmatranja kiše i protoka na izlaznom profilu sliva, odnosno samo za izučene slivove. Na neizučeni slivovima se koriste *sintetički jedinični hidrogrami*. Njihova konstrukcija se zasniva na transpoziciji podataka sa izučeni slivova, pod čim se podrazumeva konstrukcija bezdimenzionalnih jediničnih hidrograma za hidrološki homogen region i uspostavljanje regionalnih veza između karakteristika hidrograma i fizičkih karakteristika sliva.

Konstrukcija regionalnih bezdimenzionalnih jediničnih hidrograma je moguća ako su na raspolaganju jedinični hidrogrami sa više srodnih slivova koji se mogu predstaviti u bezdimenzionalnom obliku. Najčešće se ordinate bezdimenzionalnog jediničnog hidrograma $u(t)$ predstavljaju u odnosu na maksimalnu ordinatu u_m tj. kao u/u_m , a vreme t na apscisi u odnosu na vreme porasta T_p , tj. kao t/T_p . Osrednjavanjem više bezdimenzionalnih jediničnih hidrograma može se konstruisati regionalni jedinični hidrogram.

Za primenu regionalnih hidrograma na neizučenom slivu potrebno je proceniti vreme porasta i maksimalnu ordinatu za razmatrani neizučeni sliv. Te procene se najčešće sprovode pomoću regionalnih zavisnosti između elemenata hidrograma, kao što su vreme porasta T_p , vreme opadanja T_r i maksimalna ordinata u_m , i fizičkih karakteristika slivova, kao što su površina sliva, dužina toka, nagib sliva i druge.

Na slici 9.24 prikazani su karakteristični elementi jediničnog hidrograma koje je potrebno odrediti da bi se on definisao i koji su pominjani i u odeljku 6.5.2: vreme po-

Slika 9.24. Elementi sintetičkog jediničnog hidrograma trougaonog oblika za trajanje kiše t_k .

rasta T_p , vreme opadanja T_r , ukupna baza hidrograma $T_B = T_p + T_r$ i maksimalna ordinata u_m . Kada je od interesa samo maksimalni protok velike vode, oblik hidrograma oticaja nije od primarnog značaja pa se jedinični hidrogram može aproksimirati trouglom kao na slici 9.24. Ako je od značaja da oblik hidrograma bude što realniji, krivolinijski oblik se može konstruisati poštujući karakteristična vremena i površinu sliva kao površinu ispod jediničnog hidrograma.

Pored nabrojanih elemenata, za konstrukciju sintetičkog jediničnog hidrograma koristi se i veličina *vreme kašnjenja* t_p koje se definiše kao vreme između težišta hijetograma i pojave maksimalne ordinate hidrograma (videti sliku 9.24). Pri određivanju ovih elemenata vodi se računa i o uslovu da je površina ispod jediničnog hidrograma jednaka površini sliva. Za sintetički jedinični hidrogram trougaonog oblika važi:

$$\frac{1}{2} u_m T_B = A \quad (9.36)$$

gde je A površina sliva. Ova jednakost pokazuje da je za definisanje sintetičkog jediničnog hidrograma dovoljno odrediti u_m ili T_B , dok se druga veličina računa iz date jednakosti.

Literatura obiluje različitim regionalnim vezama i bezdimenzionalnim jediničnim hidrogramima, tako da u praksi treba biti veoma obazriv u primeni takvih „gotovih“ rešenja. Ove regionalne zavisnosti mogu biti razvijene za neko područje koje je po reljefu i klimi potpuno različito od razmatranog sliva, dok se s druge strane postavlja pitanje u kom stepenu se ove veze prilagođavaju opaženim podacima (autori ovih veza retko crtaju eksperimentalne tačke na dijagramima, a još ređe govore o koeficijentu korelacije sa kojim su odredili neku od ovih zavisnosti).

Sintetički jedinični hidrogram po SCS metodi. Američka agencija SCS (danas NRCS) je razvila bezdimenzionalni jedinični hidrogram prikazan na slici 9.25, kod koga se vreme izražava u odnosu na vreme porasta hidrograma T_p , a ordinate u odnosu na maksimalnu ordinatu jediničnog hidrograma u_m . Krivolinijski dijagram sa slike 9.25-a najčešće se zamenjuje trougaonim hidrogramom na slici 9.25-b. Da bi se ovakav hidrogram primenio za neki neizučeni sliv, potrebno je odrediti vreme porasta T_p , dok se maksimalna ordinata u_m određuje iz uslova da površina ispod jediničnog hidrograma bude jednaka površini sliva A (jednakost 9.36).

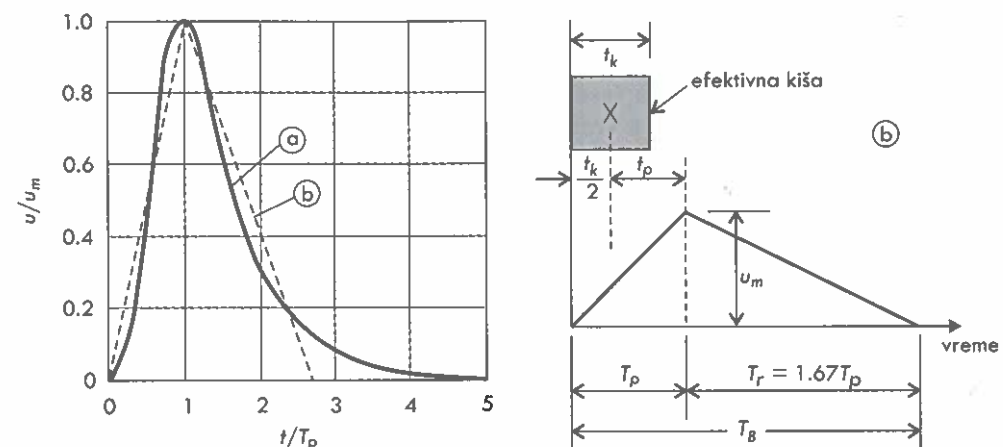
Na osnovu analize podataka sa velikog broja manjih ruralnih slivova, vreme opadanja T_r trougaonog SCS hidrograma iznosi:

$$T_r = 1.67 T_p \quad (9.37)$$

tako da je ukupna baza hidrograma $T_B = 2.67 T_p$. S obzirom da površina ispod trougla treba da bude jednaka površini sliva A , iz jednakosti (9.36) sledi da je maksimalna ordinata jediničnog hidrograma:

$$u_m = \frac{2A}{T_B} = 0.75 \frac{A}{T_p} \quad (9.38)$$

Vreme porasta T_p zavisi od trajanja kiše t_k i vremena kašnjenja t_p :



Slika 9.25. Sintetički jedinični hidrogram po SCS: (a) krivolinijski jedinični hidrogram i (b) aproksimacija trouglom.

$$T_p = t_p + \frac{t_k}{2} \quad (9.39)$$

Na osnovu podataka sa eksperimentalnih slivova, SCS daje sledeću empirijsku relaciju sa fizičkim karakteristikama sliva za procenu vremena kašnjenja t_p :

$$t_p = 0.00814 L^{0.8} J^{-0.5} (1000 / CN - 9) \quad (9.40)$$

gde je L hidraulički najduži put tečenja na slivu (m), CN broj krive za dati sliv, J prosečan nagib sliva (m/m), dok se t_p dobija u minutima. Alternativno, SCS predlaže da se vreme kašnjenja t_p odredi na osnovu vremena koncentracije sliva t_c kao:

$$t_p \approx 0.6 t_c \quad (9.41)$$

dok se vreme koncentracije t_c može proceniti kao ukupno vreme putovanja vode po padinama i u vodotoku („metoda brzina“ u tabeli 9.16).

Sintetički jedinični hidrogram po Jovanović i Brajkoviću. Jovanović i Brajković i (Jovanović, 1989) su predložili modifikaciju sintetičkog hidrograma u obliku trougla prema SCS zbog veće fleksibilnosti u primeni na različite slivove. Modifikacija se sastoji iz nekoliko elemenata. Prvo, vreme opadanja hidrograma T_r nije fiksirano kao u izrazu (9.37), već se definiše biranjem koeficijenta proporcionalnosti r sa vremenom porasta hidrograma:

$$T_r = r T_p \quad (9.42)$$

Preporuke za vrednost ovog koeficijenta date su u tabeli 9.14, dok je na slici 9.26 prikazana zavisnost ovog koeficijenta od veličine sliva koju je dao Jovanović (1989) na osnovu podataka sa sliva Velike Morave.

Druga modifikacija se odnosi na vreme kašnjenja sliva t_p , koje određuje vreme porasta hidrograma kroz formulu (9.39). Brajković i Jovanović smatraju da vreme kašnjenja nije konstantno za sliv, već da zavisi od trajanja kiše:

$$t_p = at_k + t_0 \quad (9.43)$$

gde su sva vremena izražena u časovima. Koeficijent a u ovoj formuli određuje deo trajanja kiše koji je obuhvaćen u vremenu kašnjenja. Smatra se da koeficijent a zavisi od površine sliva (slika 9.27), ali se za slivove manje od 30 km² može usvojiti $a = 0.3$. Vreme t_0 u gornjoj formuli se može shvatiti kao vreme kašnjenja trenutnog jediničnog hidrograma (tj. jediničnog hidrograma za $t_k \rightarrow 0$), pa se može smatrati da ono zavisi samo od fizičkih karakteristika sliva. Jovanović i sar. (1979) su predložili sledeći empirijski izraz na osnovu eksperimentalnih podataka:

$$t_0 = 0.4 L^{0.67} \left(\frac{LL_c}{\sqrt{I_u}} \right)^{0.086} \quad (9.44)$$

gde je L dužina glavnog toka u km, L_c rastojanje od težišta do izlaznog profila sliva u km i I_u uravnati nagib toka u procentima, dok se t_0 dobija u časovima. Kasnije je Brajković (1994) ponovo razmatrao vrednost t_0 i predložio izraz koji generalno daje manje vrednosti za t_0 :

$$t_0 = 1.06 \left(\frac{L}{I_u} \right)^{0.47} \quad (9.45)$$

Za područje Srbije, Ristić (2000) je razvio izraze za vreme kašnjenja i vreme opadanja hidrograma na osnovu analize hidrograma sa 93 hidrološke stanice na slivovima do oko 1300 km², u obliku:

$$t_p = 0.751 \left(\frac{LL_c}{\sqrt{I_u}} \right)^{0.336} \quad (9.46)$$

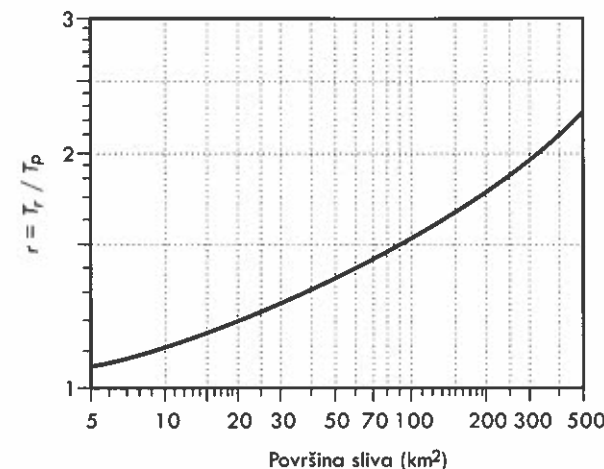
i

$$T_r = 1.145 \cdot A^{0.446} \quad (9.47)$$

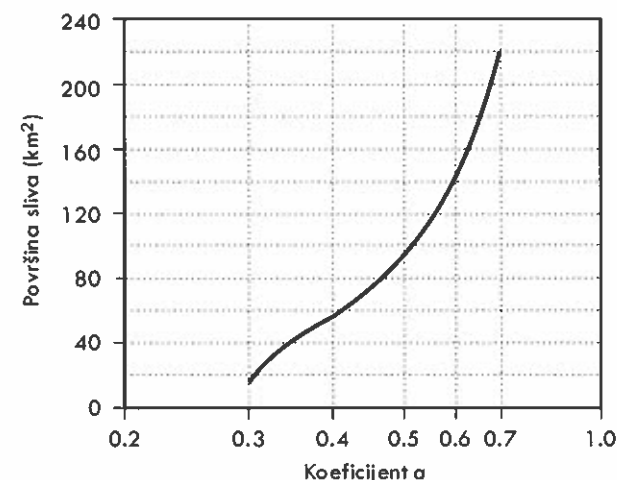
gde se L i L_c unose u km, I_u u procentima, površina sliva A u km², dok se t_p i T_r dobijaju u časovima (Ristić i Malošević, 2011).

Tabela 9.14. Preporuke za vrednosti koeficijenta r tj. odnosa vremena opadanja i porasta hidrograma (izvor: Wanielista, 1997).

Vrsta površine / metoda	Koeficijent r
Racionalna metoda	1
Urbano, veliki nagib	1.25
SCS	1.67
Urbano/ruralno	2.25
Ruralno, brdovito	3.33
Ruralno, blagi nagib	5.5
Ruralno, ravno	12.0



Slika 9.26. Zavisnost koeficijenta r u formuli (9.42) od površine sliva za sliv Velike Morave; prema Jovanoviću (1989).



Slika 9.27. Zavisnost parametra a u formuli (9.43) od površine sliva (prema Jovanoviću i sar., 1979).

Primer 9.5. Na jednom malom brdskom slivu površine $A = 3.6$ km² planira se izgradnja akumulacije za prihvatanje velikih voda i zaštitu nizvodnog urbanizovanog dela od poplava. Za potrebe proračuna merodavnog hidrograma velikih voda do profila akumulacije određena je dužina glavnog toka od $L = 2$ km, dužina glavnog toka od težišta sliva od $L_c = 1.05$ km i uravnati nagib sliva od $I_u = 1.7\%$. Prema geološkom sastavu tla i nameni površina na slivu, procenjen je prosečan broj krive prema SCS od $CN = 64$. Odrediti sintetičke jedinične hidrograme po metodi Brajkovića i Jovanovića za trajanje kiše od 45, 60 i 90 minuta. Ako stogodišnje kiše ovih trajanja na razmatranoj lokaciji iznose 58.6, 63.9 i 69.2 mm, odrediti i merodavni računski hidrogram velikih voda primenjujući SCS metodu kao model efektivne kiše uz pretpostavku o velikoj prethodnoj vlažnosti sliva.

Rešenje. Za definisanje traženih jediničnih hidrograma, prema obrascu (9.44) i sa raspoloživim podacima najpre se računa vreme t_0 od koga zavisi vreme kašnjenja sliva:

$$t_0 = 0.4 L^{0.67} \left(\frac{LL_c}{\sqrt{I_u}} \right)^{0.086} = 0.4 \cdot 2^{0.67} \left(\frac{2 \cdot 1.05}{\sqrt{1.7}} \right)^{0.086} = 0.663 \text{ h} \approx 40 \text{ min} \quad (9.48)$$

Za sliv ovako male površine usvaja se da koeficijent a iznosi 0.3, dok se za vrednost koeficijenta r usvaja 1.67 kao kod SCS sintetičkog jediničnog hidrograma. Sa tim pretpostavkama, vreme kašnjenja t_p , vreme porasta T_p i vreme opadanja T_r računaju se prema izrazima:

$$\begin{aligned} t_p &= at_k + t_0 = 0.3t_k + 40 \quad (\text{min}) \\ T_p &= t_p + t_k / 2 \\ T_r &= rT_p = 1.67T_p \end{aligned} \quad (9.49)$$

dok se maksimalna ordinata u_m sintetičkih jediničnih hidrograma određuje iz uslova da je površina ispod njih jednaka površini sliva:

$$\frac{1}{2}(T_p + T_r)u_m = A \rightarrow u_m = \frac{2A}{T_p + T_r} \quad (9.50)$$

Proračun elemenata sintetičkih jediničnih hidrograma za tri razmatrana trajanja kiše prikazan je u tabeli 9.15, a njihovi oblici su grafički predstavljeni na slici 9.28 levo.

Proračun efektivne kiše prema SCS metodi prvo zahteva da se odredi CN za vlažne prethodne uslove prema formuli (9.17):

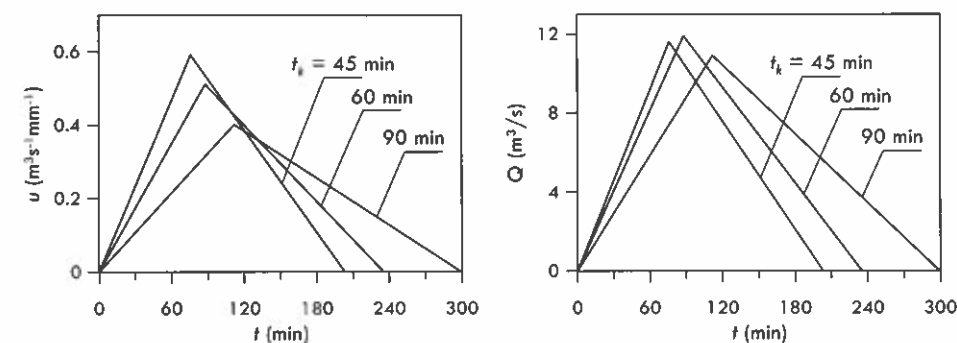
$$CN_{III} = \frac{23CN_{II}}{10 + 0.13CN_{II}} = \frac{23 \cdot 64}{10 + 0.13 \cdot 64} = 80.4 \quad (9.51)$$

Sa ovakvim CN, retenzioni kapacitet zemljišta iznosi:

$$d = 25.4 \left(\frac{1000}{CN} - 10 \right) = 25.4 \left(\frac{1000}{80.4} - 10 \right) = 62.1 \text{ mm} \quad (9.52)$$

Tabela 9.15. Proračun elemenata sintetičkog jediničnog hidrograma u primeru 9.5.

	Trajanje kiše (min)		
	45	60	90
t_p (min)	53.5	58	67
T_p (min)	76	88	112
T_r (min)	127	147	187
u_m ($\text{m}^3 \text{s}^{-1} \text{mm}^{-1}$)	203	235	299
t_p (min)	0.591	0.511	0.401
P_e (mm)	58.6	63.9	69.2
P_e (mm)	19.7	23.3	27.1
Q_m (m^3/s)	11.6	11.9	10.9



Slika 9.28. Sintetički jedinični hidrogrami (levo) i računskih hidrograma velikih voda (desno) za tri trajanja kiše u primeru 9.5.

Sračunate vrednosti efektivne kiše pod ovim uslovima prikazane su u pretposlednjem redu tabele 9.15, dok su u poslednjem redu određene maksimalne ordinatne računskih hidrograma dobijene kao $Q_m = u_m P_e$. Oblici računskih hidrograma velikih voda prikazani na slici 9.28 desno. S obzirom da hidrogram usled 1-časovne kiše ima najveću maksimalnu ordinatu, on predstavlja merodavni računski hidrogram na ulazu u planiranu akumulaciju.

9.3.6 Procena vremena koncentracije

U potpoglavlju 9.3.1 vreme koncentracije je definisano kao najduže vreme putovanja vode od hidraulički najudaljenije tačke do izlaznog profila sliva. Bez detaljnog poznavanja puteva vode, vreme koncentracije se može jedino proceniti na osnovu mnogobrojnih različitih obrazaca predloženih u literaturi. Ti obrasci mogu dati veoma različite rezultate, pa je potrebno obratiti pažnju kojoj vrsti tečenja vode su namenjeni. Najpoznatiji obrasci za vreme koncentracije dati su u tabeli 9.16.

Za oticaj sa malih prirodnih slivova u opštem slučaju se preporučuje metoda brzina (prva metoda u tabeli 9.16), prema kojoj se vreme koncentracije dobija kao zbir vremena putovanja vode u pojedinim fazama tečenja. Vremena putovanja određuju se kao odnos dužine i brzine tečenja. U ovoj metodi uobičajeno je da se odvojeno posmatra vreme putovanja duž padina sliva (površinsko tečenje) i vreme tečenja u vodotoku. Orijentacione brzine površinskog tečenja date su u tabeli 9.17 u zavisnosti od nagiba i vrste površine. Alternativni obrasci za proračun vremena koncentracije na malim prirodnim slivovima mogu biti SCS metoda kašnjenja ili formula Kirpicha. Za proračun vremena tečenja u vodotoku, brzine tečenja treba proceniti drugim hidrauličkim metodama, a za prvu ocenu može poslužiti Maningova formula (videti poglavlje 9.4.1).

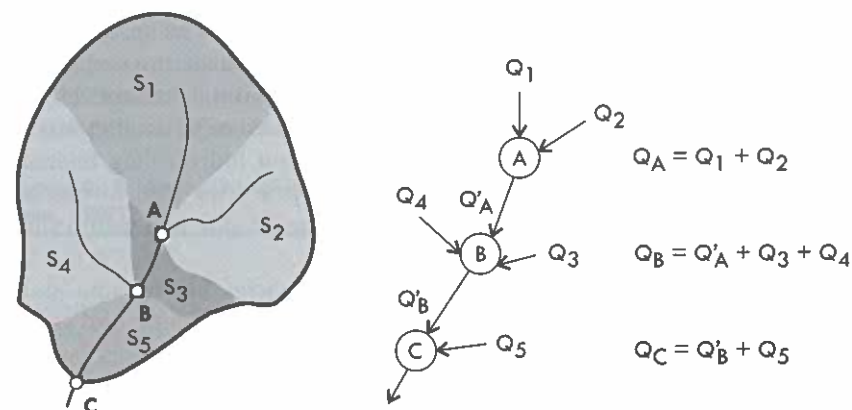
Za gradske slivove može se koristiti formula kinematičkog talasa, u kojoj vreme koncentracije t_c zavisi i od intenziteta efektivne kiše (većim intenzitetima odgovara kraće t_c i obrnuto). Kada se primenjuje racionalna metoda sa kišama trajanja jednakih nepoznatom vremenu koncentracije ($t_k = t_c$), proračun se sprovodi iterativno. Za pretpostavljeno trajanje kiše i odgovarajući intenzitet efektivne kiše računa se vreme koncentracije, a ako se dobijena vrednost razlikuje od pretpostavljenog trajanja kiše, trajanje se koriguje i proračun ponavlja dok se ne dođe do prihvatljivog slaganja t_k i t_c .

Tabela 9.16. Pregled nekih formula za određivanje vremena koncentracije (prema Chow i sar., 1988, i Wong, 2005).

Metoda / autor	Formula za t_c (min)	Napomena
Metoda brzina (NRCS, 2010)	$t_c = \frac{1}{60} \sum \frac{L_i}{v_i}$ L_i = dužina putanje tečenja (m) v_i = prosečna brzina tečenja (m/s)	Podrazumeva određivanje brzina površinskog tečenja (videti tabelu 9.17).
SCS metoda kašnjenja (NRCS, 2010)	$t_c = 0.0136 \frac{L^{0.8}}{S^{0.5}} (1000/CN - 9)^{0.7}$ L = hidraulički najduži put tečenja na slivu (m) CN = broj krive po SCS S = prosečan nagib sliva (m/m)	Za male ruralne slivove; smatra se dobrom za potpuno pokrivene površine, dok za mešovite površine daje precenjeno t_c ; nastala od pretpostavke da je $t_c = 1.67 t_p$ gde je t_p vreme kašnjenja sliva (videti odeljak 9.3.5).
Kirpich (1940)	$t_c = 0.0195 L^{0.77} S^{-0.385}$ L = dužina toka od izvora do izlaza (m) S = prosečan nagib sliva (m/m)	Za ruralne slivove sa jasno izraženim rečnim tokovima i strmim nagibima; za asfaltirane i betonske površine preporučuje se da se t_c pomnoži sa 0.4, a za betonske kanale sa 0.2.
Kinematički talas (Morgali & Lysley, 1965)	$t_c = 1.36 \frac{L^{0.6} n^{0.6}}{i^{0.4} S^{0.3}}$ L = dužina površinskog tečenja (m) n = Maningov koeficijent hrapavosti i = intenzitet ef. kiše (mm/min) S = prosečan nagib površine (m/m)	Za površinsko tečenje na izgrađenim površinama; formula se računa iterativno pošto sadrži intenzitet efektivne kiše koji zavisi od vremena koncentracije.
FAA (1970)	$t_c = 0.7(1.1 - c)L^{0.5} S^{-0.333}$ c = koeficijent oticaja u racionalnoj metodi L = dužina površinskog tečenja (m) S = nagib površine (m/m)	Formula razvijena za odvodnjavanje aerodroma, a može se koristiti za urbane slivove. $c = x$
Yen i Chow (1983)	$t_c = 1.2 \frac{L^{0.6} n^{0.6}}{S^{0.5}}$ L = dužina površinskog tečenja (m) n = Maningov koeficijent hrapavosti S = prosečan nagib površine (m/m)	Za površinsko tečenje na izgrađenim površinama; nastala kao uprošćenje formule kinematičkog talasa.

Tabela 9.17. Približne prosečne brzine (m/s) površinskog tečenja za proračun vremena koncentracije po SCS metodi brzina (izvor: Chow i sar., 1988).

Vrsta površine	Nagib sliva (%)			
	0 - 3	4 - 7	8 - 11	12 -
Šume	0 - 0.46	0.46 - 0.76	0.76 - 0.99	0.99 -
Pašnjaci	0 - 0.76	0.76 - 1.07	1.07 - 1.30	1.30 -
Obradene	0 - 0.91	0.91 - 1.37	1.37 - 1.68	1.68 -
Asfaltirane	0 - 2.59	2.59 - 4.11	4.11 - 5.18	5.18 -



Slika 9.29. Dekompozicija sliva na podslivove (levo) i postupak proračuna (desno).

9.3.7 Dekompozicija sliva

Na slivovima sa heterogenim karakteristikama u pogledu zemljišnog pokrivača, vrste tla, padavina i vlažnosti, hidrogrami oticaja mogu da imaju različite oblike u zavisnosti od toga na kojim delovima sliva se formira oticaj. Ukoliko se oticaj računa sa prosečnim karakteristikama sliva i sa prosečnom visinom kiše na slivu, rezultat može da se značajno razlikuje od onoga što se na tom slivu zaista dešava. Zbog toga se često pribegava podeli sliva na podslivove relativno homogenih karakteristika na kojima se oticaj posebno računa, dok se ukupan oticaj dobija superpozicijom hidrograma sa svih pojedinačnih podslivova.

U opštem slučaju, postupak dobijanja složenog hidrograma na izlaznom profilu sliva sastoji se od tri koraka:

- proračun hidrograma oticaja sa pojedinih slivnih površina,
- propagacija oticaja sa podsliva nizvodno do sledećeg čvora ili do izlaznog profila,
- sabiranje pojedinačnih hidrograma u složeni hidrogram.

Na slici 9.29 prikazan je primer dekompozicije sliva sa postupkom proračuna. Na najuzvodnijem delu su razdvojeni slivovi S_1 i S_2 dve reke koje posle spajanja čine glavni tok. Hidrogrami oticaja sa ova dva podsliva Q_1 i Q_2 se sabiraju u čvoru A, a zbirni hidrogram Q_A se propagira do čvora B. Između čvorova A i B nalazi se slivna površina S_3 . Ovakva slivna površina se naziva međusliv. U čvoru B sabiraju se hidrogram Q_3 sa međusliva S_3 , hidrogram Q_4 sa podsliva S_4 i propagiran (transformisani) hidrogram Q'_A iz čvora A. Na sličan način, u čvoru C sabiraju se hidrogram Q_5 sa međusliva S_5 , i propagirani hidrogram Q'_B iz čvora B.

9.4 Proračun transformacije hidrograma

Hidrogram oticaja se transformiše pri njegovoj propagaciji kroz rečnu mrežu, kao i pri prolasku kroz prirodne ili veštački izgrađene retenzione prostore, kao što su akumulacije, retenzije i slični objekti u kojima se voda privremeno ili trajno zadržava.

Propagacija talasa od jednog do drugog čvora rečne mreže može se sprovesti uz pomoć hidrauličkih proračuna primenom dinamičke jednačine sa različitim stepenom aproksimacije. Ukoliko se radi o složenom rečnom koritu i tečenju u uslovima velikih voda sa izlivanjem u inundacije, može biti neophodno čak i ravansko (tj. dvodimenzionalno) hidrauličko modeliranje tečenja. Međutim, u proračunu hidrološkog bilansa često su dovoljne i tzv. hidrološko-hidrauličke metode za proračun transformacije talasa, kao što je kvazistacionarna metoda ili metoda Maskingam, dok je u nekim slučajevima dovoljna i čista translacija talasa.

Hidrološko-hidraulički pristup u proračunu transformacije hidrograma duž rečne deonice najčešće se zasniva samo na primeni jednačine kontinuiteta. Ako se sa $Q(t)$ označi hidrogram u uzvodnom čvoru rečne mreže, a sa $q(t)$ u nizvodnom čvoru, jednačina kontinuiteta glasi:

$$Q(t) - q(t) = \frac{dV}{dt} \quad (9.53)$$

gde je V zapremina vode na razmatranoj deonici, pa član sa desne strane jednakosti predstavlja promenu zapremine pri prolasku talasa duž deonice. Ako se u ovoj jednačini kontinuiteta pređe sa trenutnih vrednosti na promenu zapremine u konačnom intervalu $\Delta t = t_j - t_{j-1}$, dobija se:

$$\frac{Q_{j-1} + Q_j}{2} - \frac{q_{j-1} + q_j}{2} = \frac{V_j - V_{j-1}}{\Delta t} \quad (9.54)$$

U gornjoj jednačini nepoznate veličine su protok u nizvodnom čvoru q_j i zapremina na kraju vremenskog koraka V_j . Da bi se jednačina kontinuiteta rešila po ovim nepoznatim veličinama, potrebno je poznavati ulazne protoke u tekućem i prethodnom vremenskom koraku, izlazni protok u prethodnom vremenskom koraku, kao i stanje zapremine vode na deonici na početku računskog koraka.

U nastavku se opisuje nekoliko metoda za transformaciju hidrograma oticaja. Prva metoda podrazumeva samo translaciju hidrograma, dok se u druge dve metode (metoda Maskingama i kvazistacionarna metoda) rešava jednačina kontinuiteta (9.54) uz različite pretpostavke.

9.4.1 Translacija hidrograma

Translacija talasa iz uzvodnog u nizvodni čvor rečne mreže podrazumeva da se hidrogram oticaja u uzvodnom čvoru pomera za neko vreme T_t . Vreme T_t se procenjuje kao vreme putovanja talasa između dva čvora na osnovu dužine deonice L i procenjene brzine vode v_t :

$$T_t = \frac{L}{v_t} \quad (9.55)$$

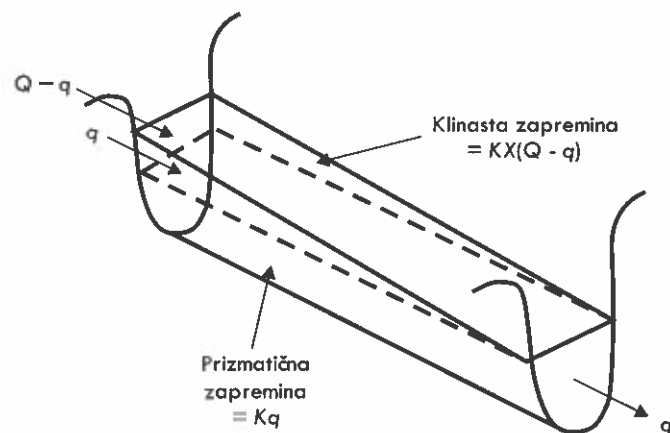
Brzina v_t se može proceniti približno korišćenjem Šezi-Maningove formule:

$$v_t = \frac{1}{n} R^{2/3} I_E^{1/2} \quad (9.56)$$

gde je n Maningov koeficijent hrapavosti, R hidraulički radijus i I_E nagib linije energije za koji se pretpostavlja da je približno jednak podužnom nagibu dna korita na razmatranoj deonici. Tipične vrednosti Maningovog koeficijenta hrapavosti za različite površine prikazane su u tabeli 9.18.

Tabela 9.18. Maningov koeficijent hrapavosti (izvori: FHA, 2002; Jovanović, 2008; Wanielista i sar., 1997).

Vrsta površine	Preporučena vrednost	Raspon vrednosti
Asfalt	0.011	0.010-0.013
Beton, gladak	0.012	0.010-0.013
Betonska posteljica	0.013	
Cigla sa cementnim malterom	0.014	
Zatvoreni provodnici:		
Liveno-gvozdene cevi, obložene	0.013	0.010-0.014
Betonske cevi	0.013	0.011-0.015
Betonske cevi sa uticajem revizionih okana i slivnika	0.015	0.013-0.017
Rebraste metalne cevi	0.027	0.025-0.030
Otvoreni kanali (veštački vodotokovi)		
Obloženi kanali:		
Betonsko dno i kosine		0.011-0.014
Betonsko dno, kosine od ređanog zalivenog kamena		0.015-0.020
Betonsko dno, kosine od kamenog nabačaja		0.020-0.035
Šljunčano dno, kosine od betona		0.017-0.025
Šljunčano dno, kosine od zalivenog kamena		0.020-0.026
Šljunčano dno, kosine od kamenog nabačaja		0.023-0.036
Obloga zidana u malteru		0.012-0.018
Asfaltna obloga		0.013-0.016
Neobloženi kanali:		
Korito od zemlje, pravolinijsko, iskopano		0.016-0.020
Korito od zemlje, pravolinijsko, staro, neobraslo		0.018-0.025
Korito od zemlje, pravolinijsko, obraslo niskom travom		0.022-0.033
Korito od zemlje, krivudavo, neobraslo		0.023-0.030
Korito od zemlje, krivudavo, obraslo gustom travom		0.030-0.040
Šljunkovito dno i kosine		0.030-0.050
Kamenito dno, kosine obrasle korovom		0.025-0.040
Korito formirano u steni		0.025-0.050
Neodržavano korito, visina vegetacije manja od dubine		0.040-0.080
Neodržavano korito, visina vegetacije jednaka dubini		0.050-0.120
Prirodni tokovi (mali vodotokovi sa širinom major korita < 30 m)		
Planinski (bujični) tokovi:		
Šljunkovito dno, bez vegetacije, strmih obala		0.030-0.050
Korito pokriveno šljunkom i velikim kamenjem		0.040-0.070
Ravničarski (aluvijalni) tokovi:		
Čista pravolinijska deonica bez tišaka		0.025-0.033
Čista pravolinijska deonica bez tišaka, sa više trave i kamena u koritu		0.030-0.040
Čista krivudava deonica sa plićacima i tišacima		0.033-0.045
Čista krivudava deonica sa plićacima i tišacima, sa više trave i kamena u koritu		0.035-0.050
Deonica obrasla vegetacijom, sa dubokim tišacima		0.050-0.080
Deonica veoma obrasla vegetacijom, sa ostacima korenja drveća		0.075-0.150



Slika 9.30. Prikaz prizmatične i klinaste zapremine vode na rečnoj deonici u metodi Maskingama.

9.4.2 Metoda Maskingama

U metodi Maskingama, zapremina vode na rečnoj deonici se deli na prizmatičnu i klinastu zapreminu (slika 9.30). Prizmatična zapremina odgovara zapremini vode u ustaljenom stanju. Klinasta zapremina se formira tokom nailaska talasa, kada je ulazni protok veći od izlaznog, što odgovara skici na slici 9.30. Tokom povlačenja talasa izlazni protok je veći od ulaznog, pa bi klinasta zapremina bila orijentisana suprotno od one na slici 9.30. Prizmatična zapremina se smatra srazmernom izlaznom protoku q sa nekim koeficijentom proporcionalnosti K , pa iznosi Kq . Klinasta zapremina je jednaka $KX(Q - q)$, tj. srazmerna je razlici ulaznog i izlaznog protoka uz dodatni težinski koeficijent X koji uzima vrednosti u intervalu $0 \leq X \leq 0.5$. Ukupna zapremina na deonici je:

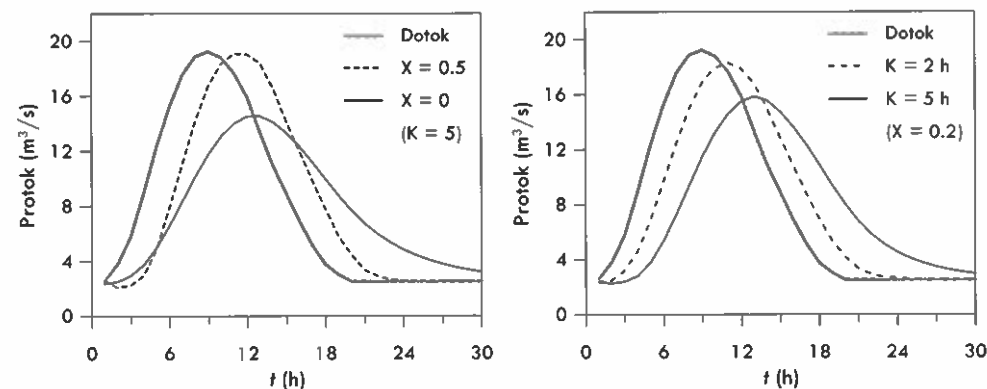
$$V = Kq - KX(Q - q) = K[XQ + (1 - X)q] \quad (9.57)$$

Prethodni izraz pokazuje da je zapremina vode na deonici u nekom trenutku proporcionalna ponderisanom zbiru ulaznog i izlaznog protoka. Težinski koeficijent X opisuje uticaj korita na ublaženje talasa. Ako je $X = 0$, nema klinaste zapremine ni pri nailasku ni pri povlačenju talasa, što je situacija koja odgovara transformaciji talasa u rezervoaru, odnosno njegovom maksimalnom ublaženju. U ovom slučaju izlazni protok zavisi samo od zapremine vode na deonici jer je $q = V/K$. Ovaj granični slučaj predstavlja tzv. *model linearnog rezervoara*. Ako je $X = 0.5$, klinasta zapremina je najveća, ublaženja zapravo nema, pa ovaj slučaj odgovara čistoj translaciji talasa. Efekat koeficijenta X prikazan je na slici 9.31. U prirodnim koritima vrednost koeficijenta X kreće se između 0 i 0.3 (Chow i sar., 1988).

Ako se zapremine vode V_{j+1} i V_j u jednačini kontinuiteta (9.54) zamene odgovarajućim izrazima prema (9.57) i jednačina preuredi, dobija se izraz za izlazni protok na kraju posmatranog intervala vremena:

$$q_j = C_1 Q_j + C_2 Q_{j-1} + C_3 q_{j-1} \quad (9.58)$$

gde su:

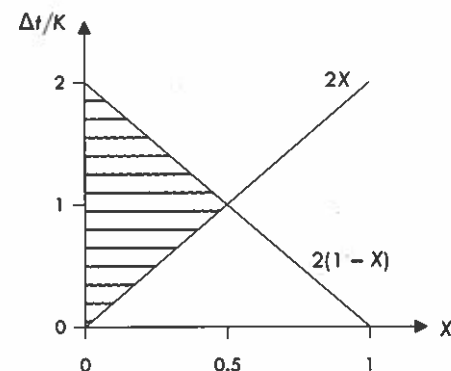
Slika 9.31. Transformacija hidrograma na rečnoj deonici metodom Maskingama sa različitim vrednostima parametara X i K .

$$C_1 = \frac{\Delta t - 2KX}{2K(1 - X) + \Delta t}, \quad C_2 = \frac{\Delta t + 2KX}{2K(1 - X) + \Delta t}, \quad C_3 = \frac{2K(1 - X) - \Delta t}{2K(1 - X) + \Delta t} \quad (9.59)$$

Za numeričko rešavanje gornje jednačine potrebno je izabrati odgovarajući vremenski interval Δt , korak po dužini toka Δx , kao i vrednosti parametara K i X . Koeficijent K u metodi Maskingama predstavlja vreme putovanja talasa na deonici dužine L . Numerički stabilno rešenje se dobija ako je računski vremenski korak Δt u intervalu između $2KX$ i $2K(1 - X)$. Oblast mogućih vrednosti parametara ove metode prikazana je na slici 9.32. Za usvojeno Δt , prostorni korak Δx se bira tako da odnos $\Delta x/\Delta t$ bude približno jednak brzini talasa na deonici, a koja je približno jednaka L/K .

9.4.3 Kvazistacionarna metoda

Kvazistacionarna metoda se najviše koristi za proračun transformacije talasa u retenzionim prostorima, ali je moguće primeniti je i na rečnim deonicama sa definisanim nizvodnim graničnim uslovom (preliv, ustava, i sl.) na kojima je nagib linije nivoa mali.



Slika 9.32. Oblast mogućih vrednosti parametara metode Maskingama.

Kvazistacionarna metoda se zasniva na aproksimaciji jednačine kontinuiteta (9.54). Preuređenjem te jednačine tako da se s jedne strane jednakosti nađu poznate veličine, a sa druge nepoznate, dobija se:

$$Q_{j-1} + Q_j - q_{j-1} + \frac{2V_{j-1}}{\Delta t} = q_j + \frac{2V_j}{\Delta t} \quad (9.60)$$

Za rešavanje gornje jednačine potrebno je poznavati zavisnost između zapremine vode V u retenzionom prostoru i izlaznog protoka q . Ako je ta zavisnost poznata, tada je moguće formirati i sledeću zavisnost:

$$F(q) = q + \frac{2V}{\Delta t} \quad (9.61)$$

Zavisnost $F(q)$ objedinjuje nepoznate veličine u tekućem vremenskom koraku u jednačini kontinuiteta (9.60). Tada se za tekući korak dobija:

$$F(q_j) = Q_{j-1} + Q_j - q_{j-1} + \frac{2V_{j-1}}{\Delta t} \quad (9.62)$$

dok se izlazni protok q određuje iz zavisnosti $F(q)$.

Za proračun transformacije talasa treba izabrati računski korak tako da rastuća grana ulaznog hidrograma bude opisana sa bar 5 tačaka. Na početku proračuna je potrebno odrediti početnu zapreminu V_0 i početno isticanje q_0 (za praznu retenziju $q_0 = 0$). U sledećem vremenskom koraku računa se vrednost F_1 na osnovu jednačine (9.60):

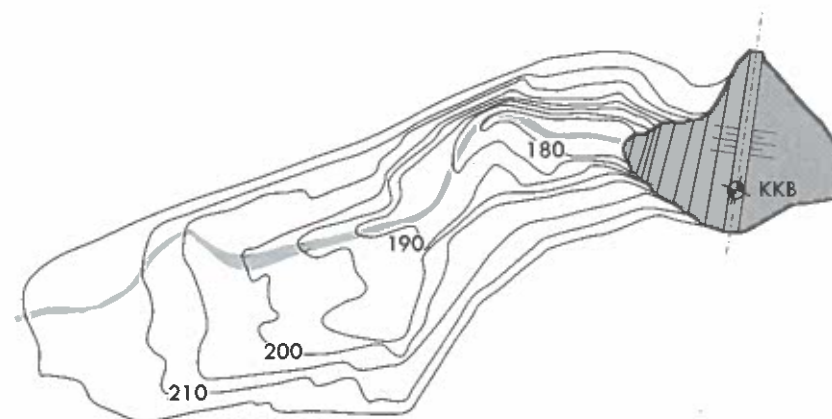
$$F_1 = F(q_1) = Q_0 + Q_1 - q_0 + \frac{2V_0}{\Delta t} \quad (9.63)$$

a potom se iz zavisnosti $F(q)$ za vrednost F_1 određuje izlazni protok q_1 (sa dijagrama ili interpolacijom između brojnih vrednosti). Odgovarajuća zapremina vode tada iznosi $V_1 = 0.5(F_1 - q_1)\Delta t$. U narednim vremenskim koracima proračun se ponavlja analogno prethodnom koraku.

Zavisnost $F(q)$. Zavisnost između zapremine V i izlaznog protoka q se najčešće definiše na osnovu dve krive: krive protoka evakuacionih organa, i krive zapremine retenzionog prostora. Sa definisanim ovim krivama, u kvazistacionarnoj metodi je moguće definisati zavisnost (9.61) unapred, pre početka proračuna.

Kriva protoka evakuacionih organa predstavlja zavisnost protoka kroz evakuacione organe (objekti pomoću kojih se voda ispušta iz retenzionih prostora, kao što su prelive i ispusti) od nivoa vode u retenzionom prostoru. Na primer, ako se voda iz akumulacije ispušta preko pravougaonog preliva, tada je ova kriva definisana jednačinom prelivanja $q = mb(2gh^3)^{1/2}$, gde je m koeficijent prelivanja, b širina prelivne ivice i h visina prelivnog mlaza.

Kriva zapremine retenzionog prostora je zavisnost zapremine vode i nivoa vode u retenzionom prostoru. Ako se radi o akumulacionom jezeru, ova kriva se može definisati na osnovu geodetskog snimanja budućeg prostora akumulacije ili na osnovu topografskih karata. Uobičajeno je da se sa topografskih karata najpre odrede površine (planimetriranjem) koje zahvataju izohipse određene nadmorske visine do preseka sa uzvodnim licem brane (slika 9.33). Na taj način se definiše *kriva površine* akumulacije,



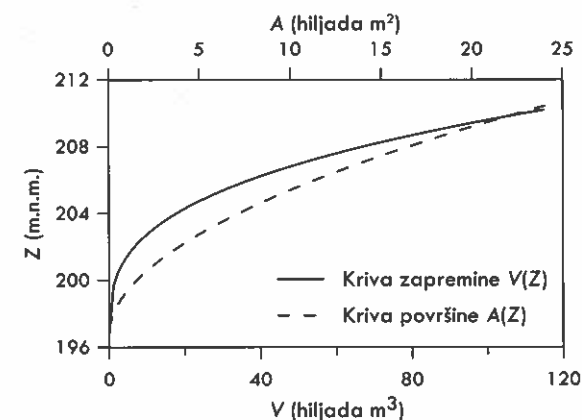
Slika 9.33. Skica akumulacionog basena sa izohipsama za formiranje krive površine i krive zapremine akumulacije.

tj. zavisnost površine jezera od nivoa vode u jezeru. Ova kriva počinje sa nulom površinom na najnižoj koti dna akumulacije. Na osnovu krive površine računaju se zapremine vode za pojedine nivoe vode u akumulaciji. Deo zapremine ΔV između dve kote Z_{j-1} i Z_j može da se aproksimira na sledeći način:

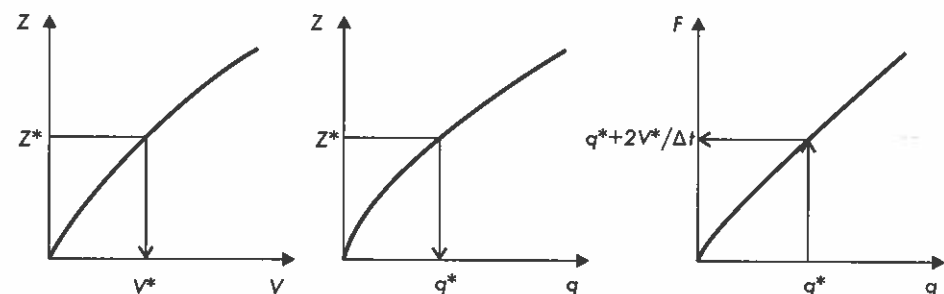
$$\Delta V_j = \frac{A(Z_{j-1}) + A(Z_j)}{2} (Z_j - Z_{j-1}) \quad (9.64)$$

gde su $A(Z_{j-1})$ i $A(Z_j)$ ordinate krive površine za dve razmatrane kote. Uzastopnim sabiranjem delova zapremina formira se i kriva zapremine akumulacije. Primer krive površine i krive zapremine prikazan je na slici 9.34.

Sa utvrđenom krivom zapremine $V(Z)$ i krivom protoka evakuacionih organa $q(Z)$, zavisnost $F(q)$ se formira tako što se za svaki nivo vode u akumulaciji Z odredi izlazni protok q i zapremina vode V , pa se za usvojeni vremenski korak Δt izračuna odgovarajuća vrednost $F = q + 2V/\Delta t$. Ovaj postupak je ilustrovan na slici 9.35.



Slika 9.34. Primer krive površine i krive zapremine akumulacije.

Slika 9.35. Shematski prikaz konstrukcije zavisnosti $F(q)$ u kvazistacionarnoj metodi.

Primer 9.6. Za potrebe navodnjavanja poljoprivrednih površina, na obližnjoj reci planira se izgradnja nasute brane i formiranje akumulacionog bazena. Pored brane planira se izgradnja preliva za evakuaciju velikih voda sa širinom prelivne ivice $b = 22$ m i koeficijentom preliivanja $m = 0.44$. Zapremine akumulacionog prostora iznad krune preliiva su date u tabeli 9.19. Izvršiti proračun transformacije poplavnog talasa povratnog perioda 100 godina, pod pretpostavkom da je u trenutku nailaska tog talasa nivo vode u akumulaciji bio na koti krune preliiva. Ordinate prethodno određenog ulaznog hidrograma date su u drugoj koloni tabele 9.20. Koristiti računski interval $\Delta t = 6$ časova.

Rešenje. Najpre se formira zavisnost $F(q) = q + 2V/\Delta t$ na osnovu poznate krive zapremine i proračuna protoka preko preliiva za različite nivoe vode u akumulaciji. Ovaj proračun je prikazan u tabeli 9.19. U trećoj koloni ove tabele protok q preko preliiva određen je na osnovu visine prelivnog mlaza h_p prema jednačini preliivanja:

$$q = mb\sqrt{2gh_p^3} = 0.44 \cdot 22\sqrt{2 \cdot 9.81h_p^3} = 42.877 h_p^{3/2}$$

U poslednjoj koloni tabele 9.19 proračunata je zavisnost $F(q) = q + 2V/\Delta t$ i prikazana na slici 9.36.

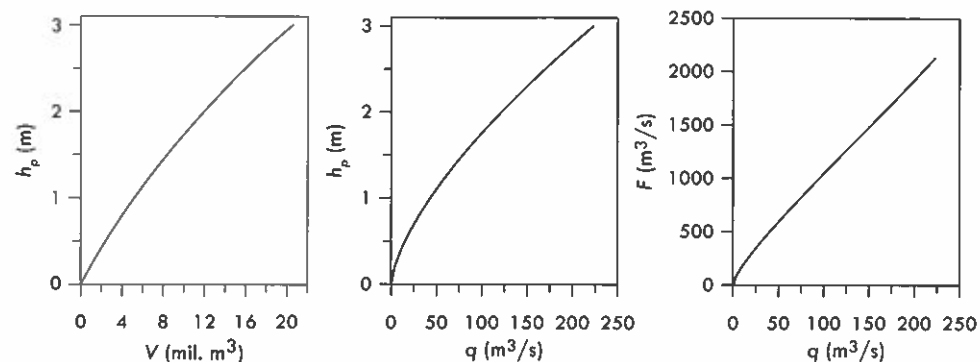
Proračun transformacije talasa prikazan je u tabeli 9.20. U prvom redu ove tabele definisani su početni uslovi: u početnom trenutku $t = 0$ nivo vode u akumulaciji je na koti krune preliiva (KKP), tako da nema preliivanja pa je izlazni protok $q = 0$ i zapremina iznad KKP je takođe jednaka 0. U narednom koraku $t = 6$ h, u trećoj koloni računa se vrednost F za taj korak pomoću izraza (9.62), odnosno (9.63), na osnovu vrednosti ulaznog protoka u prethodnom i tekućem koraku, izlaznog protoka u prethodnom koraku i zapremine u prethodnom koraku. Zatim se iz zavisnosti $F(q)$ određuje odgovarajuća vrednost q , data u četvrtoj koloni tabele 9.20. Ova vrednost se može očitati sa grafika $F(q)$ ili se dobiti linearnom interpolacijom između podataka u poslednje dve kolone u tabeli 9.19. Za sračunatu vrednost $F = 116.0$, linearnom interpolacijom dobija se $q = 5.8$ m³/s. Zapremina vode u akumulaciji iznad KKP u petoj koloni tabele 9.20 računa se rešavanjem jednačine (9.61) po V za sračunato $F = 116.0$ i $q = 5.8$, tj. kao $V = (F - q) \Delta t/2$. U šestoj koloni tabele se računa sabirak $2V/\Delta t$ za lakši proračun vrednosti F u trećoj koloni u narednom vremenskom koraku. Dobijeni izlazni hidrogram prikazan je na slici 9.37.

Tabela 9.19. Kriva zapremine, kriva preliivanja i zavisnost $F(q)$ u primeru 9.6.

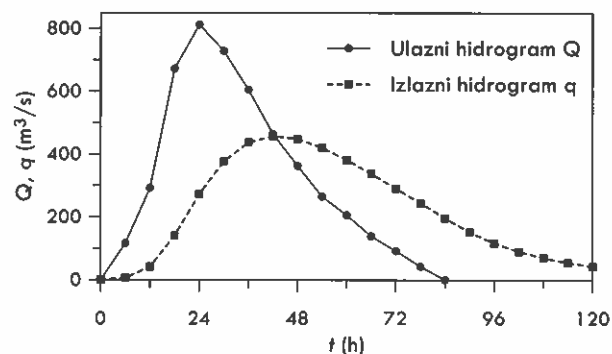
h_p (m)	V (mil. m ³)	q (m ³ /s)	$F = q + 2V/\Delta t$ (m ³ /s)
0	0	0	0
0.2	0.92	3.84	89.0
0.4	1.89	10.8	185.8
0.6	2.92	19.9	290.3
0.8	4.02	30.7	402.9
1.0	5.19	42.9	523.4
1.2	6.42	56.4	650.8
1.4	7.71	71.0	784.9
1.6	9.07	86.8	926.6
1.8	10.5	103.5	1076
2.0	11.98	121.3	1231
2.2	13.51	139.9	1391
2.4	15.12	159.4	1559
2.6	16.82	179.8	1737
2.8	18.63	200.9	1926
3.0	20.57	222.8	2127

Tabela 9.20. Proračun transformacije talasa u akumulaciji kvazistacionarnom metodom u primeru 9.6.

Vreme t (h)	Ulazni pro- tok Q (m ³ /s)	Pomoćna f-ja $F(q)$ (m ³ /s)	Izlazni protok q (m ³ /s)	Zapremina iznad KKP V (mil. m ³)	$2V/\Delta t$ (m ³ /s)
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
0	0		0	0	0
6	116	116.0	5.8	1.19	110.2
12	292	512.4	41.8	5.08	470.7
18	672	1392.9	140.2	13.53	1252.7
24	812	2596.6	271.9	25.11	2324.7
30	728	3592.7	376.3	34.74	3216.5
36	605	4173.2	437.0	40.35	3736.2
42	464	4368.1	457.5	42.24	3910.7
48	363	4280.2	448.2	41.39	3832.0
54	265	4011.7	420.1	38.79	3591.6
60	206	3642.5	381.5	35.22	3261.0
66	139	3224.6	337.7	31.18	2886.9
72	92.5	2780.7	291.2	26.89	2489.5
78	43.2	2334.0	244.4	22.57	2089.5
84	0	1888.3	196.7	18.27	1691.6
90	0	1494.9	152.0	14.50	1343.0
96	0	1191.0	116.7	11.60	1074.3
102	0	957.5	90.3	9.37	867.3
108	0	777.0	70.2	7.63	706.9
114	0	636.7	54.9	6.28	581.8
120	0	527.0	43.2	5.22	483.7



Slika 9.36. Kriva zapremine akumulacije, kriva prelivanja i pomoćna kriva $F(q)$ u primeru 9.6.



Slika 9.37. Transformacija talasa u akumulaciji u primeru 9.6.

9.5 Poznati modeli padavine-oticaaj

U opticaaju je veliki broj modela kojim se može modelirati proces padavine-oticaaj. Zbog složenosti hidroloških procesa na slivovima, ne postoji idealan model padavine-oticaaj jer svaki model ima određena ograničenja. Zato je ova oblast hidrologije uvek izazovna. Novi modeli se neprestano razvijaju na akademskom nivou i koriste u naučnim istraživanjima. Određeni broj modela je obuhvaćen komercijalnim ili ponekad i besplatnim softverskim paketima. Pre odlučivanja za određeni model najvažnije je dobro proučiti njegove mogućnosti, pretpostavke i potrebne ulazne podatke kako bi se utvrdilo da li je takav model pogodan za inženjerski zadatak koji treba rešiti.

Među najpoznatijim hidrološkim modelima koji se koriste za modeliranje prirodnih slivova su Hydrologic Modeling System HEC-HMS (USACE, 2000), švedski HBV (Bergström, 1976, 1995), MIKE-SHE (Abott i sar., 1986a; 1986b), TOPMODEL (Beven & Kirkby, 1979; Beven, 2001), LISFLOOD (De Roo i sar., 2000), i drugi. U oblasti urbanih slivova poznati modeli su SWMM (Rossman, 2015), MOUSE (danas pod nazivom MIKE-URBAN; DHI, Danska) i InfoWorks (Wallingford, Velika Britanija). Na Građevinskom fakultetu Univerziteta u Beogradu razvijano je više hidroloških modela, počev od modela DILR zasnovanog na metodi izohrona (Radić & Jovanović, 1986; Radić, 1988), preko modela urbanih slivova BEMUS (Radojković & Maksimović, 1984) do mo-

dela 3DNet-Catch (Vasilic i sar., 2012; Todorović, 2015; Stanić i sar., 2018). Na Građevinskom fakultetu u Subotici razvijen je i hidrološki model za proračun oticaja i erozije (Gabrić, 2014). Literatura u ovoj oblasti je veoma široka, a zainteresovani čitaoci se upućuju na odličnu knjigu engleskog hidrologa K. Bevena (2001). U nastavku će kratko biti opisana dva modela koja se široko koriste u svetu jer su besplatni i lako dostupni.

Hydrologic Modeling System ili HEC-HMS je model koji je razvio Hidrološki inženjerski centar (HEC) američke vojske i može se besplatno preuzeti. Ovaj model je prevažno namenjen za simulaciju površinskog oticaja usled individualnih kišnih epizoda, a metode proračuna koje se koriste upravo jesu metode pogodne za hidrološke analize velikih voda u okviru dimenzionisanja hidrotehničkih objekata. Model obuhvata i metode koje omogućavaju i kontinualno modeliranje, kao što su metode za proračun baznog oticaja, gubitaka na intercepciju, topljenje snega itd. U modelu se veći slivovi mogu predstaviti kao sistem međusobno povezanih komponenti (slivnih površina, deonica vodotoka i slično). Hidrogrami oticaja sa slivnih površina mogu se odrediti pomoću nekoliko vrsta sintetičkih jediničnih hidrograma (Klarkov, Snajderov i SCS sintetički jedinični hidrogram ili proizvoljni jedinični hidrogram koji korisnik zadaje). Ulaz za proračun oticaja mogu biti realne kišne epizode koje korisnik unosi ili računске kiše (postoji mogućnost zadavanja zavisnosti ITP iz koje se računске kiše generišu sa konstantnim ili promenljivim intenzitetom). Model HEC-HMS sadrži i modul za optimizaciju, odnosno kalibraciju parametara modela na osnovu podataka osmatranja. Dodatak ovom softverskom paketu je i alat HEC-GeoHMS, koji predstavlja geoinformatički dodatak za ArcGIS i njegovu ekstenziju Spatial Analyst (ESRI). Pomoću ovog dodatka mogu se pripremiti ulazni podaci za HEC-HMS iz digitalnog modela terena, uključujući i podelu sliva na podslivove.

Storm Water Management Model (SWMM) je model namenjen simulacijama procesa padavine-oticaaj u urbanim područjima. Model može da simulira oticaaj usled individualnih kišnih epizoda, ali se može koristiti i za kontinualnu simulaciju. Pored količine oticaja, model ima komponentu i za kvalitet oticaja. Za zadate padavine, komponenta modela za oticaaj računa količine oticaja i zagađenja sa grupe slivnih površina, dok komponenta za propagaciju računa tečenje u sistemu cevi, kanala, retenzija, uređaja za prečišćavanje i drugih objekata. Model SWMM razvijen je u SAD na Univerzitetu Floride u saradnji sa konsultantskim kućama, ali je 90-ih godina 20. veka njegov razvoj preuzela američka Agencija za zaštitu životne sredine (EPA; Huber & Dickinson, 1992; Rossman, 2015). Softverski paket se može preuzeti besplatno na internet strani EPA.

Švedski hidrometeorološki zavod (SHMI) je 70-ih godina 20. veka razvio konceptualni hidrološki model HBV za kontinualne simulacije (Bergström, 1976, 1995; Lindström i sar., 1997). Model se sastoji od četiri glavna modula: modul za padavine i sneg, modul za vodu u tlu, modul za hidrogram direktnog oticaja i modul za propagaciju talasa. Model se može primeniti i kao semi-distribuiran model ako se sliv podeli na zone po nadmorskim visinama i tipovima vegetacije. Verzija HBV modela namenjena za edukativne svrhe nazvana je HBV-Light (Seibert & Vis, 2012) i besplatna je za korišćenje. HBV-light se sastoji od istih modula kao i HBV, a ima mogućnost automatske kalibracije parametara modela. Distribuirana verzija modela razvijena je u Holandiji (Schellekens i sar., 2016) i koristi se u RHMZ Srbije (Ivković i Nađ, 2015; Ivković i sar., 2018).

10 ANALIZA SREDNJIH VODA

10.1 O analizama hidrološkog režima

Poznavanje raspoloživih količina voda i njihovog prostornog i vremenskog rasporeda od presudnog je značaja za strateško planiranje razvoja vodoprivrede i drugih privrednih grana koje koriste vodne resurse. Za projektovanje i eksploataciju hidrotehničkih objekata takođe je veoma važno znati raspone vrednosti protoka koji se mogu javiti na profilima objekata kako bi se obezbedilo da ti objekti ispune svoju namenu i budu pouzdani i ekonomični. U sklopu projektovanja hidrotehničkih objekata, hidrološke analize imaju za cilj i određivanje merodavnih (računskih, projektnih) veličina za dimenzionisanje objekata. Merodavne veličine su najčešće protoci, nivoi vode i zapremine, u zavisnosti od vrste objekta.

Cilj hidroloških analiza i proračuna jeste da se definišu elementi hidrološkog režima od značaja za planiranje i projektovanje hidrotehničkih objekata i njihovo upravljanje. Hidrološki proračuni treba da daju odgovore na pitanja vezana za raspoložive količine vode, dinamiku oticaja, ili za pojave ekstremno malih ili velikih vrednosti. Sa te tačke gledišta, hidrološki proračuni se dele na analizu srednjih voda (raspoložive količine), analizu malih voda, analizu velikih voda i na analizu celog hidrograma oticaja. Pored toga, od interesa su često i pronos nanosa i pojava leda, koji nisu predmet ove knjige.

Analiza srednjih voda treba da opiše raspoložive količine vode sa nekog sliva u dugoročnom smislu, odnosno tokom planiranog veka trajanja objekta. Ova analiza se zato bavi količinama vode koje se *u proseku* mogu očekivati na profilu vodotoka. Te se količine mogu izraziti kao zapremina otekle vode, sloj oticaja ili prosečni protoci u dužim periodima (tokom godine ili u višegodišnjem periodu). Prosečni protoci, tj. srednje vode, od interesa su najviše u projektovanju objekata za korišćenje voda, kao što su akumulacije za snabdevanje naselja i industrije vodom ili za hidroenergetiku.

Analize malih voda i velikih voda podrazumevaju analizu ekstremnih vrednosti protoka koje se mogu javiti na razmatranom profilu. Ove analize su neophodne da bi se projektovali objekti i mere zaštite čija je namena da se ublaže nepovoljni efekti ovih ekstrema (npr. regulacija reka, zaštita od poplava, kontrola kvaliteta vode). Ekstremi se najčešće analiziraju uz pomoć metoda statističke analize kako bi se definisale računске vrednosti protoka određene verovatnoće pojave, a time i postigao određeni stepen obezbeđenosti od ekstremnih hidroloških događaja.

U navedenim analizama se često koriste neke izvedene karakteristike hidrološkog režima, kao što su, na primer, srednji višegodišnji protok, prosečna kriva trajanja ili 100-godišnja velika voda. Do njih se dolazi osrednjavanjem, izdvajanjem ekstremnih vrednosti ili nekom vrstom statističke analize podataka o protocima tokom dužeg perioda. Ove izvedene karakteristike na sažet način odslikavaju osobenosti hidrološkog režima na razmatranom slivu, pa se nazivaju i *hidrološkim potpisima*. Za određene zadatke inženjerske hidrologije, kao što su hidrološke prognoze, analize vodoprivrednog bilansa i raspodele vode korisnicima, pa i projektovanje hidrotehničkih objekata, neophodna je i analiza kompletnih hidrograma oticaja. U takvim zadacima je uobičajeno da se razvijaju modeli padavine-oticađ kojima se mogu simulirati postojeći ili neki budući uslovi za oticanje vode na slivu.

Najtačniji način da se dođe do procene količina voda i relevantnih karakteristika hidrološkog režima nekog sliva jeste da se na izlaznom profilu tog sliva protok meri u nekom dužem vremenskom periodu. Praćenje protoka na rekama, s obzirom da se zasniva na kontinualnom osmatranju vodostaja i merenjima polja brzina u profilima reka, predstavlja naporan i skup proces. Iz tog razloga, hidrološke stanice su znatno zastupljenije na profilima većih slivova, dok manji slivovi ostaju neosmotreni. U hidrološkoj terminologiji slivovi na kojima postoje osmatranja protoka nazivaju se *izučeni*, slivovi na kojima ne postoje osmatranja se nazivaju *neizučeni*, dok se slivovi na kojima postoje kratkoročna osmatranja nazivaju *nedovoljno izučeni*. Posebnu klasu neizučenih slivova predstavljaju gradski slivovi. Na njima su manji prirodni vodotokovi obično zacevljeni i njihove vode se odvođe u kanalizacioni sistem. Merenja u sistemima opšte ili kišne kanalizacije kod nas se ne sprovode sistematski, osim u retkim slučajevima eksperimentalnih slivova.

Potrebni pokazatelji hidrološkog režima na neizučeni slivovima procenjuju se različitim tehnikama kojima se informacije sa izučenih slivova prenose na neizučene. U tim postupcima se formiraju grupe izučenih slivova prema sličnosti u pogledu karakteristika slivova, klimatskih osobina i hidrološkog režima. Grupa izučenih slivova sličnih karakteristika čini *homogeni region*; sami izučeni slivovi koji „pozajmljuju“ svoje informacije neizučeni slivovima nazivaju se *donori*.

Transfer informacija sa izučenih ili neizučenih slivova se često sprovodi na osnovu *regresionih analiza*, u kojima se karakteristike hidrološkog režima na izučeni slivovima u homogenom regionu dovode u vezu sa fizičko-geografskim ili klimatskim karakteristikama slivova. Takve veze se često nazivaju *regionalne zavisnosti*. Tipične regionalne zavisnosti su zavisnosti specifičnog oticaja od površine sliva. Za formiranje regionalnih zavisnosti koristi se jednostruka ili višestruka regresiona analiza.

Drugi način transfera informacija čine *indeksne metode* koje se zasnivaju na prenošenju karakteristika hidrološkog režima sa izučenih na neizučene slivove u bezdimenzionalnoj formi, tj. u odnosu na neku izabranu *indeksnu karakteristiku* (najčešće srednji protok). U ovom pristupu se pretpostavlja da je razmatrana karakteristika režima ista unutar homogenog regiona osim izabrane indeksne karakteristike.

U slučaju kada se raspolože sa dovoljno podataka sa izučenih slivova, mogu se pripremiti karte izololinija važnih karakteristika hidroloških režima (najčešće karte izololinija specifičnog oticaja). U novije vreme koriste se i geo-statističke metode kojima se

do procene na neizučeni slivovima dolazi primenom različitih metoda prostorne interpolacije na podatke sa izučenih slivova.

Pored toga što merenja protoka često nisu na raspolaganju (iz logističkih ili finansijskih razloga) na lokacijama od interesa, metode koje primenjujemo za hidrološke analize na izučeni slivovima ponekad se ne mogu primeniti i zbog toga što nas interesuje kako će se neki sliv ponašati u budućnosti u pogledu oticaja. To je, na primer, slučaj kada treba ispitati uticaj planiranih mera i objekata (promene namene površina, izgradnja akumulacija) na režim oticaja. U takvim slučajevima je neophodno razviti modele padavine-oticađ za postojeće i planirano stanje sliva, pomoću njih simulirati hidrograme oticaja pod različitim uslovima i tako omogućiti poređenje i vrednovanje planiranih mera.

Ovaj deo knjige daje pregled tri karakteristične analize u inženjerskoj hidrologiji – analize srednjih, malih i velikih voda. U svakom od poglavlja predstavljeni su osnovni pokazatelji, tj. karakteristike hidroloških režima koje se u ovim analizama koriste. Većina tih pokazatelja je definisana u prethodnim delovima knjige, pa se načini njihovog proračuna ovde ne objašnjavaju ponovo. U svakoj od ovih analiza opisani su i načini procene karakteristika režima na slivovima bez sistematskih osmatranja protoka, tj. na nedovoljno izučeni i neizučeni slivovima.

10.2 Osnovni pokazatelji raspoloživih količina voda

Prosečna količina vode koja se može očekivati na profilu vodotoka tokom nekog dužeg (višegodišnjeg) perioda opisuje se *srednjim protokom*. Srednji protok je zato uopštena mera raspoloživih količina vode na razmatranom profilu. S druge strane, unutargodišnje i višegodišnje varijacije protoka daju informaciju o potencijalnim manjkovima ili viškovima u količini voda.

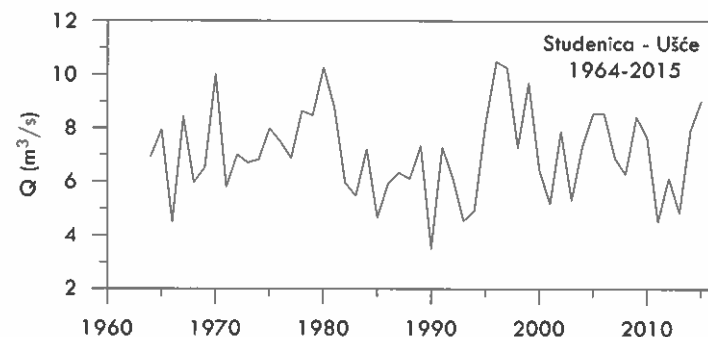
Pokazatelji raspoloživih količina voda koji se najčešće analiziraju su:

- godišnji protoci i srednji višegodišnji protok,
- unutargodišnja raspodela protoka, i
- kriva trajanja protoka.

Godišnji protoci se koriste u planiranju vodoprivrednih sistema i u ranim fazama projektovanja kada je potrebno razmatrati raspodelu vode korisnicima (stanovništvo, navodnjavanje, industrija, plovidba, hidroenergetika, eko-sistemi itd.). Ovi podaci se često koriste i u studijama uticaja klimatskih promena na vodne resurse.

Unutargodišnja raspodela oticaja je prirodna posledica unutargodišnje varijacije lokalnih klimatskih uslova, tj. padavina, temperatura, stanja vegetacije itd. koje diktira godišnji ciklus okretanja Zemlje oko Sunca. Najveći deo godišnjeg oticaja može nastati tokom jedne sezone, dok ostatak godine može biti malovodan. Unutargodišnja raspodela oticaja je zato važna karakteristika hidrološkog režima u planiranju i upravljanju vodoprivrednim sistemima jer daje mogućnost da se (makar grubo) procene raspoložive količine voda u pojedinim delovima godine. Ovaj uticaj godišnjih doba je važan za navodnjavanje, snabdevanje vodom, hidroenergetiku i potrebe eko-sistema, odnosno za sve korisnike voda čije potrebe takođe imaju unutargodišnji ciklus.

Kriva trajanja protoka je grafička predstava obezbeđenosti protoka tokom godine u nekom profilu vodotoka i koristi se u različitim zadacima. S obzirom da se kon-



Slika 10.1. Niz godišnjih protoka na reci Studenici u profilu hidrološke stanice Ušće.

struiše na osnovu dnevnih protoka, kriva trajanja pokazuje pun spektar varijacije oticaja na nekom profilu. Ona zato predstavlja osnovni podatak u analizi i projektovanju objekata kao što su protočne hidroelektrane i zahvati za snabdevanje vodom iz vodotoka, kao i za određivanje ekoloških protoka.

10.2.1 Godišnji protoci i srednji višegodišnji protok

Količine vode koje protiču kroz profil vodotoka tokom jedne godine najčešće se opisuju godišnjom zapreminom oticaja V_{god} , slojem oticaja $P_{e, god}$ i godišnjim protokom Q_{god} (poglavlje 6.4.2):

$$V_{god} = \int_0^{T_{god}} Q dt, \quad Q_{god} = \frac{V_{god}}{T_{god}}, \quad P_{e, god} = \frac{V_{god}}{A} \quad (10.1)$$

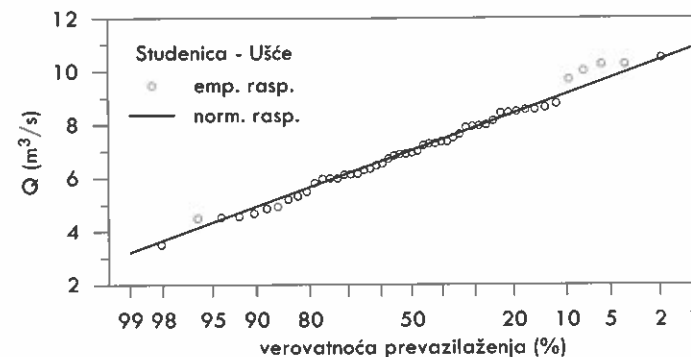
gde je T_{god} vreme tokom razmatrane godine, a A površina sliva. Niz godišnjih protoka odlikava dinamiku oticaja u dužem vremenskom periodu, odnosno promenljivost oticaja iz godine u godinu (slika 10.1). Umesto kalendarske godine, oticaj se često posmatra tokom *hidrološke godine*. Hidrološka godina počinje od kraja meseca sa najmanjim oticajem. U našim uslovima, hidrološka godina počinje 1. novembra i završava se 31. oktobra naredne godine. Ista definicija važi u Nemačkoj; u SAD hidrološka godina počinje 1. oktobra, a u nekim afričkim državama u junu (Arnell, 2002).

Srednji protok u nekom višegodišnjem periodu od N godina dobija se kao ukupna zapremina otekle vode podeljena sa ukupnim vremenom tokom N godina:

$$Q_{sr} = \frac{\sum_{i=1}^N V_{god,i}}{\sum_{i=1}^N T_{god,i}} \quad (10.2)$$

gde su $V_{god,i}$ i $T_{god,i}$ godišnja zapremina oticaja i ukupno vreme za godinu i .

Poređenje protoka sa slivova različite veličine nema smisla, pa se u tu svrhu koristi *specifični oticaj* q koji se definiše kao protok po jedinici površine sliva. Specifični srednji oticaj predstavlja srednji protok po jedinici površine sliva:



Slika 10.2. Raspodela niza godišnjih protoka na reci Studenici u profilu stanice Ušće (empirijska i normalna raspodela prilagođena osmotrenom nizu).

$$q_{sr} = \frac{Q_{sr}}{A} \quad (10.3)$$

gde je A površina razmatranog sliva. Specifični srednji oticaj se naziva i *izdašnost sliva*, a nekada i *modul oticaja*. Izražava se u $L s^{-1} km^{-2}$.

Varijacije količina vode na nekom profilu najbrže se mogu sagledati kroz standardnu devijaciju S_Q i koeficijent varijacije godišnjih protoka CV_Q tokom N godina osmatranja (videti 0):

$$S_Q = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (Q_{god,i} - Q_{sr})^2}, \quad CV_Q = \frac{S_Q}{Q_{sr}} \quad (10.4)$$

Standardna devijacija ima dimenziju protoka. Koeficijent varijacije, koji se definiše kao odnos standardne devijacije i srednje vrednosti, jeste bezdimenzionalna veličina i koristi se za poređenje varijacija protoka na slivovima različite površine. Za to poređenje ponekad se koristi i standardna devijacija logaritmovanih protoka (UNESCO, 1982). Koeficijent varijacije godišnjih protoka u opštem slučaju opada sa veličinom sliva, a ima najveće vrednosti u suvim klimatima u kojima je varijacija padavina iz godine u godinu najveća (Arnell, 2002). U primeru sa slike 10.1, srednji višegodišnji protok reke Studenice na stanici Ušće iznosi $7.02 m^3/s$. Standardna devijacija godišnjih protoka iznosi $1.63 m^3/s$, a koeficijent varijacije 0.234.

Raspodela verovatnoće godišnjih protoka daje više informacija o varijacijama oticaja nego standardna devijacija (slika 10.2). Statistička analiza godišnjih protoka se sprovodi na uobičajen način kako je prikazano u poglavlju 8.2. Teorijske raspodele koje se često dobro prilagođavaju srednjim godišnjim protocima su normalna, log-normalna i familija gama raspodela (Marković, 1965). Mana normalne raspodele je ta što se njenom primenom za male verovatnoće neprevazilaženja mogu dobiti negativni protoci. Iz tog razloga raspodelu treba izabrati u skladu sa asimetrijom podataka u uzorku. Sa praktične tačke gledišta, log-normalna i gama raspodele su pogodnije kao modeli za godišnje protoke.

Pre primene statističke analize na nizove godišnjih protoka treba proveriti ispunjenost uslova za statističku analizu hidroloških nizova koji su opisani u poglavlju 8.1.

Za godišnje protoke je naročito važna homogenost nizova, ne samo sa formalnog aspekta statističke analize, već i sa suštinskog aspekta raspoloživosti količina vode na razmatranom profilu. O ovom aspektu se više govori u odeljku 10.2.4.

10.2.2 Unutargodišnji režim oticaja

Unutargodišnja raspodela oticaja varira od godine do godine, dok se za opisivanje unutargodišnjeg režima oticaja najčešće koriste srednji mesečni protoci. Pod srednjim mesečnim protokom podrazumeva se srednja vrednost svih protoka za konkretan mesec (januar, februar, itd.) iz svih godina osmatranja:⁹

$$Q_{m,sr} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N Q_{m,i}, \quad m=1,2,\dots \quad (10.5)$$

Na slici 10.3-a prikazani su mesečni protoci u svim godinama osmatranja na jednoj stanici, dok su debljom linijom povezani srednji mesečni protoci.

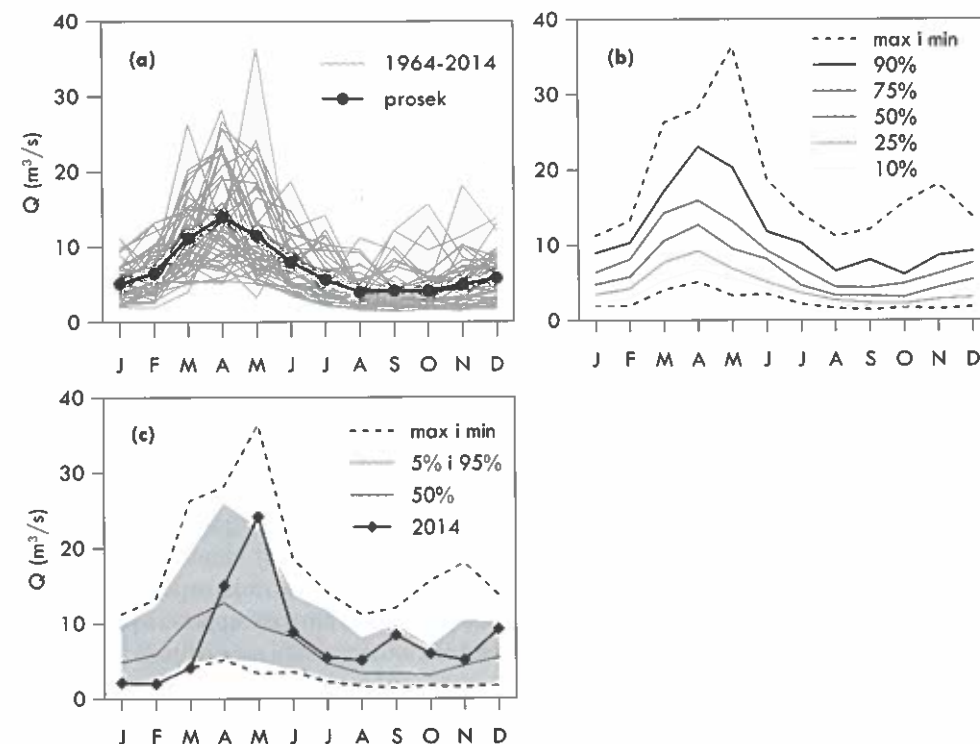
Varijacije mesečnih protoka za neki konkretan mesec mogu se opisati na isti način kao i za godišnje protoke, tj. standardnom devijacijom, koeficijentom varijacije i raspodelama verovatnoće protoka za konkretan mesec. Do mesečnih protoka određene verovatnoće pojave može se doći iz empirijske raspodele ili iz teorijskih raspodela kojima su prilagođeni nizovi mesečnih protoka za pojedine mesece. Grafički prikaz unutargodišnjeg režima srednjih mesečnih protoka, koji predstavljaju očekivane protoke u pojedinim mesecima tokom godine, može se dopuniti i mesečnim protocima određene verovatnoće pojave (slika 10.3-b). Nanošenjem kvantila za suprotne verovatnoće može se dobiti uvid u raspon varijacija mesečnih protoka. Na primer, linije za verovatnoće 0.05 i 0.95 na slici 10.3-c definišu interval u kome će se mesečni protoci naći sa verovatnoćom 90%. Pored toga, na isti dijagram mogu se naneti i najmanji i najveći osmotreni mesečni protoci koji takođe ukazuju na raspon mogućih vrednosti mesečnih protoka u pojedinim mesecima. Na ovakav dijagram mogu se naneti mesečni protoci iz tekuće ili neke druge konkretne godine da bi se taj raspored uporedio sa višegodišnjim režimom. Na slici 10.3-c naneti su mesečni protoci iz 2014. godine, gde se vidi da je oticaj u zimu te godine bio izrazito mali i na nivou najmanjih osmotrenih vrednosti, dok se za majski oticaj može reći da spada u događaje sa verovatnoćom prevazilaženja manjom od 5%.

Zbog međusobnog poređenja unutargodišnjih režima na različitim lokacijama, oni se često prikazuju i bezdimenzionalno u odnosu na srednji protok. Tada se umesto srednjih mesečnih protoka prikazuju tzv. *modulni koeficijenti* ili *Pardeovi koeficijenti*:

$$K_m = \frac{Q_{m,sr}}{Q_{sr}}, \quad m=1,2,\dots \quad (10.6)$$

Modulni koeficijent K ima vrednost manju od 1 ako je srednji mesečni protok manji od srednjeg godišnjeg protoka i obrnuto. U literaturi se Pardeovi koeficijenti ponekad de-

⁹ U ovoj knjizi pod mesečnim protokom se podrazumeva srednja vrednost dnevnih protoka za jedan mesec u jednoj godini, dok srednji mesečni protok podrazumeva višegodišnji prosek protoka za pojedine mesece.



Slika 10.3. Unutargodišnji režim protoka na reci Studenici u profilu stanice Ušće: (a) mesečni protoci u svim godinama osmatranja i prosečne vrednosti; (b) linije iste verovatnoće neprevazilaženja za mesečne protoke i linije najmanjih i najvećih vrednosti; (c) interval u kome će se mesečni protoci naći sa verovatnoćom od 90% i mesečni protoci tokom 2014. godine.

finišu i kao odnos zapremine prosečnog mesečnog oticaja u odnosu na zapreminu ukupnog godišnjeg oticaja (npr. Viglione i sar., 2013):

$$Par_m = \frac{V_m}{V_{god}}, \quad m=1,2,\dots,12 \quad (10.7)$$

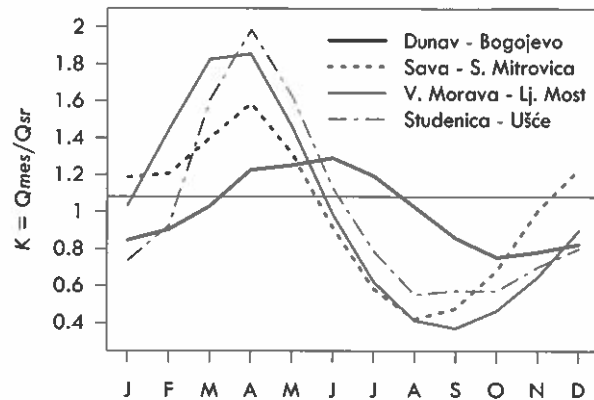
Za ove koeficijente važi:

$$\sum_{m=1}^{12} Par_m = 1 \quad (10.8)$$

i oni su približno jednaki modulnim koeficijentima podeljenim sa 12 jer je:

$$Par_m = \frac{V_m}{V_{god}} = \frac{Q_{m,sr} T_m}{Q_{sr} T_{god}} = K_m \frac{T_m}{T_{god}} \approx \frac{K_m}{12}, \quad m=1,2,\dots \quad (10.9)$$

Na slici 10.4 prikazan je bezdimenzionalni unutargodišnji režim oticaja pomoću modulnih koeficijenata na lokacijama četiri hidrološke stanice na rekama u Srbiji za koje je unutargodišnji režim prikazan i na slici 6.37 u odeljku 6.5.1.



Slika 10.4. Bezdimezionalni unutargodišnji režimi oticaja na četiri lokacije u periodu 1950-2016 prikazani pomoću modulnih koeficijenata. Vrednost $K = 1$ odgovara srednjem godišnjem protoku.

10.2.3 Kriva trajanja protoka

Kriva trajanja protoka, opisana u odeljku 6.4.3, pokazuje tokom koliko dana u godini je neka količina vode (protok) na raspolaganju. Vreme na apscisi ove krive je ukupno vreme tokom godine u kome su protoci jednaki protoku na ordinati ili veći od njega. Veliki protoci se nalaze na početku krive, tj. u domenu malih trajanja, jer se oni mogu prevazići u malom broju dana tokom godine. Nasuprot tome, na kraju krive se nalaze mali protoci, koji su zastupljeni (skoro) cele godine, jer se tokom (skoro) cele godine javljaju protoci veći od njih.

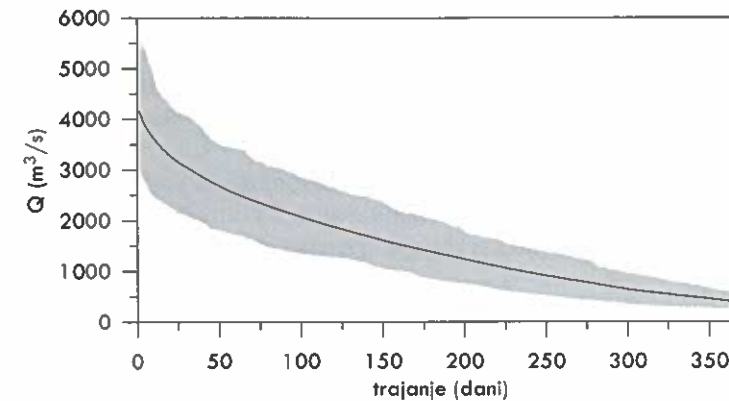
Kriva trajanja može da posluži za definisanje nekih reprezentativnih protoka velikih ili malih voda. Na primer, kao reprezentativna mala voda često se uzima ona sa trajanjem od 95% tokom godine, odnosno vrednost od koje su protoci veći 95% vremena tokom godine (dok se manji protoci od tog javljaju samo tokom 18 dana u godini). Kriva trajanja može da posluži i za definisanje neke reprezentativne srednje vode, kao što je medijana protoka, tj. protok od koga je 50% protoka u tom profilu tokom godine veće (i od koga je 50% protoka manje).

Kriva trajanja se može konstruisati za jednu konkretnu godinu, ali je od većeg interesa da se konstruiše prosečna kriva trajanja za višegodišnji period. Prosečna kriva trajanja se može konstruisati na dva načina: osrednjavanjem krivih trajanja iz pojedinačnih godina tako što se osrednjavaju protoci iz svih godina za trajanje t^* , ili osrednjavanjem krivih trajanja iz pojedinačnih godina tako što se osrednjavaju trajanja iz svih godina jednog protoka Q^* (Jovanović, 1989).

Varijacije krive protoka iz godine u godinu mogu da budu značajne, pa je korisno da se oko prosečne krive trajanja konstruišu intervali u kojima se nalazi određeni procenat tačaka (slika 10.5).

Kada se određuje prosečna (višegodišnja) kriva trajanja protoka za neki profil, ne treba zaboraviti da površina ispod krive trajanja predstavlja zapreminu protekle vode V_o kroz dati profil tokom godine dana. Ta zapremina je jednaka:

$$V_o = Q_{sr} \cdot T_{god} \quad (10.10)$$

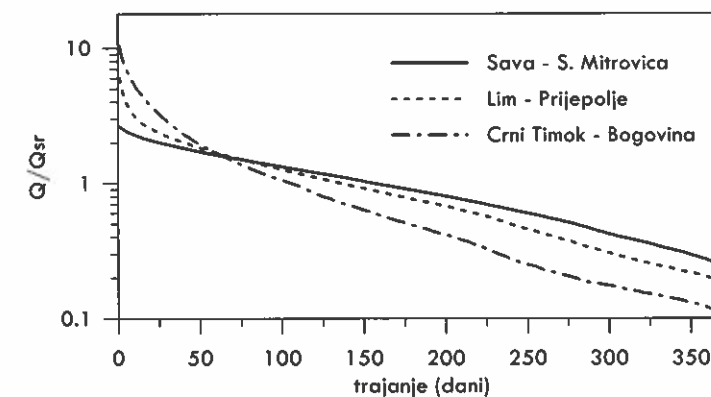


Slika 10.5. Prosečna kriva trajanja protoka na Savi kod Sremske Mitrovice sa intervalom poverenja 95%.

gde je Q_{sr} srednji protok, a T_{god} vreme tokom godine. Zbog približnog proračuna prilikom osrednjavanja krivih trajanja iz pojedinih godina, može se desiti da zapremina sračunata iz prosečne krive trajanja nije jednaka zapremini sračunatoj na osnovu srednjeg protoka prema izrazu (10.10). U tom slučaju krivu treba proporcionalno korigovati tako da njene ordinate, a shodno tome i površina ispod krive, daju tačnu zapreminu otekle vode V_o prema (10.10).

Krive trajanja protoka se često prikazuju sa protocima u logaritamskoj razmeri zbog preglednosti. Ako se porede dve krive trajanja (iz dve godine, iz dva perioda, ili u dva profila), ordinatu na kojoj se nalaze vrednosti protoka treba prikazati relativno u odnosu na srednji protok (iz dve godine, iz dva perioda, ili u dva profila). Na slici 10.6 prikazane su uporedno bezdimezionalne prosečne krive trajanja na tri reke različitih slivnih površina.

Oblik krive trajanja protoka daje sliku o hidrološkom režimu na razmatranom profilu. Strm nagib krive na njenom početku ukazuje na veliku promenljivost protoka, što je karakteristično za manje (brdske) slivove na kojima nema većeg zadržavanja vo-



Slika 10.6. Prosečne krive trajanja protoka za tri sliva u Srbiji u periodu 1955-2010 prikazane bezdimezionalno u odnosu na srednji protok.

de. Kriva trajanja sa malim nagibom ukazuje na male varijacije u režimu oticaja, što je karakteristika slivova na kojima se voda duže zadržava i na kojima dominira podzemni oticaj. Ovo je tipično za slivove većih površina, za one sa prirodnim ili akumulacionim jezerima koja utiču na zadržavanje i preraspodelu oticaja, kao i za slivove sa podzemnim vodama u krečnjaku.

Glavna namena krive trajanja protoka jeste u oceni raspoloživih voda za hidroenergetiku, plovidbu, zaštitu od zagađenja i vodosnabdevanje. Za određene vrste projekata i detaljnije analize mogu se formirati i sezonske krive trajanja.

10.2.4 Višegodišnje varijacije godišnjih protoka

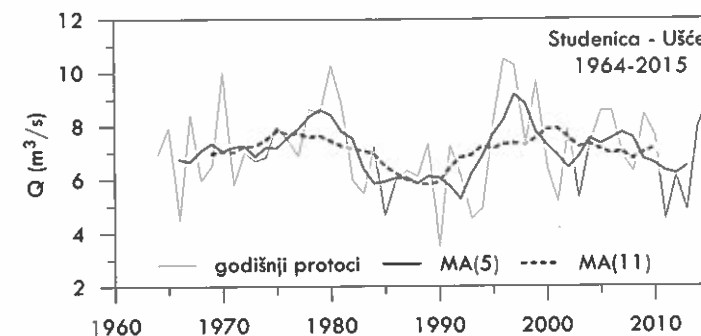
Prirodne ili veštačke promene, kao što su lagane promene klimatskih faktora, urbanizacija, krčenje šuma, izgradnja akumulacija, zahvatanje voda itd., dovode do sporih promena u količini i dinamici oticaja sa sliva koje traju više godina ili decenija. Kao što je opisano u odeljku 8.1.1, promene u oticaju mogu da dovedu i do nehomogenosti nizova formiranih od podataka osmatranja oticaja, što sa statističke tačke gledišta predstavlja problem za klasičnu statističku analizu u kojoj se pretpostavlja da svi podaci potiču iz iste populacije i da su međusobno nezavisni.

Najčešći oblici nehomogenosti u osmotrenim nizovima godišnjih protoka su trend, skokovite promene i ciklične promene. Ove promene su ilustrovane na slikama 8.2 do 8.3 u odeljku 8.1.1. Trend odražava postepene promene, kao što je npr. postepena promena namena površina na slivu iz ruralnih u gradske, pri čemu se povećava i ubrzava oticaj sa sliva. Do skokovite promene može doći zbog intervencija u slivu, npr. zbog prebacivanja voda iz jednog sliva u drugi, posle čega na prvom slivu dolazi do naglog smanjenja oticaja, a na drugom do povećanja. Ciklične promene predstavljaju smenu višegodišnjih vodnih i sušnih perioda različitih dužina. Ovi ciklusi se javljaju zbog klimatskih oscilacija koje se odražavaju i na oticaj.¹⁰ Međutim, dužina tih ciklusa je promenljiva i samim tim nepredvidiva. Treba obratiti pažnju da ciklične promene oticaja mogu da daju trendove suprotnog znaka u pojedinim periodima. To pokazuje da kratki hidrološki nizovi, koji možda obuhvataju nepotpune vodne i sušne cikluse, mogu da daju lažnu predstavu o trendu oticaja, o čemu treba voditi računa u hidrološkim proračunima sa relativno kratkim nizovima osmatranja.

Pokretne sredine. Višegodišnje varijacije se lakše mogu uočiti vizuelnom inspekcijom hidrograma uz uglašavanje niza protoka pomoću pokretnih sredina. Dijagram pokretnih sredina $MA(n)$ se formira tako što se na mesto i -tog podatka u nizu nanosi aritmetička sredina n podataka oko i -tog podatka. Na primer, i -ta pokretna sredina sa intervalom osrednjavanja od 5 vremenskih koraka dobija se iz podataka x kao:

$$MA_i(5) = \frac{1}{5}(x_{i-2} + x_{i-1} + x_i + x_{i+1} + x_{i+2})$$

¹⁰ Prirodne oscilacije u atmosferskoj cirkulaciji imaju važnu ulogu u formiranju vremenskih i klimatskih uslova u višegodišnjim i višedecenijskim periodima vremena. Takve oscilacije su severnoatlantska oscilacija (NAO), El Niño južna oscilacija (ENSO), pacifička dekadna oscilacija (PDO) i druge (Anderson, 2005, p. 402).



Slika 10.7. Niz godišnjih protoka na reci Studenici u profilu hidrološke stanice Ušće sa pokretnim sredinama na 5 i 11 godina.

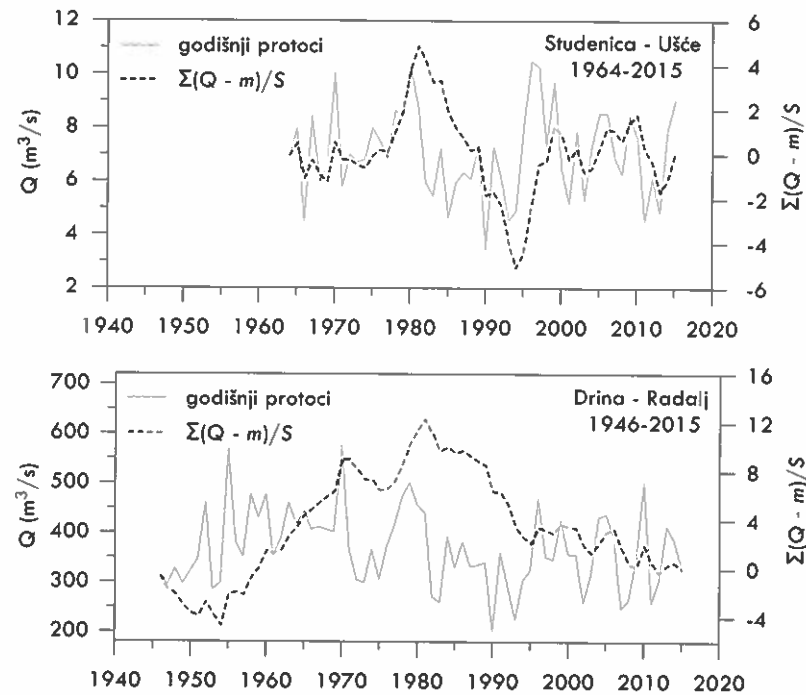
Iz ovog izraza se vidi da se pokretne sredine ne mogu sračunati za vremenske korake koji su udaljeni za manje od $n/2$ koraka od početka i od kraja niza. Na slici 10.7 prikazan je niz godišnjih protoka na Studenici kod Ušća sa pokretnim sredinama od 5 i 11 godina. Pokretne sredine prigušuju kratkoročne oscilacije u nizovima i na taj način mogu da ukažu na višegodišnje promene ili oscilacije.

Kumulativna kriva standardizovanih protoka. Višegodišnje tendencije i oscilacije se mogu uočiti i na osnovu kumulativne krive standardizovanih protoka. Ordinata S ove krive za vremenski presek t dobija se kao:

$$S(t) = \sum_{i=1}^t \frac{x_i - m_x}{s_x}$$

gde je x_i i -ta vrednost u nizu, m_x srednja vrednost i s_x standardna devijacija niza. Drugim rečima, ova kriva predstavlja sumarnu liniju standardizovanog protoka ili neke druge veličine x . Za niz godišnjih protoka, ova kriva pokazuje tendenciju nagomilavanja vodnih i sušnih godina (godina iznad i ispod proseka) i služi za identifikaciju vodnih i sušnih ciklusa. Vremenski period u kome ordinate kumulativne krive imaju pozitivan prirast predstavlja vodniji period, a onaj u kome je prirast negativan predstavlja sušniji period. Na slici 10.8 prikazana su dva primera kumulativne krive standardizovanih protoka: na Studenici u profilu stanice Ušće i na Drini u profilu hidrološke stanice Radalj. Na prvom primeru reke Studenice se može jasno uočiti nagomilavanje sušnih godina između 1980. godine i sredine 90-ih godina; isto se može videti i na primeru Drine kod Radlje, ali se u ovom slučaju može videti i nagomilavanje vodnih godina od sredine 50-ih do 1980. godine.

Dvostruka sumarna linija. Jedna od najstarijih tehnika za proveru konsistencije podataka sastoji se od konstrukcije dvostruke sumarne linije. Ova linija predstavlja zavisnost kumulativnih godišnjih protoka na jednoj lokaciji od kumulativnih protoka na drugoj lokaciji. Takva linija će biti prava linija ukoliko je odnos protoka na dve stanice konstantan. Prelomi dvostruke sumarne linije nastaju zbog promene odnosa između protoka na dve lokacije i mogu biti posledica grešaka u merenju ili stvarnih promena u režimu oticanja. Ova metoda može biti korisna ukoliko se raspolaže pouzdanim podacima o godišnjim protocima u nekom profilu u blizini stanica za koje postoji sumnja o greškama ili promeni režima. Tada se podaci sa pouzdanog mernog profila



Slika 10.8. Nizovi godišnjih protoka sa kumulativnom krivom standardizovanih protoka na reci Studenici u profilu stanice Ušće (gore) i na reci Drini u profilu stanice Radalj (dole).

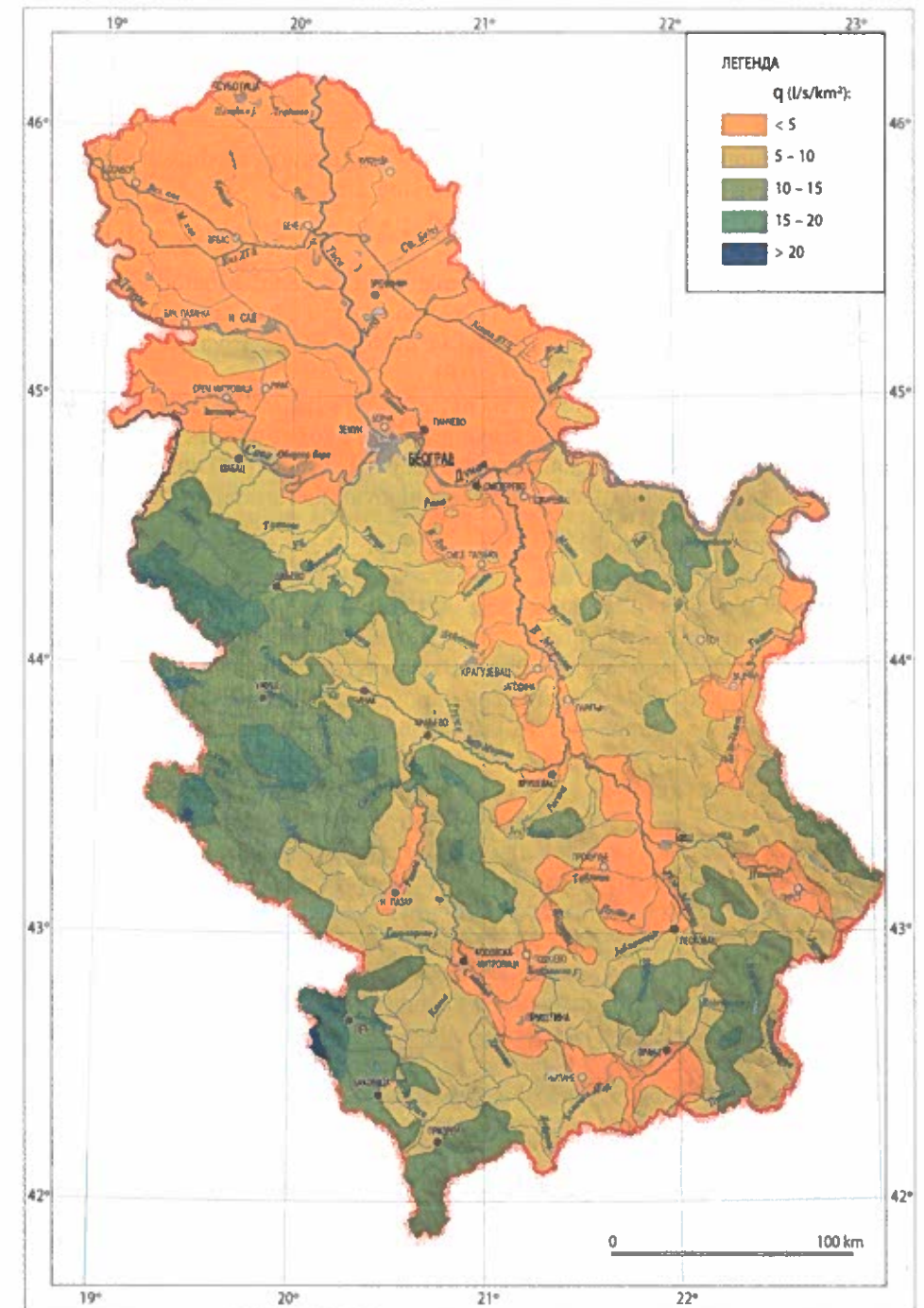
moгу iskoristiti za detekciju grešaka i promena na manje pouzdanim lokacijama. Ako se može utvrditi da se radi o greškama u merenju, dvostruka sumarna linija može da posluži i za korekciju pogrešnih merenja (Searcy & Hardison, 1960).

Statistički testovi. Za utvrđivanje homogenosti hidroloških nizova ili za detekciju trenda koriste se i statistički testovi opisani u odeljku 8.1.4. Koriste se testovi kojima se ispituje jednakost srednjih vrednosti dva niza, jednakost varijansi dva niza ili jednakost raspodela dva niza (z-test, t-test, F-test, test Kolmogorov-Smirnova), kao i niz neparametarskih testova homogenosti i slučajnosti (npr. test Men-Vitnija za homogenost i test Men-Kendala za postojanje trenda).

10.3 Procena srednjih voda na neizučnim slivovima

Srednji protok na neizučenom slivu se može proceniti na više načina. Ukoliko se raspolaže kartama izolinija specifičnog oticaja, nanošenjem granice neizučenog sliva na takvu kartu može se proceniti prosečni specifični, a onda i apsolutni oticaj sa neizučenog sliva. Na slici 10.9 prikazana je karta prosečnog specifičnog oticaja na teritoriji Srbije.

Za ocenu srednjeg protoka mogu se formirati regionalne zavisnosti. U praksi je odomaćeno da se formiraju zavisnosti specifičnog oticaja od površine sliva, tj. $q(A)$. Ovakve zavisnosti se mogu formirati iz objedinjenih podataka sa izučenih slivova prikazanih u publikaciji „Vodoprivredna osnova Srbije – hidrometeorološke podloge“



Slika 10.9. Karta prosečnog specifičnog oticaja na teritoriji Srbije (izvor: Geografija Srbije, Radovanović (ur.), 2017).

(VOS, 2009). Uobičajeno je takođe da se za ove zavisnosti traži regresiona jednačina u stepenom obliku:

$$q(A) = cA^b \quad (10.11)$$

gde su c i b regresioni koeficijenti. Ovakva formulacija omogućava jednostavnu procenu srednjeg protoka Q^* na neizučenom slivu površine A^* :

$$Q^* = q(A^*) \cdot A^* \quad (10.12)$$

Pored navedenih pristupa, u domaćoj praksi koriste se još i metoda Langbajna (Langbein, 1949) koja je u osnovi takođe regresiona metoda, kao i metoda višegodišnjeg bilansa voda prema Turku (Turc, 1954). Ove dve metode su prikazane detaljnije u radu Jankovića (2015) i Blagojevića i sar. (2018).

Sa procenjenim srednjim protokom na neizučenom slivu, za ocenu prosečne unutar-godišnje raspodele ili prosečne krive trajanja može se koristiti indeksna metoda tako što će se primeniti bezdimenzionalna unutar-godišnja raspodela ili bezdimenzionalna kriva trajanja sa donorskog sliva u odnosu na odgovarajući srednji protok.

11 ANALIZA MALIH VODA

11.1 Značaj malih voda

Pod malim vodama se uopšteno podrazumeva smanjena ili nedovoljna količina vode u vodotokovima. Uobičajeno je da se nedostatak vode naziva *sušom*. Preciznije, pod *meteorološkom sušom* smatra se duže odsustvo ili duži značajan nedostatak padavina (WMO & UNESCO, 2012). *Hidrološka suša* je posledica meteorološke suše pri čemu nedostatak padavina i izostanak prihranjivanja podzemnih voda dovode do iscrpljivanja zaliha vode na slivu, a time i do smanjenja količina vode u vodotokovima ili njihovog presušivanja. *Poljoprivredna suša* je takođe posledica meteorološke suše, a podrazumeva i sve efekte koje nedostatak padavina i prateći deficiti vode u aktivnom sloju zemljišta i sniženi nivoi podzemnih voda mogu imati na poljoprivredne kulture u odnosu na njihove potrebe u određenoj fazi rasta. Na kraju, *socio-ekonomska suša* je definicija suše u kojoj se nedostatak vode stavlja u kontekst potreba korisnika za vodom i svih vodoprivrednih i drugih aktivnosti koje se na njima zasnivaju (proizvodnja hrane, proizvodnja električne energije, saobraćaj itd.).

Malovodni periodi ponekad mogu da traju dugo, pri čemu može da dođe i do presušivanja vodotoka. Takve situacije mogu da predstavljaju problem ne samo za ljude kao korisnike voda, već i za eko-sisteme. U područjima sa suvom klimom nedostatak padavina i potpuno presušivanje vodotoka može da traje i godinama, pa je živi svet prilagođen takvim uslovima. Međutim, u područjima sa vlažnom klimom nedovoljne količine vode mogu da donesu probleme vezane i za količine i za kvalitet voda. U periodima malih voda otežani su svi vidovi korišćenja voda. U naseljima može doći do nestašica vode, koje mogu biti neprijatne naročito ako dugo traju. Otežano se odvijaju navodnjavanje i plovidba, a smanjuje se i hidroenergetska proizvodnja. Tokom leta, visoke temperature povećavaju potrebe korisnika za vodom, pa se zaoštrava konflikt između potražnje i raspoloživih količina vode. Period malih voda donosi i problem kvaliteta vode u vodotokovima, jer sa smanjenim protocima vodotokovi imaju manju sposobnost razblaživanja zagađujućih materija. Na taj način se povećavaju koncentracije zagađujućih materija u vodotokovima, a povećava se i potrošnja kiseonika, što zajedno dovodi do opšteg smanjenja kvaliteta vode. Što su malovodni periodi duži, to je i zadržavanje zagađujućih materija u vodi duže i opasnije po živi svet i korisnike voda.

Zbog svega navedenog, izučavanje malih voda je od velikog značaja za efikasno i integralno upravljanje vodama tokom malovodnih perioda, u okviru koga se sprovode

mere za ublažavanje posledica nedovoljnih raspoloživih količina voda. Te mere obuhvataju mere kontrole kvaliteta i količine vode u vodotokovima: kontrolisano ispuštanje otpadnih voda i izgradnja postrojenja za prečišćavanje otpadnih voda; ograničavanje količina vode koje se zahvataju na slivu i eventualno prebacuju u druge slivove; propisivanje garantovanih ekoloških protoka koji se moraju obezbediti nizvodno od brana ili vodozahvata da bi se zadovoljile potrebe eko-sistema kao i propisivanje minimalnih protoka za potrebe nizvodnih korisnika.

U ovom poglavlju razmatraju se hidrološke analize i proračuni koji se odnose na kvantifikovanje malih voda kojima se omogućava ocena obezbeđenosti funkcionisanja pojedinih vodoprivrednih aktivnosti.

11.2 Osnovni pokazatelji malih voda

Pokazatelji malih voda se mogu svrstati u nekoliko grupa prema načinu na koji se male vode analiziraju (WMO, 2008c; Blöschl i sar., 2013). Ako se analizira režim baznog oticaja na slivu koji jedini doprinosi ukupnom oticaju tokom sušnih perioda, tada su od značaja:

- analiza recesione grane hidrograma,
- procena zaliha podzemne vode,
- indeks baznog protoka.

U drugu grupu pokazatelja spadaju statističke ocene protoka malih voda. Tipični statistički pokazatelji malih voda su:

- karakteristični protoci sa krive trajanja (npr. za trajanje 95% tokom godine),
- kvantili iz statističke analize nizova malih voda.

Za ocenu intenziteta hidrološke suše najčešće se razmatraju trajanje malovodnog perioda i deficit zapremine oticaja u odnosu na neki zadati prag.

11.2.1 Analiza recesione grane hidrograma

Recesiona grana hidrograma se opisuje kao opadajuća eksponencijalna funkcija vremena:

$$Q(t) = Q_0 e^{-(t-t_0)/k}, \quad t \geq t_0 \quad (11.1)$$

gde je k recesioni koeficijent kojim se opisuje brzina opadanja baznog protoka. Recesioni koeficijent se može proceniti kao recipročna vrednost nagiba recesione grane ako se hidrogram prikaže u semilogaritamskoj razmeri (tj. sa protocima u logaritamskoj razmeri).

Alternativni način da se proceni recesioni koeficijent se zasniva na određivanju vremena $t_{1/2}$ za koje će protok Q_0 da se prepolovi (Arnell, 2002). U trenutku $t = t_{1/2}$ važi:

$$Q(t_{1/2}) = Q_0 e^{-(t_{1/2}-t_0)/k} = \frac{Q_0}{2} \quad (11.2)$$

odakle sledi:

$$t_{1/2} = t_0 + k \ln 2 \quad (11.3)$$

Gornji izraz može da posluži da se proceni recesioni koeficijent iz osmotrenih hidrograma kao:

$$k = \frac{t_{1/2} - t_0}{\ln 2} \quad (11.4)$$

Brzina opadanja baznog protoka zavisi od geoloških karakteristika tla i njegove mogućnosti da zadrži vodu. Vrednosti koeficijenta k (i vremena $t_{1/2}$) mogu da se kreću u širokim granicama: od nekoliko dana za slabo vododrživa tla do nekoliko stotina dana za tla sa velikim izdanima podzemnih voda (Gustard i sar., 1989; Arnell, 2002).

Pretpostavka o eksponencijalnoj recesiji u izrazu (11.1) može da se iskoristi i da se procene zalihe podzemnih voda. Deo baznog oticaja koji se pojavljuje na izlaznom profilu sliva u nekom intervalu vremena (t_0, t_1) biće jednaka:

$$V_{baz} = \int_{t_0}^{t_1} Q dt = \int_{t_0}^{t_1} Q_0 e^{-(t-t_0)/k} dt = kQ_0 [1 - e^{-(t_1-t_0)/k}] \quad (11.5)$$

Ako bi suša trajala beskonačno (tj. ne bi bilo padavina koje bi dovele do direktnog oticaja i povećanja baznog oticaja), ukupna zapremina baznog oticaja na izlaznom profilu sliva ukazala bi na ukupne rezerve podzemne vode:

$$V_{rez} = \lim_{t_1 \rightarrow \infty} kQ_0 [1 - e^{-(t_1-t_0)/k}] = kQ_0 \quad (11.6)$$

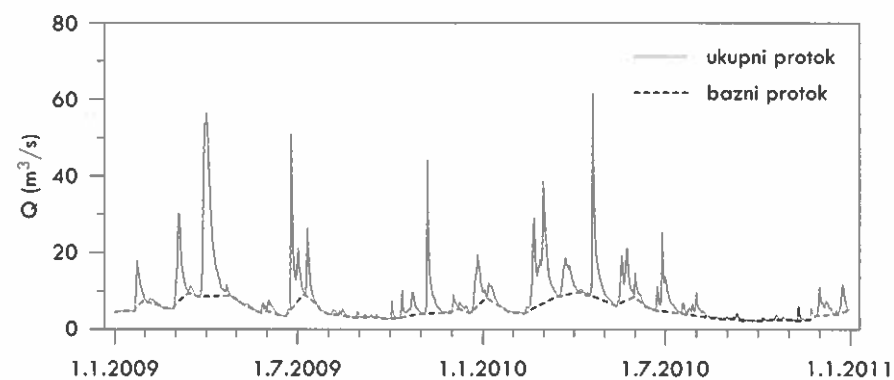
11.2.2 Indeks baznog protoka

Indeks baznog protoka (IBP) predstavlja odnos zapremine baznog oticaja V_{baz} u odnosu na ukupnu zapreminu otekle vode V_o tokom dužeg perioda vremena:

$$IBP = \frac{V_{baz}}{V_o} \quad (11.7)$$

Velika vrednost indeksa baznog protoka ukazuje na to da sliv ima dovoljno zaliha podzemne vode koje mogu da formiraju protok na izlaznom profilu sliva i tokom dužeg suvog perioda. Indeks baznog protoka često je dobro korelisan sa karakteristikama tla, njegovom geološkom strukturom i drugim pokazateljima zaliha vode u slivu (kao npr. procenat površine sliva pod jezerima). Proračun zapremine baznog oticaja u dužem periodu podrazumeva da se u tom periodu odvoji direktan od baznog protoka. Odvajanje dve komponente oticaja može se sprovesti koristeći metode za podelu hidrograma talasa velikih voda na direktan i bazni protok iz odeljka 6.6.1. Takav postupak je naporan ako treba pokriti višegodišnji period sa mnogo pojedinačnih talasa. Jedna automatizovana procedura za odvajanje baznog protoka iz višegodišnjeg niza dnevnih protoka razvijena je u Velikoj Britaniji (Gustard i sar., 1992) i sastoji se od četiri glavna koraka:

- 1) obeležavanje minimalnih protoka u intervalima od pet dana;



Slika 11.1. Primer odvajanja baznog protoka automatizovanom procedurom prema Gustardu i sar. (1992) na reci Studenici u profilu hidrološke stanice Ušće.

- 2) među petodnevним minimumima biraju se prevojne tačke kao oni minimumi za koje važi da je centralna vrednost pomnožena sa 0.9 manja od susednih vrednosti;
- 3) pravolinijskim spajanjem prevojnih tačaka dobija se hidrogram baznog oticaja;
- 4) ukoliko dobijeni bazni hidrogram u nekom danu daje veći bazni protok od osmotrenog ukupnog protoka, bazni protok se koriguje na ukupni osmotreni protok.

Na slici 11.1 prikazan je jedan primer godišnjeg hidrograma sa odvojenim baznim protokom prema opisanoj proceduri.

11.2.3 Male vode sa krive trajanja protoka

Kao reprezentativna mala voda često se uzima protok zastupljenosti 95% vremena tokom godine, označen kao $Q_{95\%}$. Ovaj protok se određuje sa prosečne višegodišnje krive trajanja protoka na profilu od interesa (videti 0). Protok $Q_{95\%}$ je vrednost od koje su protoci tokom godine u proseku manji samo tokom 5% vremena, odnosno tokom 18 dana.

Kao karakteristične male vode mogu se izabrati i protoci drugačije zastupljenosti tokom godine. Za reke sa stalnim baznim protokom koriste se trajanja 90% i 95%, dok se protoci manje zastupljenosti (npr. 30% do 50%) koriste kod reka koje presušuju i kod kojih se u nizovima dnevnih protoka javlja značajan broj nultih vrednosti.

Za poređenje malih voda na različitim slivovima koristi se odnos $Q_{95\%}/Q_{sr}$ ili odnos karakterističnih protoka i srednjeg protoka (Arnell, 2002).

Kao što je rečeno u odeljku 0, oblik krive trajanja protoka odslikava hidrološki režim na razmatranom slivu, a njen nagib ukazuje na stepen promenljivosti protoka i sposobnosti sliva da zadrži vodu i formira bazni oticaj. Kriva trajanja je zato odraz i geološkog sastava. Karakteristična mala voda $Q_{95\%}$ takođe zavisi od geološkog sastava tla na slivu: veće vrednosti pokazuju veće količine podzemnih voda i obrnuto. Iz tog razloga, karte prostornog rasporeda $Q_{95\%}/Q_{sr}$ veoma liče na geološke karte (Arnell, 2002).

11.2.4 Statistički pokazatelji malih voda

Minimalni godišnji n -dnevni protoci. Tipične statističke analize malih voda se sprovode na nizovima minimalnih godišnjih dnevnih ili višednevnih protoka. Obično se razmatraju minimalni godišnji protoci trajanja 1, 7, 10, 20 ili 30 dana. Pod ovim pojmom se podrazumeva najmanji od svih srednjih protoka u uzastopnih n dana u jednoj godini. Da bi se takav protok odredio, potrebno je sračunati pokretne sredine protoka u intervalima od n dana za celu godinu (videti primer u tabeli 11.1) i izdvojiti najmanju vrednost.

Nizovi minimalnih godišnjih n -dnevnih protoka se analiziraju standardnim postupkom statističke analize. Raspodele koje se u opštem slučaju dobro prilagođavaju nizovima minimalnih godišnjih n -dnevnih protoka su log-Pirsonova raspodela III tipa, log-normalna, Vejbulova raspodela (raspodela ekstremnih vrednosti III tipa), kao i uopštena raspodela ekstremnih vrednosti (GEV).

Iz usvojene teorijske raspodele mogu se odrediti kvantili karakterističnih verovatnoća prevazilaženja, odnosno obezbeđenosti p . Na primer, za određivanje garantovanih ekoloških protoka kao merodavni protok često se koristi minimalni godišnji 30-dnevni protok obezbeđenosti 95% ($Q_{30,95\%}$). Ova veličina se dobija kao kvantil iz izabrane raspodele za obezbeđenost $p = 0.95$, odnosno za vrednost funkcije raspodele $F = 1 - p = 0.05$:

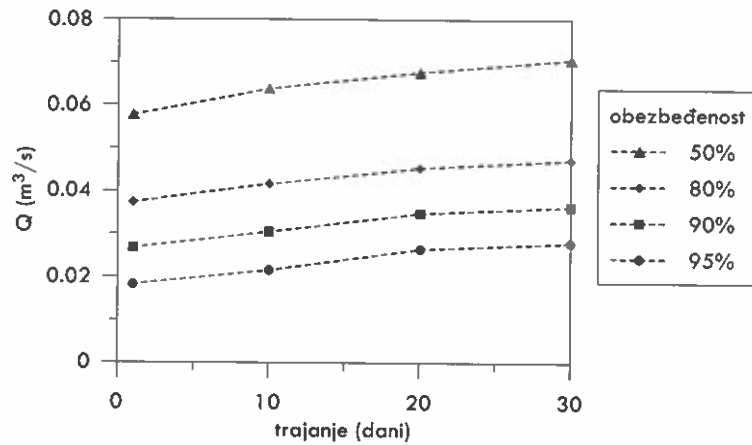
$$Q_{30,95\%} = F^{-1}(0.05) \quad (11.8)$$

Na sličan način mogu se dobiti i drugi kvantili.

Povratni period T minimalnog godišnjeg n -dnevnog protoka x se definiše kao recipročna vrednost verovatnoće neprevazilaženja protoka x , što odgovara recipročnoj vrednosti funkcije raspodele:

Tabela 11.1. Primer proračuna 7-dnevnih i 10-dnevnih srednjih protoka kao pokretnih sredina na osnovu podataka o dnevnim protocima; višednevni protoci pripisuju se poslednjem danu u višednevnom intervalu.

Datum	Protoci (m ³ /s)		
	1-dnevni	7-dnevni	10-dnevni
1.1.2006	10.7		
2.1.2006	9.84		
3.1.2006	9.84		
4.1.2006	8.64		
5.1.2006	8.64		
6.1.2006	8.26		
7.1.2006	7.18	9.01	
8.1.2006	6.54	8.42	
9.1.2006	5.90	7.86	
10.1.2006	6.22	7.34	8.18
11.1.2006	5.90	6.95	7.70
12.1.2006	5.30	6.47	7.24
13.1.2006	5.30	6.05	6.79
14.1.2006	5.00	5.74	6.42
15.1.2006	4.70	5.47	6.03
16.1.2006	4.70	5.30	5.67



Slika 11.2. Računske male vode (dijagram QTP) reke Ljubatske u profilu hidrološke stanice Bosilegrad.

$$T(x) = \frac{1}{P\{X \leq x\}} = \frac{1}{F(x)} \quad (11.9)$$

Raspodele minimalnih godišnjih protoka različitih trajanja se često prikazuju zajedno na dijagramima QTP (protok - trajanje - povratni period). Takav dijagram daje uvid u računске protoke malih voda različitih trajanja i različitih verovatnoća pojave. Primer jednog dijagrama QTP je prikazan na slici 11.2.

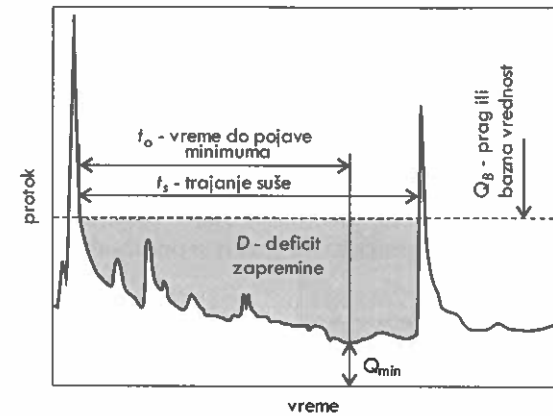
Ako u nizu od N vrednosti minimalnih godišnjih protoka ima N_0 nultih vrednosti, statistička analiza se sprovodi na $N_1 = N - N_0$ podataka. Rezultat takve analize je raspodela $F_1(x)$, koja predstavlja uslovnu raspodelu samo onih protoka koji su veći od nule. Da bi se uzela u obzir i verovatnoća da protoci mogu biti jednaki nuli, a koja se procenjuje kao $p_0 = N_0/N$, primenjuje se formula potpune verovatnoće pa funkcija raspodele minimalnih godišnjih protoka u takvom slučaju glasi:

$$F(x) = p_0 + (1 - p_0)F_1(x) \quad (11.10)$$

Kvantili za verovatnoću neprevazilaženja F iz ovako dobijene raspodele se onda računaju iz inverzne raspodele F_1 na sledeći način:

$$x(F) = F_1^{-1} \left(\frac{F - p_0}{1 - p_0} \right) \quad (11.11)$$

U nedostatku dnevnih podataka iz kojih bi se formirali nizovi minimalnih godišnjih n -dnevnih protoka, kao karakteristične male vode mogu se statistički analizirati minimalni godišnji mesečni protoci. U ovom slučaju u niz ulazi najmanji mesečni protok iz svake godine. Kvantili minimalnih godišnjih mesečnih protoka mogu biti približna zamena za kvantile minimalnih godišnjih 30-dnevnih protoka, ali treba imati u vidu da po pravilu imaju nešto veće vrednosti.



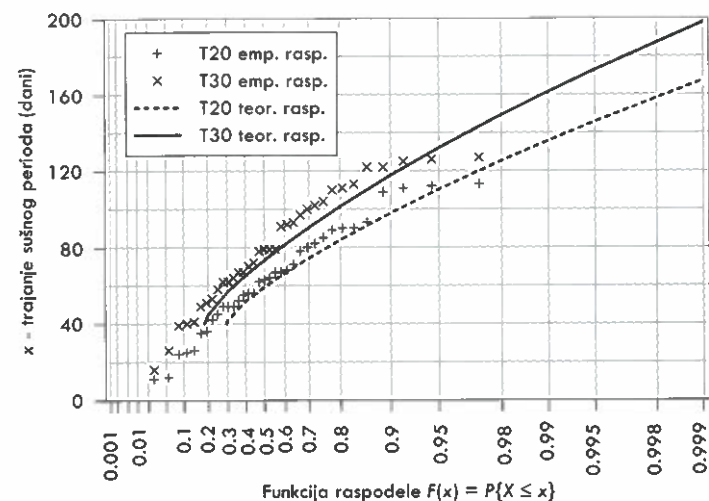
Slika 11.3. Definicije trajanja malovodnog perioda (suše) i deficita zapremine ispod zadatog praga.

11.2.5 Trajanje malovodnog perioda i deficit zapremine

Da bi se odredilo trajanje malovodnog perioda i odgovarajući deficit zapremine, potrebno je definisati određenu vrednost protoka kao prag ispod kojeg smatramo da u vodotoku nema dovoljno vode (slika 11.3). Malovodni period koji se razmatra u odnosu na neki prag počinje kada protoci postanu manji od praga, a završava se kada protoci postanu veći od praga. Vreme između početka i kraja malovodnog perioda predstavlja njegovo trajanje. Deficit zapremine je površina na hidrogramu oticaja koju zahvataju prag i linija hidrograma tokom malovodnog perioda. Deficit zapremine se ponekad naziva i jačina suše (engl. *drought severity*). Odnos deficita zapremine i trajanja pokazuje prosečan protok koji nedostaje tokom malovodnog perioda i naziva se intenzitet suše. Pored ovih veličina, mogu se razmatrati i drugi pokazatelji sušnog perioda, kao što je najmanji protok tokom ovog perioda, kao i vremena početka i kraja sušnog perioda i vreme pojave najmanjeg protoka.

Izbor praga zavisi od zadatka zbog kog se sprovodi analiza malih voda. Prag može biti protok koji odgovara potrebama korisnika za vodom u nekom konkretnom zadatku. U generalnim hidrološkim studijama kada se izučava režim malih voda, prag može da bude izabran prema nekim karakterističnim vrednostima malih voda (npr. $Q_{30,95\%}$) ili se može varirati kako bi se razmotrile karakteristike sušnih perioda za različite pragove. Prag može da bude konstantna vrednost tokom godine ili da se menja po sezonama, mesecima ili i češće u zavisnosti od potrebe.

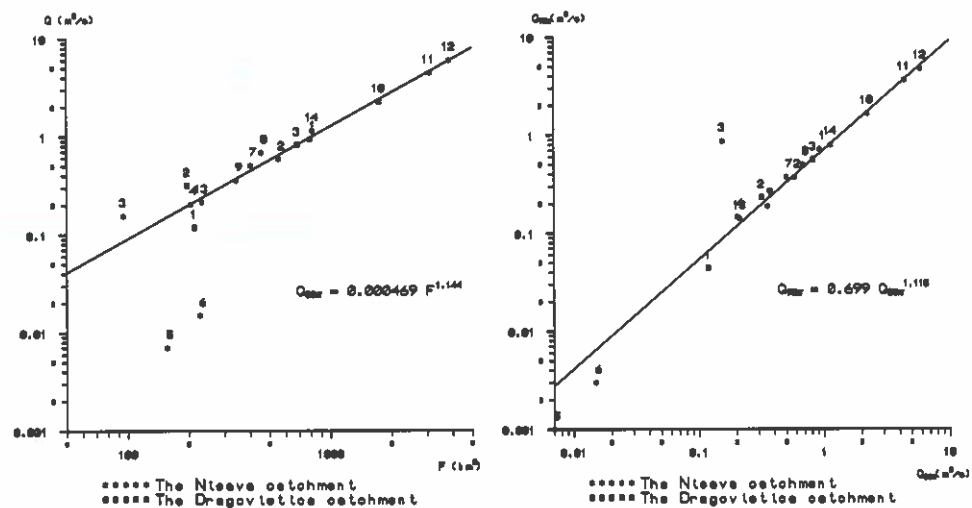
Za statističku analizu veličina vezanih za malovodne periode treba formirati odgovarajuće nizove. Ako se analizira trajanje malovodnog perioda ili deficit zapremine, tada se nizovi sastoje od maksimalnih godišnjih vrednosti ovih veličina. Na slici 11.4 prikazan je primer raspodele trajanja malovodnog perioda ispod dva različita praga. Pored toga, u analizi veličina vezanih za malovodne periode treba voditi računa da su te veličine međusobno povezane (korelisane). Broj sušnih događaja tokom godine ili tokom neke sezone (npr. vegetacione sezone poljoprivrednih kultura) takođe je značajna informacija koju treba analizirati. Sa te tačke gledišta, za statističku analizu malovodnih perioda znatno je pogodnija metoda prekoračenja nego metoda godišnjih maksimuma (Vukmirović i Petrović, 1996).



Slika 11.4. Raspede trajanja sušnih perioda (T30 – trajanje protoka manjih od 30 m³/s, T20 – trajanje protoka manjih od 20 m³/s) na vodomernoj stanici Đurđevića Tara na reci Tari (prema Vukmirović i Petrović, 1996).

11.3 Procena malih voda na neizučnim slivovima

Za ocenu pokazatelja malih voda na neizučnim slivovima mogu se koristiti različiti pristupi, o kojima je bilo reči u delu koji se odnosi na ocenu srednjih voda na neizučnim slivovima. Od velike koristi mogu biti regionalne zavisnosti karakterističnih malih voda od karakteristika slivova. Primer takvih zavisnosti prikazan je na slici 11.5,



Slika 11.5. Regionalne zavisnosti karakterističnih malih voda za jugoistočnu Srbiju (izvor: Ignjatović, 1998).

gde su minimalni 30-dnevni protoci obezbeđenosti 80% dovedeni u vezu sa površinom sliva za region Nišave i Dragovišnice, a potom su u vezu sa njima dovedeni i minimalni 30-dnevni protoci obezbeđenosti 95% (Ignjatović, 1998).

U nedostatku regionalnih zavisnosti sa karakteristikama slivova, informacije sa hidrološki sličnih izučnih slivova se mogu transponovati na neizučni sliv uz nekoliko simultanih merenja u periodu malih voda. Izmerenim protocima malih voda na neizučnom slivu može se dodeliti trajanje koje na krivoj trajanja protoka izučnog sliva ima simultano merenje na izučnom slivu.

12 RAČUNSKE KIŠE

12.1 Pojam računске kiše

Podaci o kišama su najvažniji ulazni podaci za proračun oticaja od kišnih voda. Pored karakteristika slivnih površina, karakteristike kišnih epizoda, kao što je ukupna visina kiše, njeno trajanje i intenziteti kiše tokom trajanja imaju ključni uticaj na formiranje oticaja kišnih voda.

Računska kiša predstavlja kišnu epizodu koja se koristi za proračun oticaja u projektovanju hidrotehničkih objekata. Računska kiša u pojedinim slučajevima može biti neka izabrana osmotrena kišna epizoda, ali je ona po pravilu sintetička epizoda formirana tako da njene karakteristike odražavaju karakteristike osmotrenih kiša na nekoj lokaciji.

Primena računskih kiša je raznovrsna: od korišćenja računskih intenziteta kiše za određivanje maksimalnih protoka u kišnim kolektorima prema racionalnoj metodi, do korišćenja računskih hijetograma kao ulaznih podataka za modele padavine-oticađ da bi se dobili računski hidrogrami velikih voda pri projektovanju retenzija u urbanim sredinama ili dimenzionisanju preliiva na velikim akumulacijama.

Osnovne karakteristike kišnih epizoda su:

- trajanje kiše,
- ukupna visina kiše,
- vremenski raspored intenziteta kiše,
- prostorna neravnomernost kiše na slivu.

U analizi kiša pod trajanjem kiše podrazumeva se fiksirani interval vremena u kome padne neka visina kiše, nezavisno od toga da li je pre ili posle tog intervala vremena bilo još kiše. Ovakva definicija je neophodna da bi visine kiše osmotrene na nekoj lokaciji bile međusobno uporedive. Naime, za jednu kišu se može reći da je veća od druge jedino ako je njena visina tokom istog vremenskog intervala veća od visine druge kiše. Takođe, ovakva definicija trajanja kiše je potrebna zato što za realne kišne epizode ne postoji opšte pravilo kako se definiše početak i kraj kiše, pa time i njihovo trajanje. Realne kiše često imaju prekide u padanju, koji se mogu zanemariti ako su relativno kratki u odnosu na veličinu slivne površine i vreme putovanja vode na njoj, tj. ako nisu dovoljno dugački da se sliv ocedi tokom njih. To praktično znači da bi početke i krajeve kišnih epizoda trebalo odrediti u odnosu na veličinu i karakteristike sliva, što dovodi do toga da nema univerzalne definicije početka i kraja epizode.

Vremenska neravnomernost kiše ogleda se kroz promenu intenziteta kiše tokom njenog trajanja, tj. kroz njihov vremenski raspored. U odeljku 3.4.3 intenzitet kiše je definisan kao promena visine kiše u jedinici vremena. U praktičnim proračunima intenzitet kiše se računa kao odnos priraštaja kiše ΔP i intervala vremena Δt , što znači da $i = \Delta P / \Delta t$ predstavlja prosečan intenzitet tokom Δt . Iz tog razloga intenziteti kiša su uporedivi samo ako su izračunati za isto Δt . Intenzitet kiše se najčešće izražava u mm/min ili mm/h, a koristi se i jedinica $Ls^{-1}ha^{-1}$ ($1 \text{ mm/min} = 167 Ls^{-1}ha^{-1}$). Intenzitet kiše je jedan od najznačajnijih faktora od kojih zavise protoci kišnog oticaja, pa je važno da se promene intenziteta kiše uzmu u obzir u slučajevima u kojima je taj uticaj dominantan.

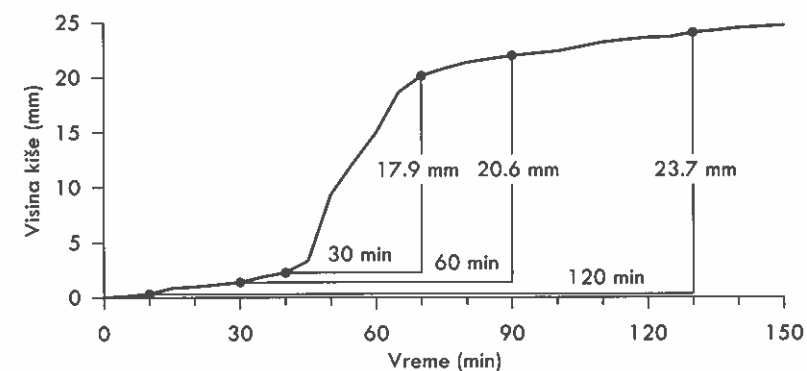
Kiše karakteriše i prostorna neravnomernost, koja je uslovljena reljefom i meteorološkim uslovima. Za određivanje računskih kiša zato treba koristiti podatke osmatranja sa bliskih i reprezentativnih lokacija. Na primer, nije prihvatljivo koristiti podatke sa kišomerne stanice koja je od lokacije objekta odvojena visokim planinama iako je možda blizu po vazdušnoj liniji. Za veće slivne površine potrebno je koristiti podatke sa više stanica na samom slivu ili u njegovoj neposrednoj okolini i odrediti prosečne padavine na slivu nekom od metoda za prostornu interpolaciju (Tisenovi poligoni, metoda recipročnih rastojanja, metoda izohijeta i druge; videti odeljak 3.4.5).

Računska kiša za neku lokaciju definisana je trajanjem, ukupnom visinom i oblikom hijetograma, tj. vremenskom neravnomernošću. U nastavku je opisano kako se ovi elementi računskih kiša utvrđuju.

12.2 Računske visine kiša

Računske visine kiša određenog trajanja određuju se statističkom analizom maksimalnih godišnjih visina kiša razmatranog trajanja.

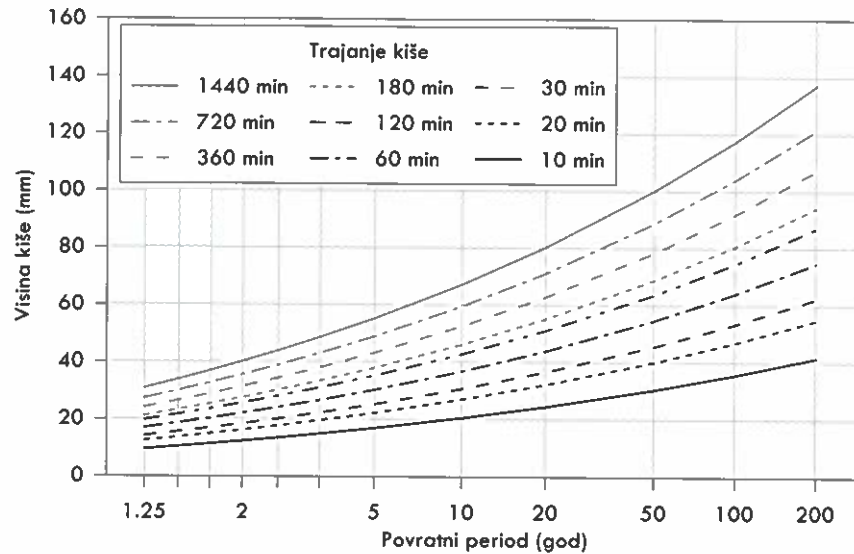
Za tu svrhu, iz podataka osmatranja određuju se maksimalni priraštaji kiše zabeleženi u vremenskim intervalima određenog trajanja. Na primer, za definisanje računске kiše trajanja 30 minuta, u realnoj kišnoj epizodi traži se deo sa najvećom visinom kiše tokom bilo kojih 30 minuta. Za potrebe ovakve analize, podaci se diskretizuju na konstantan mali vremenski interval trajanja 5 minuta (ako je potrebno, može se poći od drugačijeg osnovnog intervala) i pronade se interval sa najvećim priraštajem kiše. Zatim se razmatraju vremenski intervali dužih trajanja koja su umnožak od 5 minuta (npr. 10, 15, 20, ... minuta). Vremenski interval razmatranog trajanja pomera se duž vremenske ose za po 5 minuta dok se ne pronade interval sa maksimalnim priraštajem kiše. U tabeli 12.1 i na slici 12.1 prikazan je primer jedne kišne epizode radi ilustracije postupka određivanja maksimalnog priraštaja kiše za vremenske intervale od 30, 60 i 120 minuta. U drugoj koloni tabele data je sumarna linija kiše za razmatranu epizodu, a u trećoj koloni su određeni 5-minutni priraštaji kiše. U četvrtoj koloni su formirane pokretne sume 30-minutnih visina kiše, a u petoj i šestoj koloni isto je urađeno za priraštaje kiše trajanja 60 i 120 minuta. Pokretna suma se dobija kao razlika ordinata sumarnih linija kiše u tekućem koraku i koraku od pre 30, 60 ili 120 minuta (alternativno, može se dobiti i kao zbir 5-minutnih priraštaja kiše za poslednjih 30, 60 ili 120 minuta). U nizovima pokretnih suma označeni su najveći priraštaji kiša za razmatrana trajanja.



Slika 12.1. Primer proračuna maksimalnih priraštaja za intervale od 30, 60 i 120 minuta.

Tabela 12.1. Primer proračuna maksimalnih priraštaja kiše trajanja 30, 60 i 120 minuta.

Vreme (min)	Sumarna linija kiše (mm)	Priraštaji na			
		5 min	30 min	60 min	120 min
0	0				
5	0.1	0.1			
10	0.3	0.2			
15	0.9	0.5			
20	1.0	0.1			
25	1.2	0.2			
30	1.4	0.2	1.4		
35	1.9	0.5	1.8		
40	2.3	0.4	1.9		
45	3.4	1.1	2.5		
50	9.3	6.0	8.4		
55	12.3	2.9	11.1		
60	15.0	2.7	13.6	15.0	
65	18.7	3.7	16.8	18.5	
70	20.2	1.5	17.9	19.8	
75	20.8	0.7	17.5	20.0	
80	21.4	0.5	12.0	20.4	
85	21.7	0.3	9.4	20.5	
90	22.0	0.3	7.0	20.6	
95	22.2	0.2	3.5	20.3	
100	22.4	0.2	2.2	20.1	
105	22.8	0.4	1.9	19.4	
110	23.2	0.4	1.8	13.8	
115	23.4	0.2	1.7	11.1	
120	23.6	0.2	1.6	8.6	23.6
125	23.7	0.1	1.5	5.0	23.5
130	24.1	0.4	1.7	3.9	23.7
135	24.2	0.2	1.5	3.4	23.4
140	24.5	0.2	1.3	3.1	23.5
145	24.6	0.1	1.2	2.9	23.4
150	24.7	0.1	1.1	2.8	23.3
Maksimalni priraštaj (mm)		6.0	17.9	20.6	23.7



Slika 12.2. Primer funkcija raspodele visina kiša različitih trajanja.

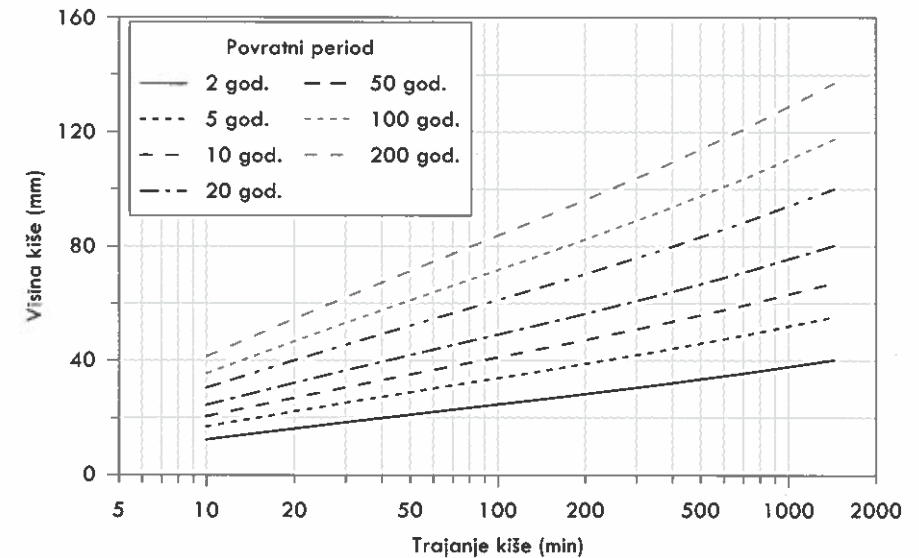
Na osnovu ovako određenih maksimalnih priraštaja kiše za zadata trajanja vremenskih intervala, formiraju se nizovi za statističku analizu. Uobičajeno je da se formiraju nizovi visina kiša za sledeća trajanja: 5, 10, 15, 20, 30, 45, 60, 90, 120, 150, 180, 240, 360, 540, 1080 i 1440 minuta, a po potrebi i trajanja duža od jednog dana. Uzimanjem maksimalnog priraštaja u pojedinim godinama dobijaju se nizovi godišnjih maksimuma visina kiša za svako trajanje.

Računske visine kiša određuju se statističkom analizom osmotrenih kišnih epizoda. U postupku statističke analize usvajaju se teorijske raspodele koje se najbolje prilagođavaju empirijskim raspodelama uzoraka maksimalnih visina kiša određenog trajanja. Kao rezultat, za svako trajanje kiše dobijaju se visine kiša određene verovatnoće pojave (povratnog perioda) ili *računske visine kiša*. Na slici 12.2 prikazan je primer raspodele visina kiša različitih trajanja.

12.3 Zavisnosti visina (intenzitet) kiše – trajanje kiše – povratni period

Računske visine kiša obično se ne prikazuju u formi kao na slici 12.2, već u formi dijagrama na kome se na apscisi nalazi trajanje kiše, na ordinati visina kiše, a povratni period se pojavljuje kao parametar. Drugim rečima, za svaki povratni period konstruiše se zavisnost visine kiše od trajanja kiše. Ovako prikazana zavisnost naziva se *zavisnost visina kiše – trajanje – povratni period* ili zavisnost HTP. Na slici 12.3 prikazan je primer ove zavisnosti, koja je formirana na osnovu raspodela sa slike 12.2. Sa ove slike se može videti da računске visine kiša rastu sa trajanjem kiše i sa povratnim periodom.

Ukoliko se računске visine kiša $P(t_k, T)$ zadatog trajanja t_k i povratnog perioda T podele sa odgovarajućim trajanjem, dolazi se do prosečnih intenziteta kiše tokom datog trajanja:



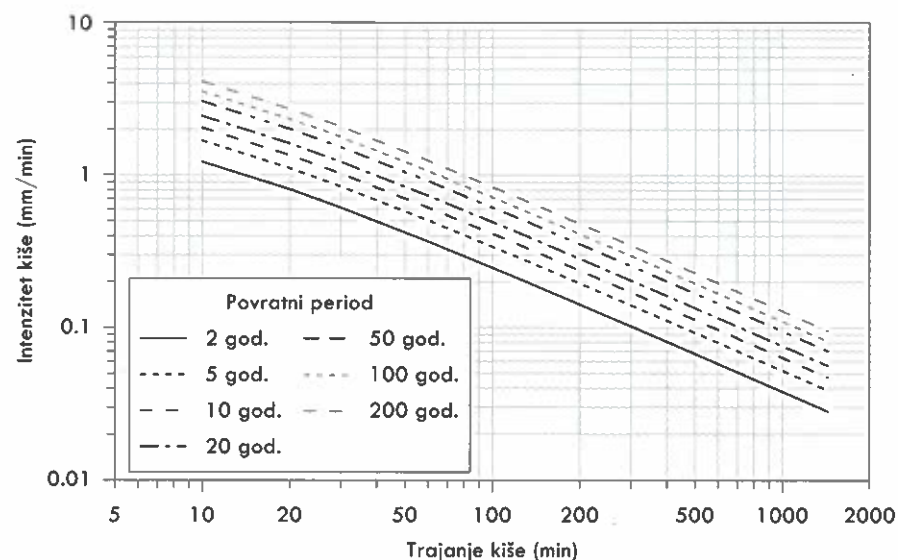
Slika 12.3. Primer zavisnosti visina kiše – trajanje kiše – povratni period (HTP).

$$i(t_k, T) = \frac{P(t_k, T)}{t_k} \quad (12.1)$$

Tada se može formirati *zavisnost intenzitet kiše – trajanje – povratni period* ili zavisnost ITP. Ovaj tip zavisnosti se češće sreće u praksi, što potiče od široke primene racionalne metode u kojoj se maksimalni protoci u kišnim kolektorima računaju na osnovu računskih intenziteta kiše. Na slici 12.4 prikazana je zavisnost ITP koja je pandan zavisnosti HTP na slici 12.3. Sa ove slike se može videti da prosečni intenziteti računskih kiša opadaju sa trajanjem i rastu sa povratnim periodom. Ovo je u skladu sa prirodnom neravnomernošću kiše u vremenu: iako ukupna visina kiše raste sa porastom trajanja, prosečni intenzitet će biti manji sa produžavanjem trajanja jer će tada kiša uključivati i prekide tokom dužih trajanja.

Pri korišćenju zavisnosti ITP ne treba zaboraviti da intenziteti kiše na ovim krivama predstavljaju prosečne intenzitete kiša tokom njihovog trajanja. Ako se u proračunu oticaja koristi kiša konstantnog intenziteta dužeg trajanja, može doći do značajnog potcenjivanja maksimalne ordinate hidrograma zato što se uprosečavanjem intenziteta tokom dužih trajanja zanemaruju vremenska neravnomernost kiše i veći intenziteti koji mogu dovesti do većih protoka. Zbog toga se preporučuje da se najpre odrede računске visine kiša iz zavisnosti HTP, a da se vremenska neravnomernost kiša dodatno uzme u obzir.

Za potrebe određivanja visina kiše, odnosno intenziteta za proizvoljna trajanja, tabelarni i grafički prikazi zavisnosti HTP i ITP mogu se dopuniti i analitičkim oblicima ovih krivih, do kojih se može doći regresionom analizom. Regresione jednačine za zavisnost ITP se obično traže u jednom od sledećih oblika:



Slika 12.4. Primer zavisnosti intenzitet kiše – trajanje kiše – povratni period (ITP).

$$i = \frac{A}{(t_k + C)^B}, \quad i = \frac{AT^D}{(t_k + C)^B} \quad (12.2)$$

gde je i intenzitet kiše, t_k trajanje kiše, T povratni period, a A , B , C i D koeficijenti koji se određuju regresionom analizom. Navedeni oblici se jednostavno linearizuju logaritmovanjem čime se olakšava primena metode najmanjih kvadrata za ocenu parametara u ovim izrazima.

12.4 Konsistentna metoda za određivanje zavisnosti HTP i ITP

Kada se zavisnosti HTP formiraju na osnovu raspodela visina kiše za svako pojedinačno trajanje, dešava se da rezultati ne budu konsistentni u smislu da visine kiša istog povratnog perioda a različitih trajanja ne rastu sa trajanjem. Koutsoyannis i sar. (1998) su predložili metodu za određivanje konsistentnih zavisnosti HTP i ITP kojom se ovi problemi prevazilaze. Osnovna pretpostavka ove metode je da postoji jedinstvena raspodela (transformisanih) intenziteta kiša svih trajanja. Prema ovoj metodi, koristi se opšta formula za zavisnost ITP u obliku u kome se razdvaja uticaj trajanja i verovatnoće pojave:

$$I(t_k, T) = \frac{A(T)}{B(t_k)} \quad (12.3)$$

Deo koji zavisi od trajanja kiše ima oblik stepene funkcije kao u izrazima (12.2):

$$B(t_k) = (t_k + c)^m \quad (12.4)$$

gde su m i c parametri koje treba oceniti (pri čemu je $0 < m < 1$ i $c > 0$). Deo $A(T)$ koji zavisi od povratnog perioda u izrazu (12.3) može se formulisati ako se pretpostavi da intenzitet kiše $I(t_k)$ za neko trajanje t_k prati određenu teorijsku raspodelu:

$$F_{i,t_k}(i) = P\{I(t_k) \leq i\} \quad (12.5)$$

Transformisana slučajna promenljiva Y :

$$Y = I(t_k) \cdot B(t_k) \quad (12.6)$$

ima istu raspodelu kao i intenzitet kiše jer se dobija množenjem intenziteta neslučajnom funkcijom:

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P\{Y \leq y\} = P\{I(t_k) \cdot B(t_k) \leq y\} = \\ &= P\left\{I(t_k) \leq \frac{y}{B(t_k)}\right\} = F_{i,t_k}\left(\frac{y}{B(t_k)}\right) \end{aligned} \quad (12.7)$$

Kako je zapravo $Y = A(T)$, sledi da se ovaj deo opšte formule za zavisnost ITP može dobiti kao kvantil funkcije raspodele promenljive Y :

$$A(T) = Y = F_Y^{-1}(1 - 1/T) \quad (12.8)$$

Sušтина ove transformacije je u tome što se njom pretpostavlja da transformisana promenljiva ima istu raspodelu kao i intenziteti kiša svih trajanja. Oblik $A(T)$ zavisi od pretpostavljene raspodele intenziteta kiše. Za neke raspodele ovaj izraz će imati eksplicitan oblik, ali za neke druge raspodele koje nemaju eksplicitnu inverznu formu (normalna, Pirsonova III tipa), ovaj deo opšte formule se može odrediti iz tablica, približnim formulama ili numeričkim proračunom.

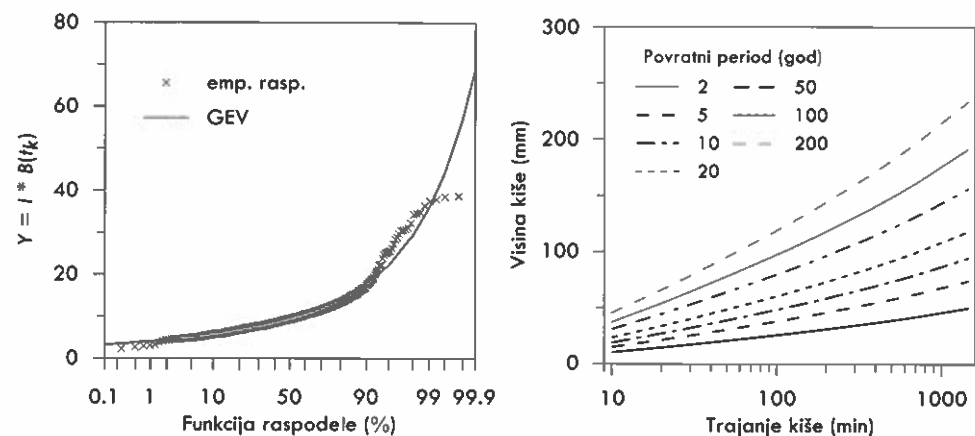
U praktičnoj primeni ove metode potrebno je odrediti parametre c i m u delu $B(t_k)$ i parametre raspodele promenljive $Y = I(t_k) B(t_k)$. Ako se sprovodi analiza intenziteta kiša za različitih K trajanja, tada imamo K nizova intenziteta I_j , $j = 1, 2, \dots, K$, i K odgovarajućih nizova promenljive Y :

$$Y_j = I_j \cdot B(t_{k,j}), \quad j = 1, 2, \dots, K \quad (12.9)$$

Ako se raspolaze sa n godina osmatranja, tada je $N = nK$ ukupan broj vrednosti Y . Parametri c i m u delu $B(t_k)$ određuju se tako da se minimizuje statistika Kruskal-Wallisa:

$$KW = \frac{12}{N(N+1)} \sum_{j=1}^K n_j \left(\bar{r}_j - \frac{N+1}{2} \right)^2 \quad (12.10)$$

gde su n_j dužine nizova intenziteta I_j za pojedina trajanja, N je ukupan broj podataka (tj. $N = n_1 + n_2 + \dots + n_K$, odnosno $N = nK$ za jednake dužine pojedinih nizova), dok je \bar{r}_j srednji rang vrednosti iz niza Y_j u celovitom nizu od svih N vrednosti Y . Ova statistika se koristi jer je hipoteza o jednakosti raspodela K grupa podataka zapravo nulta hipoteza testa Kruskal-Wallisa. Što je vrednost Kruskal-Wallisove statistike manja, to je bliža hipoteza da nizovi intenziteta svih trajanja potiču iz iste raspodele. Za rešavanje optimizacionog problema $KW = f(c, m) \rightarrow \min$ može se primeniti neki optimizacioni algoritam, ali se on može lako rešiti i probanjem, tj. sukcesivnim pretpostavljanjem



Slika 12.5. Primer primene konsistentne metode za određivanje zavisnosti HTP za Banju Luku (Plavšić i sar., 2015): jedinstvena raspodela transformisanih intenziteta svih trajanja (levo) i rezultujuće zavisnosti HTP (desno).

vrednosti parametara c i m i njihovim korekcijama do dostizanja minimuma. Koutsoyannis i sar. (1998) preporučuju da se ocena parametara dela $B(t_k)$ sprovodi samo na podacima većeg intenziteta, odnosno da se u proračunu zadrži samo npr. polovina ili trećina najvećih vrednosti Y za svako trajanje.

U drugom delu određivanja zavisnosti ITP formira se celovit niz svih vrednosti Y sa ocenjenim parametrima m i c (sada se radi sa svim vrednostima Y , a ne samo sa najvećim). Prema pretpostavci da sve ove vrednosti prate istu raspodelu, traži se teorijska raspodela koja se najbolje prilagođava ovim podacima. Usvajanjem raspodele dolazi se i do oblika i vrednosti parametara dela $A(T)$, čime se postupak završava.

Radi preglednosti, postupak definisanja opšte formule prema predloženoj metodi rezimiran je kroz sledeće korake (Plavšić i sar., 2015):

1. Pretpostave se vrednosti parametara c i m u formuli (12.4).
2. Primenom formule (12.9) izračunaju se vrednosti promenljive Y za sva trajanja $t_{k,j}$, $j = 1, 2, \dots, K$.
3. Za sva trajanja izdvoji se deo nizova Y sa najvećim vrednostima (npr. ako su za sva trajanja na raspolaganju podaci iz 45 godina, zadržava se najvećih 15-20 podataka). Na taj način u analizi ostaje N^* podataka od ukupno N podataka.
4. Odrede se rangovi N^* vrednosti promenljive Y . Najveća vrednost dobija rang 1, dok najmanja dobija rang N^* . Za vrednosti koje se ponavljaju računa se srednji rang tih vrednosti.
5. Za svako trajanje $t_{k,j}$ odredi se prosečan rang \bar{r}_j i računa se statistika KW prema formuli (12.10) uz $N = N^*$.
6. Vrednosti parametara c i m se variraju dok se ne dođe do najmanje vrednosti KW .
7. Sa usvojenim vrednostima c i m formira se ceo niz od N vrednosti Y prema formuli (12.9).
8. Formira se empirijska raspodela za niz Y .

9. Pretpostavlja se teorijska raspodela za niz Y i ocenjuju se njeni parametri standardnim metodama. Može se pretpostaviti više različitih teorijskih raspodela i izabrati najbolja na osnovu testova saglasnosti, osobina raspodele i vizuelne provere na papirima verovatnoće.

Slika 12.5 ilustruje primenu ove metode na podacima o kratkotrajnim kišama u Banjoj Luci. Na levom dijagramu na ovoj slici prikazana je jedinstvena raspodela transformisanih intenziteta kiše svih trajanja Y , dok je na desnom dijagramu data rezultujuća zavisnost HTP. Opisani postupak se pokazao kao robustna metoda kojom se mogu prevazići problemi (kao što su prekidi i greške u merenjima, kratki nizovi) zbog kojih konstrukciju zavisnosti HTP često prate nelogičnosti i nekonsistentni rezultati. Iz navedenih razloga ovaj pristup se preporučuje za praktične proračune u inženjerskoj praksi.

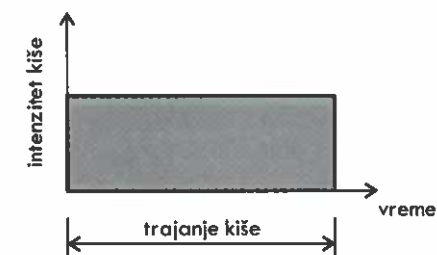
12.5 Oblici računskih kiša

12.5.1 Računska kiša konstantnog intenziteta ili „blok kiša“

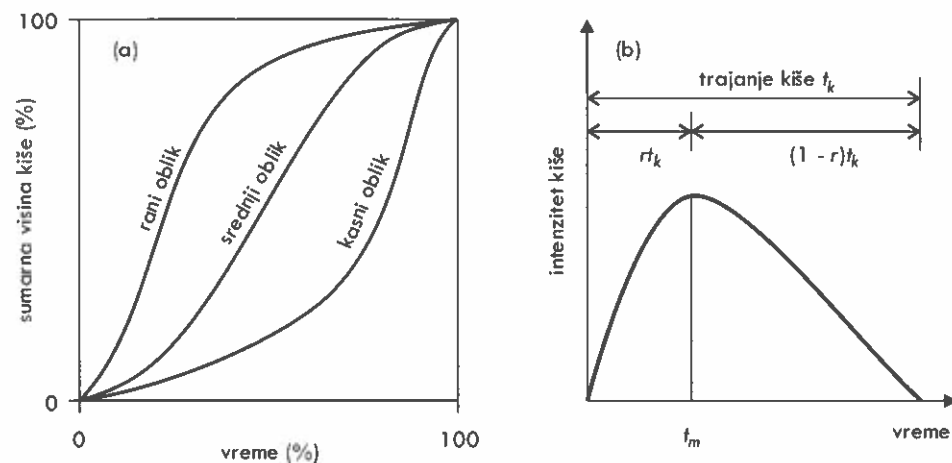
Računska kiša sa konstantnim intenzitetom ima oblik hijetograma u obliku pravougona, pa se naziva i „blok kiša“ (slika 12.6). Blok kiša je najjednostavniji oblik računске kiše i dobija se direktnom primenom zavisnosti ITP. Za razmatrani povratni period i izabrano trajanje kiše, zavisnosti ITP daće prosečan intenzitet kiše tokom njenog trajanja. Primena ovog računskog oblika kiše je opravdana samo za najkraća trajanja (do 30 minuta) jer se za duža trajanja ne može očekivati da je intenzitet kiše ravnomeran.

12.5.2 Računske kiše neravnomernog intenziteta

Računski oblici kiša služe da se u proračune uvede vremenska neravnomernost koja što približnije opisuje tipične intenzitete osmotrenih kišnih epizoda. Računske kiše neravnomernog intenziteta doprinose većoj tačnosti proračuna oticaja, a naročito maksimalne ordinate hidrograma, u poređenju sa kišama konstantnog intenziteta. Istraživanja pokazuju da neravnomerne računске kiše po pravilu proizvode veći oticaj od ravnomernih (Despotović i sar., 1996) i da to važi za kiše svih trajanja osim najkraćih. Kako se u primarnoj obradi podataka osmatranja padavina visina kiše očitava u



Slika 12.6. Blok kiša ili računска kiša konstantnog intenziteta.



Slika 12.7. Tipovi oblika računskih kiša u zavisnosti od vremena pojave najvećeg intenziteta.

intervalima od 5 do 10 minuta, tako se može smatrati da se osrednjavanjem intenziteta tokom nekoliko takvih intervala (do najviše 30 minuta) ne gubi na preciznosti opisa promene intenziteta kiše.

U zavisnosti od vremena pojave najvećeg intenziteta tokom trajanja kiše, oblici kiše se dele na rane (veći intenziteti na početku kiše) i kasne (veći intenziteti na kraju kiše), što je shematski prikazano na slici 12.7-a. U opštem slučaju, maksimalni intenzitet računске kiše javiće se u nekom trenutku $t_m = rt_k$ (slika 12.7-b), gde je r koeficijent koji ima vrednost između 0 i 1 i pokazuje procenat trajanja kiše pre pojave maksimalnog intenziteta (na primer, za $r = 0.25$ maksimalni intenzitet se javlja na jednoj četvrtini trajanja kiše, a za $r = 0.75$ na tri četvrtine trajanja kiše).

Najkritičniji oblik za formiranje oticaja obično se bira probanjem. Merodavnim oblikom računске kiše smatra se onaj koji daje najveći sračunati oticaj. U nekim slučajevima rani oblik kiše može da proizvede manji maksimalni protok jer se najveći intenziteti javljaju istovremeno sa najvećim gubicima (infiltracija, zadržavanje u depresijama) koji su najveći na početku kiše, dok kasni oblik može da proizvede veći maksimalni protok jer se najveći intenzitet javlja kasnije tokom epizode kada su gubici manji ili kada dođe do zasićenja tla.

Vremenska raspodela ili oblik računске kiše može se formirati na različite načine. Sintetički oblici računskih kiša su oni kod kojih se usvoji vreme pojave najvećeg intenziteta, a zatim se intenziteti rasporede prema nekom rasporedu. U takve računске kiše spada računska kiša sa naizmeničnim blokovima opisana u narednom poglavlju. U literaturi se mogu naći mnogi sintetički oblici kiša koji su rezultat lokalnih istraživanja pojedinih autora, ali nije preporučljivo da se takvi oblici transponuju iz drugačijih klimatskih oblasti. Statistički oblici računskih kiša su oni do kojih se dolazi statističkom obradom oblika većeg broja osmotrenih epizoda. Ovi oblici kiša opisani su u odeljku 12.5.4.

Vremenska raspodela neravnomernih kiša opisuje se sa prigodnom vremenskom diskretizacijom, pri čemu izabrani vremenski interval ne bi trebalo da bude manji od najkraćeg trajanja u zavisnosti HTP.

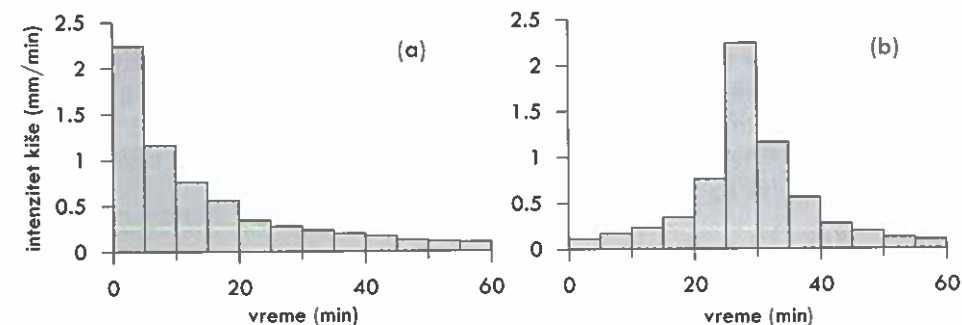
U nastavku se prikazuju dva načina za formiranje neravnomernih računskih kiša koji se preporučuju za primenu u inženjerskoj hidrologiji: računska kiša sa naizmeničnim blokovima i statistički oblici računskih kiša. U literaturi se mogu naći i druge metode, ali treba biti obazriv sa primenom onih koje su rezultat lokalnih uslova drugačijih od uslova primene.

12.5.3 Kiša sa naizmeničnim blokovima

Radi se o jednostavnom načinu za formiranje vremenski neravnomerne kiše na osnovu zavisnosti HTP. Trajanje kiše t_k se podeli na n vremenskih intervala dužine Δt . Vremenski interval ne može da bude manji od najkraćeg raspoloživog trajanja u zavisnosti HTP. Za izabrani povratni period, iz zavisnosti HTP se uzimaju visine kiša trajanja Δt , $2\Delta t$, $3\Delta t$, itd. Tako određene visine kiša se zatim posmatraju kao ordinate sumarne linije kiše, pa se računaju priraštaji i intenziteti kiše u svakom intervalu Δt . Potom se vremenski intervali i odgovarajući intenziteti kiše pregrupuju tako da se interval sa najvećim intenzitetom nađe u sredini celokupnog trajanja kiše, dok se ostali intervali tj. „blokovi“ ređaju u opadajućem redosledu po veličini naizmenično desno i levo od centralnog bloka da bi se formirao hijetogram računске kiše (slika 12.8-b).

Na opisan način, blok sa maksimalnim intenzitetom se nalazi u sredini kiše, što daje centriran oblik kiše. Neki drugi oblik se može dobiti tako što se blok sa maksimalnim intenzitetom postavi na neko drugo mesto, dok se ostali blokovi raspoređuju na isti način. Ako se blok sa maksimalnim intenzitetom postavi npr. na prvoj četvrtini trajanja, preostali blokovi se ređaju po veličini desno i levo od tog bloka do popunjavanja prve i druge četvrtine trajanja; zatim se preostali blokovi poređaju po opadajućim intenzitetima u drugoj polovini trajanja.

Primer 12.1. Na osnovu poznatih računskih visina kiša povratnog perioda 5 godina za stanicu Beograd-Vračar (Plavšić i Pavlović, 2005), datih u prve dve kolone tabele 12.2, za isti povratni period odrediti računsku kišu trajanja 60 minuta neravnomernog intenziteta metodom naizmeničnih blokova.



Slika 12.8. Neravnomerna računska kiša dobijena metodom naizmeničnih blokova u primeru 12.1: (a) intenziteti kiše dobijeni iz zavisnosti HTP, (b) preuređeni blokovi koji daju konačni sintetički oblik računске kiše.

Tabela 12.2. Primer proračuna računске kiše sa naizmeničnim blokovima (stanica Vračar, trajanje kiše 60 minuta, povratni period 5 godina).

Iz zavisnosti HTP		Proračun po blokovima		Preuređeni blokovi	
Trajanje kiše (min)	Visina kiše (mm)	Priraštaj kiše (mm)	Intenzitet kiše (mm/min)	Vreme (min)	Intenzitet kiše (mm/min)
5	11.2	11.2	2.240	0-5	0.112
10	17.0	5.8	1.160	5-10	0.171
15	20.8	3.8	0.760	10-15	0.232
20	23.6	2.8	0.560	15-20	0.345
25	25.3	1.7	0.345	20-25	0.760
30	26.7	1.4	0.275	25-30	2.240
35	27.9	1.2	0.232	30-35	1.160
40	28.8	1.0	0.197	35-40	0.560
45	29.7	0.9	0.171	40-45	0.275
50	30.3	0.6	0.126	45-50	0.197
55	30.9	0.6	0.112	50-55	0.126
60	31.4	0.5	0.101	55-60	0.101

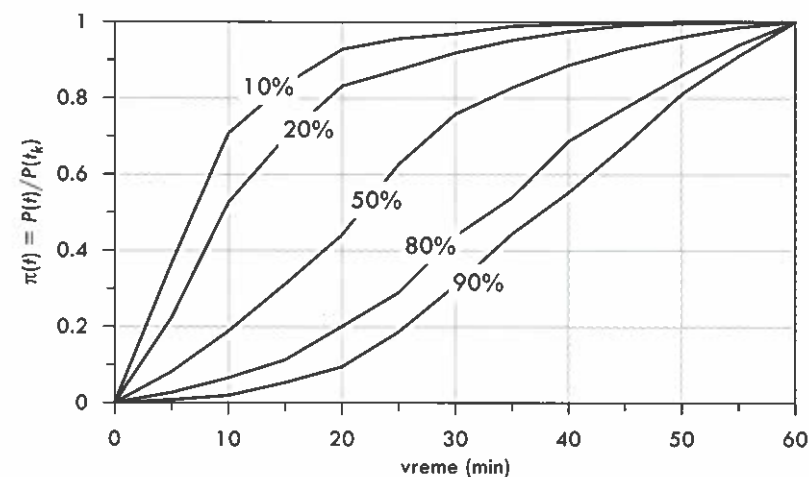
Rešenje. U tabeli 12.2 prikazan je proračun neravnomerne računске kiše sa naizmeničnim blokovima, trajanja 60 minuta i povratnog perioda 5 godina, sa računskim intervalom od $\Delta t = 5$ minuta. Sa zadatim podacima u prve dve kolone, proračun počinje određivanjem priraštaja i intenziteta kiše za svaki interval od 5 minuta (treća i četvrta kolona u tabeli 12.2). Intenziteti kiše dobijeni na ovaj način prikazani su na slici 12.8-a. Da bi se dobila kiša neravnomernog intenziteta u kojoj je blok sa maksimalnim intenzitetom centriran, u poslednjoj koloni tabele 12.2 intenziteti kiše se preraspoređuju tako što se najveći intenzitet od 2.24 mm/min stavlja u interval od 25 do 30 minuta, dok se drugi intenzitet po veličini od 1.16 mm/min stavlja u interval od 30 do 35 minuta. Ostali intenziteti po veličini se dalje raspoređuju redom levo i desno od dva centralno postavljena bloka, da bi se dobio raspored intenziteta kao na slici 12.8-b.

12.5.4 Statistički oblici kiša

Statistički oblici računskih kiša dobijaju se statističkom obradom osmotrenih hijetograma većeg broja kišnih epizoda (Vukmirović & Despotović, 1984). Najčešće se koriste epizode iz kojih potiču maksimalne godišnje visine kiša razmatranih trajanja na osnovu kojih su formirane zavisnosti HTP. Kišne epizode se razvrstaju po trajanju, a zatim se za svako trajanje prikazuju u bezdimenzionalnom obliku, tj. sa bezdimenzionalnim vremenom $\tau = t / t_k$ i bezdimenzionalnom visinom kiše π :

$$\pi(\tau) = \frac{P(t)}{P(t_k)}, \quad \tau = \frac{t}{t_k} \quad (12.11)$$

Potom se, za određeni broj vremenskih preseka τ , formiraju empirijske raspodele ordinate bezdimenzionalne sumarne linije π iz svih osmotrenih kišnih epizoda (npr. za $\tau = t / t_k = 0.2$, ovu raspodelu čine ordinate $\pi(0.2)$ bezdimenzionalnih sumarnih linija



Slika 12.9. Statistički oblici računskih kiša različitih verovatnoća pojave (pluviografska stanica Kraljevo, trajanje kiše 60 minuta, povratni period 10 godina).

svih osmotrenih epizoda). Za fiksirano τ , iz empirijske raspodele niza vrednosti π određuju se kvantili vrednosti π različitih verovatnoća pojave. Spajanjem istih kvantila za svako razmatrano τ formiraju se bezdimenzionalne sumarne linije računskih kiša različite verovatnoće pojave za zadato trajanje (popularno nazvane π - τ krive), čime se definišu računski oblici kiša. Oblik kiše verovatnoće pojave $q\%$ znači da postoji verovatnoća od $q\%$ da se javi kiša strmija od tog oblika. Primer π - τ krivih dat je na slici 12.9, na kojoj oblik označen sa npr. 80% jeste oblik za koji se očekuje da 80% kiša bude strmije od njega.

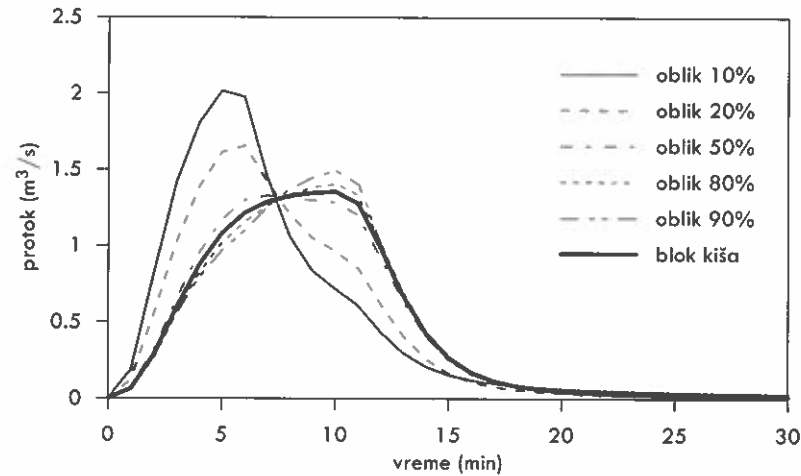
Sumarna linija računске kiše trajanja t_k , povratnog perioda T i za izabrani oblik verovatnoće $q\%$ dobija se tako što se odgovarajući bezdimenzionalni oblik $\pi_q(\tau)$ pomnoži sa visinom računске kiše trajanja t_k i povratnog perioda T iz zavisnosti HTP:

$$P_q(t, T) = \pi_q(\tau) \cdot P(t_k, T) \quad (12.12)$$

Na slici 12.10 prikazan je primer proračuna hidrograma oticaja na malom gradskom eksperimentalnom slivu površine 25 ha (u naselju Miljakovac 2 u Beogradu) sa statističkim oblicima računskih kiša. Hidrogrami su dobijeni simulacijama pomoću modela BEMUS (Radojković & Maksimović, 1984). Na ovoj slici se može videti da praktično svi neravnomerni oblici računskih kiša daju veću maksimalnu ordinatu hidrograma nego ravnomerna blok kiša. To ukazuje na neophodnost uvođenja vremenske neravnomernosti kiša u proračun oticaja ne samo na većim slivovima sa dužim vremenom koncentracije, već i na malim slivovima.

12.6 Računske kiše na slivu

Određivanje visine računskih kiša za neki sliv podrazumeva da se odredi zapremina pale vode na sliv. Ukoliko na slivu ili u njegovoj neposrednoj blizini ima više lokacija sa pluviografima, a time i sa definisanim zavisnostima HTP, tada se zapremina



Slika 12.10. Hidrografi otcajanja na eksperimentalnom slivu Miljakovac 2 u Beogradu usled računskih kiša različitih oblika, trajanja 10 minuta povratnog perioda 2 godine.

pale vode na slivu i prosečna visina kiše na slivu mogu odrediti nekom od poznatih metoda za prostornu analizu kiša (npr. Tisenovi poligoni).

U slučaju kada na slivu postoji jedna stanica, mogu se primeniti dva pristupa. Prema prvom pristupu, može se usvojiti da je prosečna računaska visina kiše na slivu jednaka visini računske kiše u tački stanice. Ovo je tzv. *koncept centra oluje* koji pretpostavlja da se sliv uvek nalazi u centru kišnog sistema sa padavinama izmerenim u tački.

Prema drugom pristupu, može se usvojiti da je prosečna računaska visina kiše na slivu manja od računske visine kiše u tački. Ovo je tzv. *koncept fiksne lokacije* koji pretpostavlja da padavine izmerene u tački nekad predstavljaju padavine u centru kišnog sistema, a nekada na njegovom obodu. Prema ovom pristupu primenjuje se tzv. *prostorna redukcija računskih kiša*. Faktor sa kojim se kiše smanjuju se naziva *faktor prostorne redukcije (FPR)* i predstavlja koeficijent kojim se množi računaska visina kiše u tački P_{stan} da bi se ocenila računaska visina kiše na slivu P_{sliv} :

$$P_{sliv}(t_k, T) = FPR \cdot P_{stan}(t_k, T) \quad (12.13)$$

Faktor prostorne redukcije zavisi od veličine sliva i od trajanja kiše i ima vrednosti manje od 1, dok za $FPR = 1$ nema redukcije. O prostornoj redukciji se detaljnije govori na kraju ovog odeljka.

Kada na slivu nema reprezentativne pluviografske stanice niti u njegovoj neposrednoj blizini, u inženjerskim zadacima se pribegava *transpoziciji zavisnosti HTP* sa jedne obližnje stanice ili više njih uz korišćenje podataka o računskim dnevnim kišama sa neregistrujućih kišomera. Uobičajeni problem koji se javlja u praksi jeste da su podaci o kratkotrajnim jakim kišama dostupni na malom broju lokacija zbog male gustine pluviografske mreže. Samim tim, zavisnosti HTP i ITP nisu uvek dostupne za razmatranu lokaciju. S druge strane, mreža padavinskih stanica je po pravilu znatno veće gustine i do podataka o dnevnim kišama se lakše dolazi, pa određivanje računskih

dnevnih kiša ne predstavlja problem. U takvim situacijama moguće je iskoristiti raspoloživu zavisnost HTP i korigovati je u odnosu na raspoložive računske dnevne kiše. Postupak se opisuje u nastavku.

Ako na slivu i njegovoj neposrednoj okolini ima N padavinskih stanica, tada se statističkom analizom nizova maksimalnih godišnjih dnevnih padavina mogu odrediti računske dnevne kiše traženog povratnog perioda T :

$$P_{dn,k}(T), \quad k = 1, 2, \dots, N$$

Računska visina dnevne kiše na slivu se zatim može odrediti nekom metodom za proračun prosečnih padavina na slivu. Na primer, ako se primeni metoda Tisenovih poligona, prosečna dnevna kiša na slivu povratnog perioda T je:

$$P_{dn,sliv}(T) = \frac{1}{A} \sum_{k=1}^N A_k \cdot P_{dn,k}(T)$$

gde je A_k površina poligona koja odgovara stanici k , a A je ukupna površina sliva (pri čemu je $A = A_1 + A_2 + \dots + A_N$). Pored toga, neka je $P_{dn}(T)$ računaska dnevna kiša za lokaciju pluviografske stanice za koju je na raspolaganju zavisnost HTP. Tada se formira bezdimenzionalna zavisnost HTP u odnosu na računsku visinu dnevne kiše:

$$X(t_k, T) = \frac{P(t_k, T)}{P_{dn}(T)}$$

Bezdimenzionalne krive HTP se nekad nazivaju i *redukcione krive*. Bezdimenzionalna zavisnost HTP se prenosi na sliv od interesa tako što se množi prosečnom visinom računske dnevne kiše na slivu:

$$P_{sliv}(t_k, T) = X(t_k, T) \cdot P_{dn,sliv}(T)$$

Pri korišćenju dnevnih kiša sa padavinskih stanica treba imati na umu da se one mere u fiksiranom intervalu od 24 sata koji počinje u 7 sati jednog dana i traje do 7 sati narednog dana. S druge strane, 24-časovne kiše sa pluviografa predstavljaju najveće kiše u pokretnom intervalu od 24 sata. Iskustva sa velikim brojem podataka pokazuju da su maksimalne godišnje 24-časovne kiše veće od maksimalnih godišnjih dnevnih kiša sa padavinskih stanica u proseku za 13% (WMO, 2009a).

Ukoliko se raspolaže zavisnostima HTP na više pluviografskih stanica izvan sliva, tada se interpolacijom (opet npr. metodom Tisenovih poligona) može doći do prosečne zavisnosti HTP na slivu. Međutim, treba proveriti da li su sve sa raspoloživim krivama HTP lokacije reprezentativne za padavine na razmatranom slivu da bi se na ovaj način uzele u obzir pri određivanju računskih kiša za neki sliv.

Prostorna redukcija. Zbog velike prostorne neravnomernosti jakih kiša (koje su po pravilu pluskovitog karaktera) smatra se da merenja padavina u jednoj tački na slivu mogu da posluže za pouzdanu ocenu pale vode jedino na slivovima male površine, jer se jedino kod malih slivova može pretpostaviti da je kišni sistem prekrpio ceo sliv. U suprotnom, kod iole većih slivova, smatra se da su prosečne padavine na slivu manje nego padavine izmerene u tački i da pri usvajanju računskih visina kiša iz zavisnosti HTP za lokaciju stanice na slivu treba primeniti prostornu redukciju kiša.

Faktor prostorne redukcije (FPR) u formuli (12.13) sa kojim se računске kiše smanjuju da bi se ocenila računска visina kiše na slivu zavisi od veličine sliva i od trajanja kiše. Na slivovima manje površine redukcija je manja, a na većim obrnuto. Za $FPR = 1$ nema redukcije. Takođe, redukcija je veća za kraće kiše, a manja za duže.

Do faktora prostorne redukcije se dolazi korišćenjem podataka iz mreže pluviografa tako što se formiraju karte izohijeta osmotrenih kišnih epizoda sa najvećim visinama kiše za svako izabrano trajanje. Određivanjem površina unutar pojedinih izohijeta može se nacrtati dijagram prosečne visine kiše u zavisnosti od površine za svako trajanje (Chow i sar., 1988). Zavisnost faktora prostorne redukcije od veličine sliva treba razviti za lokalne klimatske uslove da bi se dobili pouzdani rezultati, dok zavisnosti koje se mogu naći u literaturi treba uzimati s rezervom i verifikovati za lokalne uslove (WMO, 2009a). Među poznatijim zavisnostima su one koje je objavio NERC (1975) u tabelarnoj formi, a za koje su Efstratiadis i sar. (2014) dali sledeću regresionu jednačinu:

$$FPR = \max\{0.25; 1 - 0.048A^{0.36 - 0.01 \ln A} t_k^{-0.35}\} \quad (12.14)$$

gde je A površina sliva u km^2 , a t_k trajanje kiše u satima.

Koncept prostorne redukcije je često meta kritike u literaturi jer se pokazalo da FPR zavisi još i od vrste padavina (konvektivne, frontalne, tropske itd.) kao i od povratnog perioda kišnih događaja (Wright i sar., 2014). Efstratiadis i sar. (2014) smatraju da FPR predstavlja uprošćen pristup koji ne može da obuhvati sve neizvesnosti vezane za prostorni i vremenski raspored padavina i može da proizvede velike greške, naročito u oblastima sa kompleksnom topografijom. Greške u oceni FPR mogu da proizvedu i velike greške u proceni računskih kiša i protoka.

13 ANALIZA VELIKIH VODA

13.1 O velikim vodama

Pod velikim vodama se podrazumevaju povećani protoci i vodostaji na rekama. Poplave su posledica velikih voda koje izazivaju izlivanje vode iz rečnog korita i plavljenje priobalnog područja. Naglo povećanje protoka i vodostaja, dostizanje maksimuma i postepeno opadanje nazivamo talasom velike vode ili poplavnim talasom.

Uzroci pojave velikih voda i poplava mogu biti prirodni i antropogeni. Najčešći prirodni uzroci nastanka poplava su velike kiše, topljenje snega ili kombinacija ove dve pojave. Takvi uslovi mogu da dovedu i do ekstremnog podizanja nivoa podzemnih voda, kao i do podizanja vode u jezerima, zbog čega takođe može doći do plavljenja okolnog terena. Pored ovih prirodnih uzroka, poplave mogu nastati i usled nagomilavanja leda na rekama i formiranja ledenih barijera koje smanjuju proticajni profil reke, zbog čega može doći do izlivanja iz rečnog korita. Antropogeni uticaji na velike vode su dvojaki. S jedne strane, poplavni talas se može ublažiti izgradnjom objekata za zaštitu od velikih voda, kao što su nasipi, akumulacije ili retenzije, a sa druge strane uslovi za formiranje poplava se pogoršavaju kroz aktivnosti, kao što su urbanizacija, krčenje šuma ili zaposedanje rečnih dolina. Do poplava može doći i usled rušenja brana ili nasipa. U ovoj knjizi se govori samo o velikim vodama nastalim usled obilnih padavina.

Na veličinu velikih voda utiču mnogi faktori. Značajnu ulogu ima površina sliva. Na manjim slivovima velike vode mogu da budu kritičnije zbog prirode padavina, jer kratkotrajne intenzivne kiše po pravilu zahvataju manje površine. Zato na malim prirodnim slivovima postoji rizik od tzv. bujičnih poplava koje karakteriše brza koncentracija oticaja i kratko vreme putovanja poplavnog talasa. Na većim slivovima uzrok velikih voda mogu biti dugotrajne slabe kiše ili topljenje snega, što čini da talasi velikih voda traju duže. Što je veći deo sliva zahvaćen kišom ili topljenjem snega, to su talasi velikih voda na većim rekama ekstremniji.

Poplave ugrožavaju naselja, infrastrukturu i živote ljudi u dolinama reka, a destruktivne su i za ekosisteme. Zbog toga se može reći da su poplave jedan od gorućih društvenih problema. U mnogim područjima u svetu poplave su prirodna nepogoda koja nanosi najveću štetu i u materijalnom smislu i u ljudskim životima. U poslednjih nekoliko decenija štete od poplava i broj žrtava se povećavaju (Barredo, 2009; Jongman i sar., 2014). I u našoj zemlji dešavale su se poplave sa katastrofalnim posledica-

ma. Najsvežija u pamćenju je poplava iz maja 2014. godine, čiji su uzrok bile obilne dugotrajne padavine na velikom prostoru koje su dovele do katastrofalnih poplava na slivu reke Save i na drugim slivovima u Srbiji (Kolubara, Jadar, delovi slivova Zapadne i Velike Morave). Poplave su načinile ogromne štete na području tri države: Srbije, Hrvatske i Bosne i Hercegovine, uz značajan broj ljudskih žrtava (Plavšić i sar., 2014). U Srbiji je bilo ugroženo oko 1,6 miliona ljudi u 38 opština u centralnoj i zapadnoj Srbiji (Vlada Republike Srbije, 2014). Najteže je bio pogođen Obrenovac u kome je broj ljudskih žrtava bio veliki i gde su se visoki nivoi vode zadržali nedeljama posle ovog događaja. Povratni period trodnevne kiše registrovane u Beogradu i Valjevu od oko 170 mm ocenjen je na oko 600 godina (Prohaska i sar., 2014), dok je za rekonstruisani maksimalni protok Kolubare na stanici Beli Brod od oko 1300 m³/s procenjeno da ima povratni period od oko 400 godina (Prohaska i sar., 2016).

U novije vreme promovisan je koncept integralnog upravljanja rizikom od poplava (kroz Direktivu o proceni i upravljanju rizicima od poplava Evropske unije; EU, 2007), kojim se na celovit način sagledava ugroženost i potencijalni rizik od poplava. Rizik od poplava se meri verovatnoćom pojave njihovih negativnih posledica (šteta), a posredno i verovatnoćom pojave same velike vode. Kako ta verovatnoća nikad ne može biti jednaka nuli, opasnost od poplava i njihovih posledica ne mogu se u potpunosti eliminisati ili izbeći, ali se mogu ublažiti ako se preduzmu mere zaštite od poplava u skladu sa potrebama društva, razvojnom politikom i ekonomskom opravdanošću (Yevjevich, 1994; Plate, 2002).

Dakle, prvi korak u proceni rizika od poplava, planiranju mera zaštite i projektovanju objekata za zaštitu od velikih voda je analiza verovatnoće pojave velikih voda, što je zadatak inženjerske hidrologije. Iz te analize proizilaze i merodavne veličine za projektovanje objekata i sistema zaštite.

13.2 Računske i merodavne velike vode

Velike vode se opisuju maksimalnim protokom poplavnog talasa, zapreminom poplavnog talasa ili celim hidrogramom talasa. Svaki od ovih pokazatelja velikih voda je važan za različite objekte koji služe za zaštitu od velikih voda (akumulacije, retenzije¹¹, nasipi pored reka, drenažni kanali, kišna kanalizacija itd.) kao i za zaštitu objekata drugih namena od velikih voda (saobraćajnice, mostovi i propusti itd.).

U okviru hidroloških analiza velikih voda određuju se *računske velike vode*, pod kojim se podrazumevaju maksimalni protoci, zapremine ili celi talasi velike vode određene verovatnoće pojave. *Merodavne velike vode* za projektovanje objekata su računске velike vode izabrane na osnovu željenog stepena zaštite ili dopustivog rizika od velikih voda. Merodavna velika voda je zato najveća velika voda koju objekat može bezbedno da prihvati, dok se funkcionisanje projektovanih rešenja može proveriti i za uslove pojave računskih velikih voda većih od merodavne.

¹¹ Zadatak akumulacija i retenzija je da ublaže poplavne talase tako što će privremeno zadržavati vodu i smanjiti maksimalne protoke talasa, a time i smanjiti nivo vode na nizvodnim deonicama. Razlika između akumulacija i retenzija je u tome što je cela zapremina retenzije namenjena prijemu poplavnog talasa, a kod akumulacija samo deo njihove zapremine.

Izbor stepena zaštite ili dopustivog rizika od velikih voda zavisi od velikog broja faktora. Apsolutna zaštita nije moguća, jer se pojava ekstremnih kiša i velikih voda većih od najvećih osmotrenih vrednosti ne može sa sigurnošću isključiti. S druge strane, projektovanje objekata za najnepovoljnije uslove može biti veoma skupo i moglo bi da bude opravdano samo ako bi posledice bile veoma teške. Stepenn zaštite, odnosno dozvoljeni rizik, može se usvojiti kao rezultat postupka optimizacije odnosa između potencijalne štete, troškova izgradnje objekta i drugih (naročito ekoloških) faktora. U nekim projektima objekata za koje se predviđa veoma visok stepen zaštite, odnosno veoma mali rizik, za merodavnu veliku vodu može se usvojiti i tzv. verovatno maksimalna velika voda (videti poglavlje 13.5). Stepenn zaštite može biti definisan i propisima, standardima ili preporukama za projektovanje nekih vrsta objekata.

13.2.1 Verovatnoća i povratni period velikih voda

Izbor merodavne velike vode vezuje se za računski rizik da će se ona prevazići (tj. da će se javiti još veća velika voda). Taj rizik se može izraziti na različite načine, a najčešća dva su: 1) godišnja verovatnoća prevazilaženja ili povratni period, i 2) verovatnoća prevazilaženja tokom projektovanog veka objekta.

Za analizu verovatnoće pojave protoka velikih voda u praksi se koristi statistička analiza nizova maksimalnih godišnjih protoka na određenom profilu vodotoka.

Verovatnoća godišnjeg prevazilaženja $p(x)$ je verovatnoća da maksimalni godišnji protok Q_{GM} u bilo kojoj godini bude veći od vrednosti x :

$$p(x) = P\{Q_{GM} > x\} \quad (13.1)$$

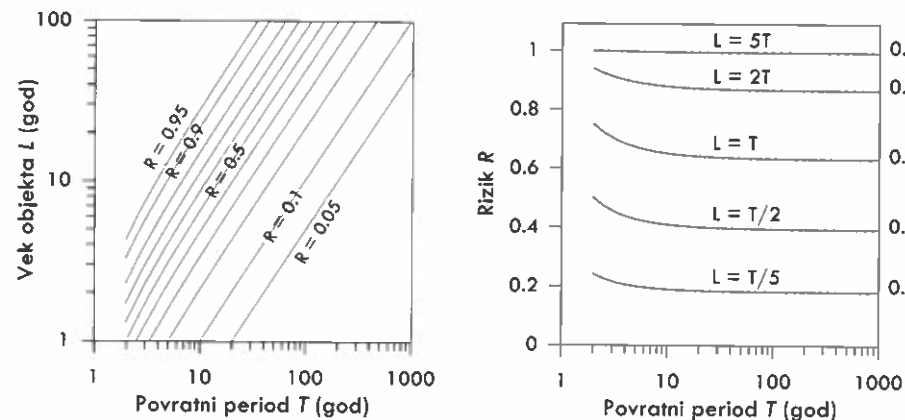
Povratni period $T(x)$ velike vode x definiše se kao prosečan period (broj godina) između dva prevazilaženja vrednosti x . Povratni period se može izraziti kao recipročna vrednost verovatnoće godišnjeg prevazilaženja:

$$T(x) = 1 / p(x) \quad (13.2)$$

U principu je svejedno da li će se verovatnoća pojave velikih voda izraziti preko povratnog perioda („ T -godišnja velika voda“) ili preko verovatnoće prevazilaženja („velika voda verovatnoće prevazilaženja p “). U praksi se sreću oba načina prikazivanja. Na primer, 50-godišnja velika voda (velika voda povratnog perioda 50 godina) može se izraziti i kao velika voda verovatnoće 2%, odnosno velika voda koja se u jednoj godini može prevazići sa verovatnoćom 0.02. Izražavanjem velikih voda preko verovatnoće umesto preko povratnog perioda može se izbeći pogrešna interpretacija učestalosti pojave velikih voda. S obzirom da verovatnoća prevazilaženja $p(x)$ može imati vrednosti između 0 i 1, povratni period kao njena recipročna vrednost može da se kreće u sledećim granicama:

$$1 \leq T(x) < \infty \quad (13.3)$$

Treba obratiti pažnju da povratni period ne može biti manji od 1 godine. Teorijski, on može biti jednak jednoj godini samo u slučaju kada je verovatnoća prevazilaženja $p(x) = P\{Q_{GM} > x\}$ jednaka 1, što bi značilo da je pojava protoka većeg od x siguran događaj. Kako se to ne može tvrditi ni za jednu vrednost x , određivanje 1-godišnjeg protoka je



Slika 13.1. Verovatnoća prevazilaženja računске velike vode R (rizik) u zavisnosti od povratnog perioda T i veka objekta L (levo) i u zavisnosti od odnosa L i T (desno).

nemoguć zadatak. To znači da u praksi nema smisla procenjivati protoke povratnog perioda manjeg od 2 godine. Smatra se i da su ocene velikih voda povratnog perioda znatno većeg od dužine niza veoma nepouzdana, tako da u praksi ima smisla određivati protoke za povratne periode u sledećim granicama (Vukmirović, 1988):

$$2 \leq T(x) < 2N \quad (13.4)$$

gde je N dužina niza u godinama.

Verovatnoća prevazilaženja tokom projektovanog veka objekta $R(x_T)$ je verovatnoća da se računska velika voda x_T prevaziđe bar jednom tokom L godina životnog veka objekta:

$$R(x_T) = 1 - [P\{Q_{GM} \leq x_T\}]^L = 1 - (1 - 1/T)^L \quad (13.5)$$

gde je T povratni period računске velike vode x_T . Verovatnoća R , koja se nekad naziva i rizik, pokazuje verovatnoću otkaza objekta tokom njegovog projektovanog veka, a suprotna verovatnoća $1 - R$ pokazuje pouzdanost objekta tokom njegovog veka. Ove dve verovatnoće zavise od izabranog povratnog perioda T računске velike vode x_T na koju se objekat dimenzioniše, kao i od projektovanog veka objekta (slika 13.1). Što je veći povratni period T merodavne velike vode, to objekat može da prihvati veću veliku vodu i rizik od otkaza R je manji; takođe, što je duži očekivani vek objekta L , to je rizik od otkaza R veći (slika 13.1 levo). Na slici 13.1 desno je prikazano kako rizik od otkaza zavisi od odnosa izabranog povratnog perioda i veka objekta, gde se može videti da verovatnoća prevazilaženja kapaciteta objekta u periodu $L = T$ iznosi oko 63% (za povratne periode veće od 10 godina). Tako se, na primer, može očekivati sa verovatnoćom od 18% da se kapacitet objekta dimenzionisanog na 100-godišnju veliku vodu prevaziđe bar jednom tokom $L = 20$ godina, ili sa verovatnoćom od 39% da se prevaziđe bar jednom tokom $L = 50$ godina, ili sa verovatnoćom od 63% da se prevaziđe bar jednom u $L = 100$ godina.

Izraz (13.5) može da posluži da se izabere povratni period merodavne velike vode za očekivani vek objekta L u kome će objekat ispuniti svoju namenu sa verovatnoćom $q = 1 - R$:

$$T = 1/[1 - (1 - R)^{1/L}] = 1/[1 - q^{1/L}] \quad (13.6)$$

Na primer, da bi objekat imao pouzdanost od $q = 95\%$ tokom veka od $L = 50$ godina, treba da se dimenzioniše na povratni period od $T = 975$ godina.

13.2.2 Metode za ocenu računskih velikih voda

Cilj analize velikih voda jeste da se procene računске velike vode. Pod velikim vodama se podrazumevaju maksimalni protoci, zapremine ili celi talasi velike vode određene verovatnoće pojave. Način analize i proračuna velikih voda zavisi prevažno od raspoloživih podataka, kao i od inženjerskog zadatka.

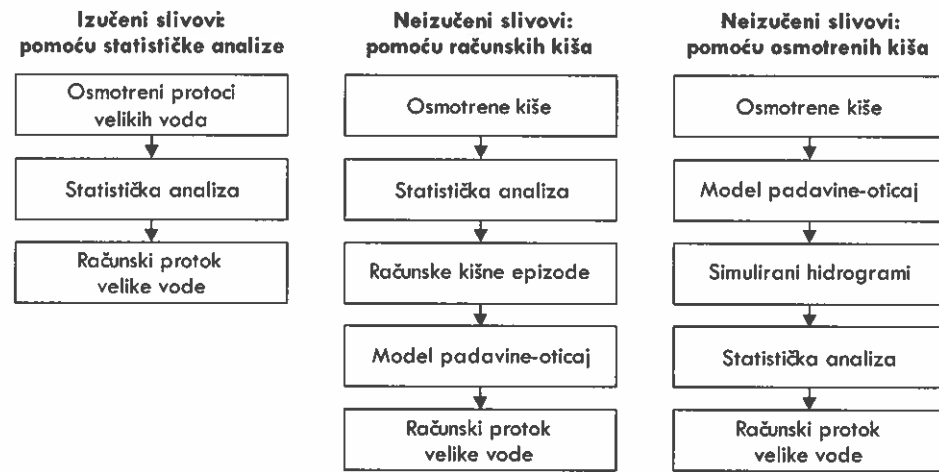
Na slici 13.2 su shematski uporedno prikazana tri glavna pristupa za ocenu velikih voda: pristup u slučaju izučenih slivova, tj. kada postoje podaci osmatranja protoka, i dva pristupa u slučaju neizučenih slivova, odnosno kada ne postoje osmatranja protoka na profilu od interesa.

Kada se na izučenom slivu raspolaže dovoljnim fondom podataka merenja protoka na razmatranom profilu tako da se mogu formirati dovoljno dugi nizovi godišnjih maksimuma, osnovno sredstvo je *statistička analiza osmotrenih velikih voda*. Kao rezultat statističke analize dobija se raspodela verovatnoće maksimalnih protoka na razmatranom profilu. Na nedovoljno izučenim slivovima na kojima postoje kratkoročna osmatranja protoka nekad je moguće uspostaviti regresione zavisnosti sa protocima na okolnim stanicama i tako produžiti niz sa kojim će se obaviti statistička analiza.

Za neizučene i nedovoljno izučene slivove postoji niz metoda za ocenu velikih voda na osnovu drugih veličina kao što su padavine i fizičke karakteristike slivova. U inženjerskoj praksi najzastupljenija metoda za neizučene slivove je *proračun računskih velikih voda na osnovu računskih kiša*. Ovaj pristup podrazumeva transformaciju računskih kiša u računске protoke pomoću nekog modela padavine-otica i primenjuje se generalno na manje slivove (urbani slivovi, uključujući krovove i saobraćajnice, i manji prirodni slivovi). Veće neizučene slivove treba dekomponovati na manje pre primene ovog pristupa. Isti pristup se može primeniti i na izučene slivove kada je potrebno proceniti velike vode za neko buduće ili hipotetičko stanje oticaja na slivu (npr. posle izgradnje akumulacija na slivu).

Pored prethodna dva najčešća pristupa, može se primeniti i tzv. *pristup osmotrenih kiša*, za koji se podrazumeva da su na raspolaganju opaženi hijetogrami većeg broja kišnih epizoda na slivu. U ovom pristupu osmotrene kišne epizode se koriste u sprezi sa modelom padavine-otica kako bi se dobio niz simuliranih protoka koji se zatim statistički analiziraju. Ovaj pristup je pogodan za nedovoljno izučene slivove, s obzirom da se postojeći podaci mogu iskoristiti za kalibraciju modela, kao i za analizu budućih uslova na izučenim slivovima. Ipak, zbog obima proračuna, ovaj pristup se ređe koristi (Petrović & Despotović, 1998).

Od prethodno opisana tri pristupa, prikazanih na slici 13.2, prva dva se detaljnije opisuju u nastavku, tj. u poglavljima 13.3 i 13.4.



Slika 13.2. Shematski prikaz osnovnih pristupa za ocenu velikih voda na izučenim i neizučenim slivovima.

U druge metode koje se mogu primeniti za ocenu računskih velikih voda na neizučenim slivovima spadaju i:

- regionalne regresione zavisnosti karakterističnih velikih voda sa karakteristikama slivova ili klimatskim karakteristikama koje se formiraju na osnovu podataka sa izučenih slivova, a onda primenjuju na neizučene;
- bezdimenzionalne regionalne raspodele velikih voda (metoda indeksne velike vode), koja je prikazana u odeljku 0,
- anvelope velikih voda, koje se formiraju na osnovu najvećih osmotrenih velikih voda za pojedine regione i koje mogu da daju preliminarnu ocenu velikih voda za neizučene slivove.

13.3 Statistička analiza velikih voda

Statistička analiza je alat za ocenu raspodele verovatnoće velikih voda, iz koje se dobijaju računski velike vode određene verovatnoće prevazilaženja ili povratnog perioda. U praksi se ova analiza najčešće sprovodi sa nizovima *godišnjih maksimuma protoka*. U istu svrhu se može koristiti i nešto složenija *metoda prekoračenja preko praga* (ili metoda pikova), kod koje se formiraju nizovi u koje može ući više maksimuma iz jedne godine, dok iz neke druge godine bez značajnih velikih voda ne mora ući nijedna vrednost. Smatra se da ovakvi nizovi nose više informacija o velikim vodama i da daju pouzdanije procene računskih velikih voda (Plavšić, 2005, 2006).

U oba slučaja poželjno je da se nizovi formiraju od apsolutnih (trenutnih) maksimuma protoka, a ne od najvećih dnevnih protoka u godini. Apsolutni maksimumi protoka su na raspolaganju ako je hidrološka stanica opremljena uređajem za kontinualno beleženje vodostaja. Ako deo osmotrenog niza ne čine apsolutni maksimumi jer stanica u ranijem periodu nije imala kontinualno beleženje, onda iz kasnijeg perioda sa kontinualnim beleženjem treba naći odnos između apsolutnih maksimuma i najvećih dnevnih protoka (regresionom analizom) pomoću kojeg treba korigovati vrednosti iz ranijeg perioda. Na taj način se dobija niz konsistentnih vrednosti godišnjih maksimuma protoka.

Da bi rezultati statističke analize bili validni, nizovi moraju da ispune kriterijume homogenosti i slučajnosti kojima se, sa statističke tačke gledišta, obezbeđuje da raspoloživi podaci čine prost slučajan uzorak. Ispunjenost ovih kriterijuma potvrđuje se odgovarajućim statističkim testovima, prikazanim u odeljku 8.1.4.

Osnovni problem u statističkoj analizi velikih voda su kratki nizovi osmatranja i period obrade, jer vrednosti računskih velikih voda zavise od dužine niza i perioda obrade. Nema striktnog pravila za najmanju dužinu niza sa kojom bi se dobila pouzdana ocena velikih voda, ali se generalno može reći da nizovi treba da budu dovoljno dugački da obuhvate bar jedan ciklus dugoročnih oscilacija, ukoliko su one vidljive. Po analogiji sa razmatranjem karakteristika klime, koje po definiciji treba da obuhvate duži period, često se smatra da nizovi ne treba da budu kraći od 30 godina, koliko iznose standardni klimatološki periodi. U slučajevima kraćih nizova, pouzdaniji rezultati se mogu dobiti *regionalnom statističkom analizom* kojom se pojedine lokacije ne posmatraju izolovano već u regionalnom kontekstu (odeljak 0).

Drugi značajan problem u statističkoj analizi velikih voda je neizvesnost u oceni računskih velikih voda velikih povratnih perioda pri ekstrapolaciji raspodele velikih voda izvan raspona osmotrenih vrednosti, zbog čega je uobičajeno da se, pored kvantila velikih voda, razmatraju i njihovi intervali poverenja (odeljak 8.2.6).

Poseban slučaj predstavljaju situacije na ušćima reka kada treba razmatrati istovremenu pojavu (koincidenciju) velikih voda na dve ili više reka. U tom slučaju se formiraju dvodimenzionalne ili višedimenzionalne raspodele velikih voda (Prohaska i Ilić, 2010; Plavšić i Ivetić, 2017).

Ovo poglavlje prikazuje samo opšte principe statističke analize velikih voda metodama godišnjih maksimuma i prekoračenja preko praga, dok su postupci analize u ovim dvema metodama opisani u poglavljima 8.2 i 8.3.

13.3.1 Metoda godišnjih maksimuma

13.3.1 Metoda godišnjih maksimuma

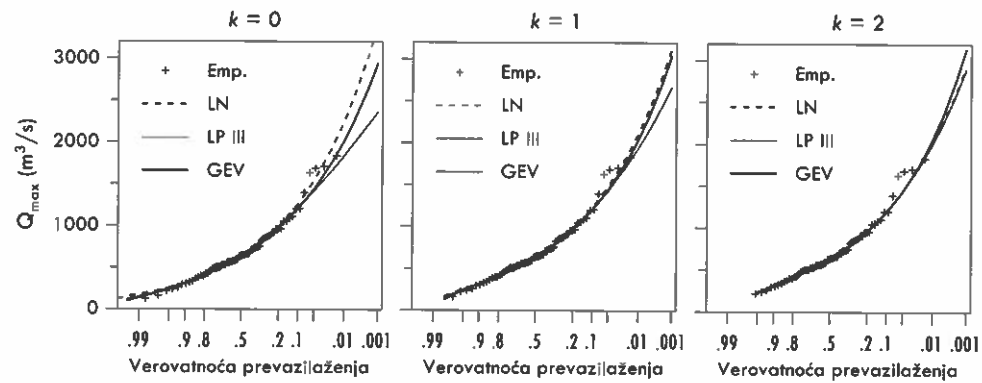
Statistička analiza nizova maksimalnih godišnjih protoka sastoji se od prilagođavanja teorijskih raspodela empirijskoj raspodeli osmotrenih vrednosti godišnjih maksimuma protoka. Postupak te statističke analize je detaljno objašnjen u poglavlju 8.2, a ovde se kratko rezimira.

Empirijska raspodela se formira tako što se svakom podatku osmatranja x_i dodeli empirijska funkcija raspodele prema nekoj od formula kompromisne verovatnoće. Najčešće korišćena formula kompromisne verovatnoće je Vejbulov obrazac:

$$F_e(x_i) = \frac{i}{n+1} \quad (13.7)$$

gde je x_i i -ti član niza u uzorku uređenom u rastući redosled, $F_e(x_i)$ odgovarajuća vrednost empirijske funkcije raspodele, a n dužina niza.

Nizovi godišnjih maksimuma protoka obično imaju pozitivan koeficijent asimetrije. Teorijske raspodele koje se najčešće koriste za velike vode zato obuhvataju log-



Slika 13.3. Uticaj donjih izuzetaka na raspodelu maksimalnih godišnjih protoka na stanici Mojsinje na Južnoj Moravi (gde je k broj donjih izuzetaka uklonjenih iz niza).

Pirsonovu raspodelu III tipa, log-normalnu raspodelu (dvoparametarsku i troparametarsku), Gumbelovu raspodelu i uopštenu raspodelu ekstremnih vrednosti. Veliki broj nizova može se uspešno modelirati log-Pirsonovom raspodelom III tipa.

Saglasnost empirijske i teorijske raspodele se testira odgovarajućim statističkim testovima (npr. test Kolmogorov-Smirnova ili Kramer-Mizesov test). Konačni izbor teorijske raspodele treba doneti na osnovu rezultata testova saglasnosti i vizuelne provere na dijagramima verovatnoće.

Pored testiranja homogenosti i slučajnosti, u nizovima godišnjih maksimuma potrebno je testirati postojanje statističkih izuzetaka, tj. vrednosti koje značajno odstupaju od ostatka niza (poglavlje 8.1.5). Ako u nizu velikih voda postoje gornji izuzeci, tj. ekstremno velike vrednosti, oni se po pravilu zadržavaju u nizu osim ako se sumnja da predstavljaju mernu grešku. Gornji izuzeci mogu da pomognu da se izabere teorijska raspodela koja će omogućiti ekstrapolaciju raspodele velikih voda izvan raspona osmotrenih vrednosti. S druge strane, donji izuzeci se po pravilu odbacuju i statistička analiza se sprovodi na zasećenom skupu podataka s donje strane (IACWD, 1982) jer oni mogu značajno da utiču na izbor najbolje raspodele, ocene parametara raspodele a time i na ocene računskih velikih voda. Statistički testovi za detekciju prisustva izuzetaka prikazani su u poglavlju 8.1.5. Ako se u nizu od n vrednosti testovima detektuje k donjih izuzetaka, iz preostalih $n_1 = n - k$ podataka određuje se raspodela $F_1(x)$, a krajnja raspodela velikih voda se dobija kao

$$F(x) = \frac{k}{n} + \frac{n-k}{n} F_1(x) \quad (13.8)$$

Uobičajene raspodele koje se koriste u statističkoj analizi velikih voda su generalno osetljive na izostavljanje donjih izuzetaka, što je pokazano za log-normalnu i log-Pirsonovu raspodelu III tipa u radu Plavšić i sar. (2016). Uopštena raspodela ekstremnih vrednosti se pokazala kao najotpornija na prisustvo donjih izuzetaka, što je čini pogodnom za primenu na velike vode. Na slici 13.3 prikazane su tri teorijske raspodele (log-normalna, log-Pirsonova III tipa i uopštena raspodela ekstremnih vrednosti) prilagođene nizu maksimalnih godišnjih protoka na stanici Mojsinje na Južnoj Moravi

u kome su testovima detektovana dva donja izuzetka. Na ovom primeru se može videti da izostavljanje izuzetaka (jednog ili dva) više utiče na oblik log-normalne i log-Pirsonove raspodele III tipa nego na oblik uopštene raspodele ekstremnih vrednosti. Gornji kraj log-normalne raspodele se spušta sa izbacivanjem donjih izuzetaka, dok se gornji kraj log-Pirsonove raspodele III tipa podiže.

U oceni merodavnih velikih voda značajnu ulogu mogu imati i intervali poverenja računskih velikih voda, koji se mogu odrediti kao što je opisano u poglavlju 8.2.6. Intervali poverenja ukazuju na neizvesnost u oceni računskih velikih voda, što može da bude koristan podatak u procesu projektovanja hidrotehničkih objekata. Na primer, ako se objekat dimenzioniše na 100-godišnju veliku vodu, onda se može ispitati ponašanje projektovanog objekta pri protoku velike vode sa gornje granice intervala poverenja 100-godišnje velike vode i tako proveriti osetljivost projektovanog rešenja na neizvesnosti koje su prisutne u statističkoj analizi (izbor teorijske raspodele, kratki nizovi, nepouzdana merenja i slično).

13.3.2 Metoda prekoračenja preko praga

Metoda godišnjih maksimuma ima nedostatak u tome što koristi nizove sa samo jednim podatkom, tj. najvećim protokom iz svake godine. Tako niz mogu da čine relativno mali maksimumi protoka iz sušnih godina dok se „drugi najveći“ protok iz neke vodnije godine neće naći u nizu. Alternativni pristup su nizovi „pikova“ odnosno prekoračenja koji prevazilaze određeni izabrani prag. Postupak statističke analize prema ovoj metodi prikazan je u poglavlju 8.2.7 i nešto je složeniji nego metoda godišnjih maksimuma. U opštim crtama, ova metoda se sastoji od tri koraka: 1) ocena raspodele broja javljanja prekoračenja u godini dana, 2) ocena raspodele visine prekoračenja preko praga, i 3) kombinovanje prethodne dve raspodele u raspodelu godišnjih maksimuma. Treći korak omogućava da se rezultati ove metode uporede sa rezultatima metode godišnjih maksimuma.

Za poznatu funkciju raspodele godišnjeg maksimuma $F(x)$ važi klasična definicija povratnog perioda:

$$T(x) = \frac{1}{P\{X > x\}} = \frac{1}{1 - F(x)}, \quad x > Q_0 \quad (13.9)$$

Sa ovakvom formulacijom povratnog perioda rezultati analize metodom prekoračenja su uporedivi sa rezultatima analize nizova godišnjih maksimuma. Može se pokazati (Todorovic i Zelenhasic, 1970) da ovaj izraz predstavlja prosečan broj godina u kome će se prvi put prevazići protok x . S druge strane, u metodi prekoračenja postoji i definicija povratnog perioda velikih voda formulisana sa raspodelom prekoračenja $H(z)$. Ta definicija koristi sledeći teorijski postulat vezan za Puasonov slučajni proces: ako broj prekoračenja preko praga u jednoj godini prati Puasonovu raspodelu sa prosečnim brojem prekoračenja Λ , tada broj prevazilaženja velike vode x takođe prati Puasonovu raspodelu sa prosečnim brojem prekoračenja Λ_x koji je proporcionalno manji od Λ sa faktorom proporcije jednakim verovatnoći prevazilaženja te velike vode $P\{Z > z\} = P\{Z > x - Q_0\} = 1 - H(x - Q_0)$ (Rosbjerg, 1977). Povratni period u nizovima prekoračenja tada je jednak:

Tabela 13.1. Veza povratnih perioda izraženih u godinama po metodi godišnjih maksimuma (T) i po metodi prekoračenja preko praga kada broj prekoračenja prati Puasonovu raspodelu (T_p).

T_p (god)	0.5	1	1.44	2	5	10	20	50	100
T (god)	1.16	1.58	2	2.54	5.52	10.5	20.5	50.5	100.5

$$T_p(x) = \frac{1}{\Lambda_x} = \frac{1}{\Lambda[1 - H(x - Q_0)]}, \quad x > Q_0 \quad (13.10)$$

Odnos između dve definicije povratnog perioda iznosi:

$$T_p(x) = \frac{1}{\ln T(x) - \ln[T(x) - 1]} \quad (13.11)$$

Razlike dve definicije povratnog perioda su značajne za povratne periode manje od 10 godina (videti tabelu 13.1). Klasičan povratni period $T(x)$ ne može biti manji od 1 godine, dok $T_{pDS}(x)$ može biti i kraći od 1 godine. Međutim, definicija (13.10) nije primenljiva na modele prekoračenja u kojima broj prekoračenja ne prati Puasonovu raspodelu.

Metoda prekoračenja preko praga predstavlja korisnu alternativu metodi godišnjih maksimuma za statističku analizu velikih voda. Ona u statističku analizu unosi više informacija tako što niz koji se analizira obuhvata sve značajne velike vode na nekom profilu. Na taj način ona je manje osetljiva na izbor perioda obrade nego metoda godišnjih maksimuma i daje pouzdanije ocene (videti npr. Plavšić i Milutinović, 2010).

13.3.3 Regionalna statistička analiza

U uslovima kada su nizovi kratki i nepouzdati, preporučuje se primena regionalne statističke analize. Regionalna statistička analiza podrazumeva da se podaci sa klimatski i hidrološki sličnih lokacija iskoriste za bolju procenu kvantila na pojedinim lokacijama tako što se posmatra više stanica umesto jedne. Smatra se da se korišćenjem hidroloških informacija sa više lokacija kompenzuje nedovoljna količina podataka na jednoj lokaciji ("zamena vremena prostorom"). Takođe se smatra (Stedinger i sar., 1993) da je ovaj pristup dobar za padavine u oblastima u kojima reljef nije izražen, a da ga je nešto teže sprovesti za velike vode i male vode zbog uticaja fizičkih i geoloških karakteristika. Jedna od najuspešnijih metoda za regionalnu statističku analizu je tzv. indeksna metoda velikih voda, o kojoj će biti nešto više reči u nastavku.

Indeksna metoda predstavlja nadogradnju tradicionalne metode „godina-stanica“ koja je namenjena statističkoj analizi padavina i u kojoj se od svih podataka na svim stanicama formira jedinstven niz (pregled različitih načina za formiranje nizova u regionalnoj analizi padavina može se naći u radu Shuzhenga i sar., 1983).

Osnovna pretpostavka indeksne metode velikih voda jeste da sve stanice u izabranom homogenom regionu imaju raspodelu verovatnoće koja je po svemu ista osim po indeksnoj (referentnoj) velikoj vodi kao parametru razmere. Indeksna velika voda treba da odražava karakteristike sliva (veličinu, mogućnost oticanja i slično). Najčešće se kao indeks koristi srednja vrednost niza, pa se analiziraju bezdimenzionalne vrednosti:

$$X_{k,i} = \frac{Q_{k,i}}{m_k}, \quad k = 1, 2, \dots, K, \quad i = 1, 2, \dots, N_k \quad (13.12)$$

$$m_k = \frac{1}{N_k} \sum_{i=1}^{N_k} Q_{k,i}$$

gde je $Q_{k,i}$ i -ti član niza na stanici k , m_k srednja vrednost niza na stanici k , N_k dužina niza na stanici k , i K ukupan broj stanica. Jedinstven niz svih bezdimenzionalnih vrednosti X_j :

$$X_j, \quad j = 1, 2, \dots, M, \quad M = \sum_{k=1}^K N_k \quad (13.13)$$

koristi se u statističkoj analizi kako bi se odredila najpovoljnija regionalna teorijska raspodela. Kao rezultat te analize dobijaju se bezdimenzionalni kvantili $X(T)$ traženih povratnih perioda T . Da bi se odredili kvantili na pojedinim lokacijama, bezdimenzionalni kvantili se množe sa indeksnom vrednošću:

$$Q_k(T) = X(T) \cdot m_k, \quad k = 1, 2, \dots, K \quad (13.14)$$

Kako se parametri teorijskih raspodela određuju na osnovu momenata niza, potrebno je definisati regionalne momente. Regionalna srednja vrednost ovde nije nepoznat moment jer je srednja vrednost niza X jednaka 1. Ostali regionalni momenti se određuju kao ponderisane vrednosti odgovarajućih momenata na pojedinim stanicama. Na taj način, prva tri regionalna momenta se mogu proceniti na sledeći način:

$$m_R = 1, \quad C_{vR} = \frac{\sum_{k=1}^K a_k C_{vk}}{\sum_{k=1}^K a_k}, \quad C_{sR} = \frac{\sum_{k=1}^K a_k C_{sk}}{\sum_{k=1}^K a_k} \quad (13.15)$$

gde je $m_R = 1$ srednja vrednost niza X , C_{vR} regionalni koeficijent varijacije i C_{sR} regionalni koeficijent asimetrije, dok su a_k težinski koeficijenti za stanicu k . Ovi težinski koeficijenti mogu biti jednaki dužinama nizova na pojedinim stanicama ($a_k = N_k$) ili mogu odlikovati dužine nizova na neki drugi način. Umesto konvencionalnih momenata u novije vreme se koriste L-momenti (Hosking & Wallis, 1997; videti poglavlje 7.4).

Pomoću izraza (13.14) može se odrediti računski velika voda na lokaciji stanice, ali i na lokaciji neizučenog sliva ukoliko se može proceniti srednja vrednost velikih voda m na tom profilu. Smatra se da procena srednje vrednosti m za neizučen sliv može da bude pouzdana, čak i za kratke nizove, ako se odredi iz regionalnih regresivnih zavisnosti srednjih velikih voda sa fizičko-geografskim karakteristikama slivova.

Pretpostavka o sličnosti slivova unutar homogenih regiona je ključna za uspeh regionalne statističke analize. Određivanje homogenih regiona je stalni predmet istraživanja. Slivovi mogu da se grupišu po fizičkim karakteristikama, kao što su površina sliva i nadmorska visina, ili po sličnosti koeficijenata varijacije i asimetrije. Takođe treba imati na umu da pretpostavka o tome da sve stanice u regionu imaju istu raspodelu i da su podaci međusobno nezavisni može biti narušena korelacijom između stanica.

13.4 Računske velike vode na osnovu računskih kiša

Ocena računskih velikih voda na osnovu računskih kiša je uobičajeni postupak za neizučene slivove u inženjerskoj praksi. Postupak određivanja računskih protoka na osnovu računskih kiša sastoji se od dva glavna koraka:

- određivanje računskih kiša,
- transformacija računске kiše u računski oticaj, koja obično ima dve komponente: proračun efektivne kiše i proračun hidrograma direktnog oticaja.

13.4.1 Računske kiše

Računske kiše su hipotetičke kišne epizode koje treba da odražavaju karakteristike realnih (osmotrenih) kišnih epizoda na datoj lokaciji, uključujući ukupnu visinu kiše, raspored intenziteta kiše u vremenu i prostorni raspored. Načini formiranja računskih kiša opisani su u poglavlju 12. Ukupna visina računске kiše zavisi od trajanja kiše i verovatnoće pojave, što se prikazuje zavisnostima visina – trajanje – povratni period kiše (HTP) ili intenzitet – trajanje – povratni period (ITP). Vremenska raspodela kiše je takođe veoma važna jer vremenski neravnomerna kiša uvek daje veći oticaj od ravnomerne, naročito na manjim slivovima.

Jedan od standardnih problema u praksi je taj da su kiše kratkog trajanja (tj. krive HTP i ITP) raspoložive na malom broju lokacija pluviografskih stanica. S druge strane, podaci o dnevnim kišama sa padavinskih stanica su lakše dostupni. Uobičajena je praksa da se krive HTP ili ITP transponuju sa poznatih lokacija na nepoznate u bezdimenzionalnom obliku u odnosu na visinu dnevnih kiša (kada se ponekad nazivaju *redukcionim krivama*; postupak je objašnjen u poglavlju 12.6). Računske dnevne kiše zadatih verovatnoća pojave na padavinskim stanicama se koriste da se dođe do prosečne visine dnevne kiše na slivu za datu verovatnoću pojave. U ovom postupku postoji više problema koji doprinose neizvesnostima u oceni velikih voda: 1) pitanje reprezentativnosti zavisnosti HTP koje se transponuju sa druge lokacije, 2) izjednačavanje dnevnih i 24-časovnih kiša iako po svojoj prirodi 24-časovne kiše moraju biti veće od dnevnih, i 3) osrednjavanje redukcionih krivih za različite verovatnoće pojave, čime se još više zanemaruje nelinearnost veze padavine-oticaaj.

13.4.2 Transformacija računске kiše u računski oticaj

Proračun efektivne kiše predstavlja transformaciju pale (bruto) kiše u neto kišu i podrazumeva primenu neke od metoda za proračun gubitaka opisanih u poglavlju 9.2. Gubici zavise od karakteristika sliva (namene površina, vegetacije, pedoloških i geoloških karakteristika, reljefa), ali i od konkretne situacije za razmatranu kišnu epizodu, tj. od ukupne visine i intenziteta kiše, trajanja kiše, stanja prethodne vlažnosti na slivu, infiltracionog kapaciteta zemljišta i nivoa podzemnih voda. Zbog toga ne čudi raznovrsnost metoda određivanja gubitaka zasnovanih na raznim pojednostavljenjima.

Efektivna kiša se u praksi često računa metodom SCS uz usvajanje broja krive CN na osnovu geoloških karakteristika i namene površina na slivu. Ova metoda se obično koristi uz standardnu pretpostavku da početni gubici iznose 20% kapaciteta zemljišta za upijanje vode (tzv. uslovi ARC II). Projektant može da pretpostavi i drugačije pret-

hodne uslove vlažnosti na slivu. Sa gledišta formiranja velikih voda, kritičnija situacija na slivu se može očekivati pri većoj početnoj vlažnosti, odnosno sa manjim početnim gubicima nego što je standardnih 20% za uslove ARC II. Savetuje se oprez pri korišćenju formula za korekciju broja CN za uslove velike prethodne vlažnosti jer mogu dati nerealno velike vrednosti oticaja.

Takođe ne treba zaboraviti da je metoda SCS namenjena radu sa dnevnim kišama, a ne kišama kratkog trajanja (Woodward i sar., 2010).

Transformacija efektivne kiše u hidrogram direktnog oticaja podrazumeva primenu nekog hidrološkog modela čiji su ulaz efektivne padavine, a izlaz hidrogram direktnog oticaja. S obzirom da se analize velikih voda rade za ekstremne uslove, bazni oticaj se najčešće ne razmatra jer se smatra zanemarljivim u odnosu na maksimume velikih voda. Ukoliko se proceni da takva pretpostavka ne važi, dobijenim računskim velikim vodama treba dodati procenjeni bazni oticaj.

Modeli direktnog oticaja mogu biti veoma različiti po svojim osnovnim postavkama, pojednostavljenjima i zahtevima za podacima. U slučaju kada na posmatranom slivu postoje osmatranja makar kratkog obima, postoji mogućnost da se model padavine-oticaaj kalibriše za dati sliv, odnosno da se odrede parametri modela sa kojima se rezultati modela najbolje slažu sa osmotrenim hidrogramima oticaja. Tada bi bilo moguće primeniti koncept osmotrenih kiša za određivanje merodavnih protoka, koji se smatra pouzdanijim od koncepta računskih kiša.

U slučaju slivova na kojima ne postoje osmatranja, najčešće rešenje je izrada *sin-tetičkih jediničnih hidrograma*. Pod sintetičkim jediničnim hidrogramima se podrazumevaju različite vrste hidrograma jednostavne forme, najčešće trougaone, čiji se elementi (relevantna vremena i maksimalna ordinata) određuju na osnovu fizičkih karakteristika sliva (vremena koncentracije, površine sliva, dužine toka, nagiba sliva i slično) i karakteristika kiše (najčešće trajanja kiše). Uvek treba proveriti osnovne pretpostavke pojedinih rešenja iz literature i primenljivost empirijskih izraza na razmatranu lokaciju. Na području Srbije dugo se koristi sintetički jedinični hidrogram po Jovanoviću i Brajkoviću (odeljak 9.3.5) jer za elemente ovog jediničnog hidrograma postoje razvijene lokalne zavisnosti.

Za veoma male slivove, kao i za urbane slivove, često se koristi racionalna metoda. Ovu metodu ne treba zloupotrebljavati i primenjivati na velike slivove. Jedini parametar u racionalnoj metodi je koeficijent oticaja, koji u ovoj metodi zapravo predstavlja faktor konverzije računskog intenziteta kiše nekog povratnog perioda u maksimalni protok istog povratnog perioda. Zato je izbor ovog koeficijenta presudan za tačnost ove metode. Ipak, racionalna metoda je preživela mnoge kritike pa se i danas često koristi u praksi za male slivove.

13.4.3 Specifični problemi i neke preporuke

Sa gledišta određivanja verovatnoće pojave računskih velikih voda, osnovna pretpostavka pristupa pomoću računskih kiša je ta da je povratni period velikih voda isti kao povratni period računске kiše. Oticaaj koji nastaje usled neke konkretne kišne epizode zavisi u velikoj meri i od prethodnog stanja vlažnosti na slivu, a ne samo od visine, intenziteta i trajanja kiše. Zato se može reći da za jednu verovatnoću pojave

velikih voda imamo beskonačan broj kombinacija karakteristika kiša i stanja sliva (USACE, 1994). Zbog ovako nejednoznačne i nelinearne veze između padavina i oticaja uvek postoji sumnja u opravdanost pretpostavke da je povratni period oticaja isti kao povratni period kiše. Iskustvo pokazuje da se ova pretpostavka može prihvatiti samo za male povratne periode, npr. do 10 godina (Petrović & Despotović, 1998).

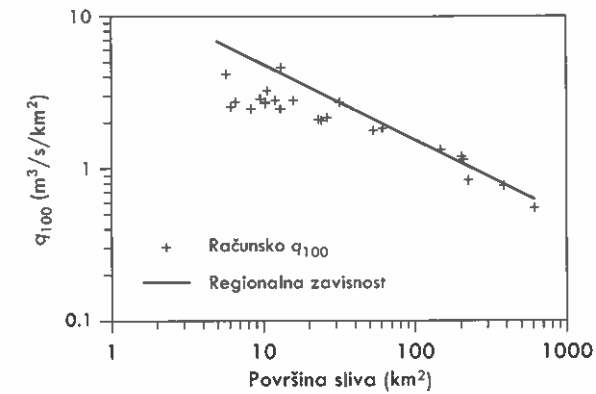
Vremenska raspodela intenziteta tokom trajanja računске kiše može biti važan faktor za odgovor sliva, naročito na manjim slivovima sa kratkim vremenom koncentracije. Računske kiše konstantnog intenziteta (tj. blok kiše) mogu se koristiti u određenim primenama iako realne kišne epizode nikada nemaju konstantan već promenljiv intenzitet. To se pre svega odnosi na najkraća trajanja kiše (do 20 minuta), a samim tim i na najmanje slivove, kao što su nepropusni delovi gradskih slivova. Za računске kiše trajanja dužeg od 20 minuta poželjno je pretpostaviti bilo kakvu vremensku neravnomernost intenziteta, jer bi ravnomerni intenzitet doprineo potcenjivanju računskog oticaja. U poglavlju 12.5 prikazane su dve jednostavne metode za formiranje računskih kiša neravnomernog intenziteta. Ako se ne raspolaže statističkim oblicima računskih kiša dobijenim iz podataka osmatranja, preporučuje se primena metode naizmeničnih blokova kojom se neravnomerna kiša dobija iz krivih HTP i indirektno u sebi sadrži računске visine kiša različitih trajanja a istog povratnog perioda.

Ako se vremenski neravnomerne kiše koriste u kombinaciji sa sintetičkim jediničnim hidrogramom, tada se sintetički jedinični hidrogram priprema za trajanje kiše koje je jednako vremenskoj diskretizaciji Δt neravnomerne kiše. U metodologiji SCS se preporučuje da se ta diskretizacija usvoji u odnosu na vreme koncentracije t_c kao $\Delta t = 0.133t_c$ (NRCS, 2007).

Jedno od ključnih pitanja u oceni velikih voda ovim pristupom je izbor trajanja računске kiše. U primeni racionalne metode za proračun oticaja merodavno trajanje kiše je ono trajanje koje je jednako vremenu koncentracije sliva, jer se tada dobija najveći maksimum hidrograma oticaja. U primeni drugih metoda za proračun oticaja treba razmotriti više trajanja kiše koja su jednaka ili veća od vremena koncentracije sliva, a za merodavno trajanje usvojiti ono koje daje najveći sračunati oticaj. Kada se koristi metoda SCS i broj krive CN za proračun oticaja na malim ruralnim slivovima, kratka trajanja kiše bliska vremenu koncentracije mogu da potcene oticaj, pa treba koristiti kiše trajanja od bar 6 sati, a preporučuje se da se koriste dnevne kiše sa vremenskom raspodelom određenom iz zavisnosti ITP (kao što je metoda naizmeničnih blokova) koje uključuju i računске kiše i kraćih trajanja.

Tradicionalne metode za proračun velikih voda, kao što su racionalna metoda i sintetički jedinični hidrogrami, primenljive su na male slivove. Smatra se da slivove veće od 50 km² obavezno treba dekomponovati na podslivove kako bi se uzele u obzir različite karakteristike delova sliva (NRCS, 2007). Takođe se smatra da najveći podsliv na dekomponovanom slivu treba da ima najviše 10-struku površinu najmanjeg podsliva. O principima dekompozicije u proračunu oticaja je bilo reči u odeljku 0.

Rezultate proračuna oticaja velikih voda uvek treba verifikovati u poređenju sa rezultatima na izučanim slivovima i rezultatima regionalnih analiza, kao što su regionalne krive specifičnog oticaja u zavisnosti od površine sliva za homogene regione ili anvelope maksimalnih protoka (slika 13.4). U slučaju studije za opštinu Čačak (IH/Ehting, 2012), razmatrano je ukupno 24 sliva do izabranih profila za proračun velikih vo-



Slika 13.4. Specifični oticaj stogodišnje velike vode na neizučanim slivovima na teritoriji opštine Čačak u poređenju sa regionalnom krivom formiranom na osnovu rezultata Vodoprovodne osnove Srbije (VOS, 2009).

da, koji su najčešće predstavljali preseke vodotoka sa saobraćajnicama, dok je jedan manji deo izabran u okviru dekompozicije velikih slivova na manje. Svi slivovi su hidrološki neizučeni osim 4 sliva na čijim se izlazima nalaze stanice RHMZ. Izučeni slivovi su poslužili za verifikaciju metodologije proračuna na neizučanim slivovima. U okviru toga se došlo do zaključka da je u primenjenoj SCS metodi za proračun računskih velikih voda potrebno korigovati brojeve krivih CN koji su procenjeni na osnovu namene površina na slivu iz baze podataka Corine Land Cover (EEA, 2012) za oko 10%, kao i da treba usvojiti manje početne gubitke u proračunu efektivne kiše i to u zavisnosti od povratnog perioda računске kiše.

Treba naglasiti da različite vrste inženjerskih zadataka, objekata i sistema zahtevaju različite definicije računskih kiša. Na primer, za dimenzionisanje kolektora kišne kanalizacije prema maksimalnom protoku koji treba da prođe kroz te kolektore, merodavne su po pravilu kraće kiše jakog intenziteta, gde maksimalni intenzitet kiše ima ključni uticaj na maksimalnu ordinatu hidrograma. S druge strane, za neke druge objekte mogu biti od značaja druge karakteristike kiša; na primer, za praćenje kvaliteta kišnog oticaja od značaja su ne samo trajanje, visina i intenzitet kiše, već i dužina prekida između kišnih epizoda. Takođe, pri razmatranju složenijih sistema (npr. pri dimenzionisanju sistema kišne kanalizacije, ili pri proračunu merodavnih velikih voda na glavnoj reci i pritokama), delovi sistema se posmatraju parcijalno i za njih se određuju merodavni protoci za različite merodavne računске kiše, a u skladu sa analizom najkritičnijih stanja u kojem se ti sistemi mogu naći. Provera rada sistema sa najvećim osmotrenim kišama takođe može biti od koristi za usvajanje merodavnih računskih kiša.

13.5 Verovatno maksimalne vode

Pod verovatno maksimalnim vodama (VMV) smatraju se velike vode nastale usled verovatno maksimalnih padavina (VMP). Koncept verovatno maksimalnih padavina je nastao iz potrebe da se proceni gornja fizička granica mogućih padavina, a pred-

met je velikih kontroverzi i kritike. Verovatno maksimalne padavine se zato opisuju kao one koje mogu da nastanu nad razmatranim slivom pod najnepovoljnijim meteorološkim uslovima u datom klimatskom području i za koje se smatra da se ne mogu prevazići. U tom smislu njima se ne pripisuje nikakva verovatnoća pojave, odnosno smatra se da je verovatnoća njihovog prevazilaženja praktično jednaka nuli.

Prema Svetskoj meteorološkoj organizaciji (WMO, 1986, 2009a, 2009b), VMP se mogu proceniti na više različitih načina, među kojima su i teorijski modeli, metode transpozicije oluje, maksimizacije lokalne atmosfere vlage i statističke metode. Ovim procenama se obično bave meteorolozi.

Osnovne kritike na račun koncepta VMP su da je postojanje gornje fizičke granice u kontradikciji sa nazivom „verovatno maksimalno“, kao i da se metode ocene zasnivaju na najvećim osmotrenim vrednostima padavina i tački rose (Koutsoyannis & Langousis, 2011).

Sa procenjenim VMP, VMV se mogu dobiti primenom nekog od modela padavine-otica kao i u slučaju računskih kiša uz pretpostavku o najnepovoljnijim hidrološkim i meteorološkim uslovima na slivu. Uobičajeno je da se VMV koriste kao merodavni protoci za objekte kao što su evakuacioni organi na većim branama zbog velikog nizvodnog rizika koji zahteva visok stepen zaštite.

LITERATURA

- Abbott M.B., Bathurst J.C., Cunge J.A., O'Connell P.E., Rasmussen J. (1986a) An introduction to the European Hydrological System – Systeme Hydrologique Europeen, "She", 1. History and philosophy of a physically-based, distributed modeling system, *J. Hydrol.*, 87(1-2): 45-59.
- Abbott M.B., Bathurst J.C., Cunge J.A., O'Connell P.E., Rasmussen J. (1986b) An introduction to the European Hydrological System – Systeme Hydrologique Europeen, "She", 2. Structure of a physically-based, distributed modeling system, *J. Hydrol.*, 87(1-2): 61-77.
- Akan A. O. (1993) *Urban Stormwater Hydrology – A Guide to Engineering Calculations*, Technomic Publishing Co., Lancaster, Pennsylvania.
- Allen R.G., Pereira L.S., Raes D., Smith M. (1998) *Crop evapotranspiration - Guidelines for computing crop water requirements*, FAO Irrigation and Drainage Paper 56, Food and Agriculture Organization, Rome. ISBN 92-5-104219-5 (www.fao.org/3/x0490e/x0490e00.htm; pristupljeno juna 2019).
- Anderson M.G. (Ed.-in-Chief) (2005) *Encyclopedia of Hydrologic Sciences*. John Wiley and Sons Ltd., Chichester, England.
- Arnell N. W. (2002) *Hydrology and Global Environmental Change*. Pearson Education Limited, Harlow, UK.
- Barredo J.I. (2009) Normalised flood losses in Europe: 1970-2006. *Nat. Hazards Earth Syst. Sci.*, 9: 97-104.
- Barry R.G., Chorley R.J. (2003) *Atmosphere, Weather and Climate*. Eighth edition, Routledge, London and New York.
- Bartels R. (1982) The Rank Version of von Neumann's Ratio Test for Randomness. *Journal of the American Statistical Association*, 77(377), 40-46.
- Bedient P.B., Huber W.C., Vieux B.E. (2008) *Hydrology and Floodplain Analysis*. Fourth edition, Pearson International Edition, Prentice Hall.
- Bergström S. (1976) Development and Application of a Conceptual Runoff Model for Scandinavian Catchments. SMHI Report RHO 7, Norrköping.
- Bergström S. (1995) The HBV model. In: *Computer Models of Watershed Hydrology*, Singh V.P. (ed.), Water Resources Publications, Highlands Ranch, CO, pp. 137-159.
- Beven K.J. (2001) *Rainfall-Runoff Modelling, The Primer*. John Wiley and Sons Ltd, Chichester.
- Beven K.J. (2005) Rainfall-Runoff Modelling: Introduction. *Encyclopedia of Hydrologic Sciences*, Chapter 122, John Wiley and Sons, Chichester, UK.
- Beven K.J. (2009) *Environmental Modelling: An Uncertain Future?*, Routledge, London and New York.
- Beven K.J., Kirkby M.J. (1979) A physically-based variable contributing area model of basin hydrology. *Hydrol. Sci. Bull.*, 24 (1): 43-69.

- Blagojević B. (2011) *Razvoj modela za prostornu interpolaciju hidroloških vremenskih serija na neizučnim profilima*, doktorska disertacija, Građevinsko-arhitektonski fakultet Univerziteta u Nišu.
- Blagojević B., Plavšić J. (2013) A normalized regression based regional model for generating flows at ungauged basins, *Water Science and Technology*, 68(1): 99-108.
- Blagojević J., Plavšić J., Čatović S., Todorović A. (2018) Analiza srednjih voda u Srbiji na osnovu digitalnih karata padavina i temperatura, *Vodoprivreda*, 50(4-6): 177-187.
- Blöschl G., Sivapalan M., Wagener T., Viglione A., Savenije H. (2013) *Runoff Prediction in Ungauged Basins: Synthesis across Processes, Places and Scales*, Cambridge University Press.
- Brajković M. (1994) Modifikacije metode sintetičkog jediničnog hidrograma za proračun velikih voda, 11. savetovanje Jugoslovenskog društva za hidraulička istraživanja i Jugoslovenskog društva za hidrologiju, str. 461-466.
- Burtsaert W. (2005) *Hydrology – An Introduction*. Cambridge University Press, New York.
- Buttle J.M. (2005) Isotope Hydrograph Separation of Runoff Sources. *Encyclopedia of Hydrological Sciences*, Chapter 116, John Wiley and Sons, Chichester, UK.
- Chow V.T., Maidment D.R., Mays L.W. (1988) *Applied Hydrology*. McGraw-Hill.
- Chowdhury J.U., Stedinger J.R., Lu L.-H. (1991) Goodness-of-fit tests for regional generalized extreme value flood distributions. *Water Resources Research*, 27(7): 1765-1776.
- Conover W.J. (1999) *Practical Nonparametric Statistics*. John Wiley and Sons.
- Cunnane C. (1978) Unbiased plotting positions: A review. *Journal of Hydrology*, 37: 205-222.
- D'Agostino R.B., Stephens M.A. (Eds.) (1986) *Goodness-of-Fit Techniques*. Marcel Dekker, New York.
- De Roo A. P. J., Wesseling C. G., Van Deursen W. P. A. (2000) Physically based river basin modelling within a GIS: the LISFLOOD model. *Hydrological Processes*, 14: 1981-1992.
- Despotović J. (1996) Analiza jakih kiša kao uzročnika poplava pomoću slučajnih procesa, doktorska disertacija, Građevinski fakultet Univerziteta u Beogradu.
- Despotović J. (2009) *Kanalisanje kišnih voda*, Građevinski fakultet Univerziteta u Beogradu.
- Despotović J. i sar. (1999) Idejni projekat odvođenja kišnih i upotrebljenih voda sa sliva Kumodražskog potoka, Institut za hidrotehniku, Građevinski fakultet Univerziteta u Beogradu.
- Despotović J., Petrović J., Vukmirović V. (1996) Some considerations of urban drainage design practice using experimental data, *Atmospheric Research*, 42 (1-4): 279-292.
- Despotović J., Plavšić J. (2008) Compound stochastic model of cumulative rainfall depth, in: *Variability in time and space of extreme rainfalls, floods and droughts*, Università della Calabria, Cosenza, eds. E. Ferrari and P. Versace, pp. 95-101.
- Dingman L. (2002) *Physical Hydrology*. Second edition, Prentice Hall.
- Dooge J.C.I. (1973) *Linear Theory of Hydrologic Systems*. Tech. Bull. No. 1468, Agriculture Research Service, US Department of Agriculture.
- Đorđević D. (2013) *Prostorno tečenje na rečnim ušćima (uticajni činioci)*. Zadužbina Andrejević, Beograd.
- Đorić D., Jevremović V., Mališić J., Nikolić-Đorić E. (2007) *Atlas raspodela*. Građevinski fakultet Univerziteta u Beogradu, Beograd.
- Đorović M. (1984) Određivanje hidrološke grupe zemljišta pri definisanju oticanja u metodi „SCS“, *Vodoprivreda*, 16(1): 57-60.
- Eagleson P. S. (1970) *Dynamic Hydrology*. McGraw-Hill.
- EEA (2012) CORINE (Coordination of Information on Environment) Land Cover Database, update for 2012, European Environmental Agency (EEA) (land.copernicus.eu/pan-european/corine-land-cover/clc-2012; pristupljeno juna 2019).
- Efstratiadis A., Koussis A.D., Koutsoyiannis D., Mamassis N. (2014) Flood design recipes vs. reality: can predictions for ungauged basins be trusted? *Nat. Hazards Earth Syst. Sci.*, 14: 1417-1428.
- England Jr., J.F., Cohn T.A., Faber B.A., Stedinger J.R., Thomas Jr., W.O., Veilleux A.G., Kiang J.E., and Mason R.R. (2018) Guidelines for Determining Flood Flow Frequency – Bulletin 17C.

- U.S. Geological Survey Techniques and Methods, book 4, chap. B5, 148 p., doi: 10.3133/tm4B5.
- EU (Evropska unija) (2007) Directive 2007/60/EC of the European Parliament and of the Council of 23 October 2007 on the assessment and management of flood risks. *Official Journal of the European Union*, 288: 27-34. Prevod na srpski dostupan na sajtu Republičke direkcije za vode (www.rdvode.gov.rs/direktive-eu.php; pristupljeno juna 2019).
- FAA (1970) *Airport drainage*. Advisory Circular No. 150/5320-5B, Federal Aviation Administration, US Dept. of Transportation, Washington D.C.
- Fabian J., Zelenhasic E. (2016) Modelling of Meteo-Droughts. *Water Resources Management*, 30(9): 3229-3246.
- Farr T.G. i sar. (2007) The shuttle radar topography mission. *Reviews of Geophysics*, 45, p. RG2004.
- FHA (2002) *Highway Hydrology*, Publication No. FHWA-NHI-02-001, Federal Highway Administration, US Department of Transportation.
- Filliben J.J. (1975) The Probability Plot Correlation Coefficient Test for Normality. *Technometrics*, 17(1): 111-117.
- Fredlund D.G., Xing A. (1994) Equations for the soil-water characteristic curve. *Canadian Geotechnical Journal*, 31(4) : 521-532. doi 10.1139/t94-061
- Gabrić O. (2014) Eksperimentalno istraživanje procesa na slivu: padavine, oticaji i erozija tla, doktorska disertacija, Građevinski fakultet u Subotici, Univerzitet u Novom Sadu.
- Gabrić O., Janjikopanji Đ., Plavšić J., Fabijan J. (2017) Statistical analysis of meteo-droughts for Sremska Mitrovica and Kikinda. Proc. 5th Int. Conf. Contemporary Achievements in Civil Engineering, Subotica, pp. 601-612.
- Gavrilović Lj., Dukić D. (2002) *Reke Srbije*. Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Beograd.
- Grubbs F.E. (1950) Sample criteria for testing outlying observations. *Ann. Math. Stat.*, 21(1): 27-58.
- Grubbs F.E., Beck G. (1972) Extension of sample sizes and percentage points for significance tests of outlying observations, *Technometrics*, 14(4): 847-854.
- Gustard A., Bullock A., Dixon J.M. (1992) *Low Flow Estimation in the United Kingdom*. Institute of Hydrology Report No. 108, Wallingford, UK.
- Gustard A., Roald L.A., Demuth S., Lumadjeng H.S., Gross R. (1989) *Flow Regimes from Experimental and Network Data (FRIEND)*. Institute of Hydrology, Wallingford, UK.
- Haines, A.T., Finlayson, B.L., McMahon, T.A. (1988) A global classification of river regimes. *Applied Geography*, 8: 255-272.
- Hajdin, G. (2002) *Osnove hidrotehnike*, treće izdanje, Građevinski fakultet Univerziteta u Beogradu, ISBN 86-80049-81-6.
- Hargreaves G. H., Samani Z. A. (1985) Reference crop evapotranspiration from temperature, *Appl. Eng. Agric.*, 1(2): 96-99.
- Hazen A. (1914) Discussion on 'Flood Flows' by E. Fuller, *Trans. Amer. Soc. Civ. Eng.*, 77: 526-632.
- Helsel D.R., Hirsch R.M. (2002) *Statistical Methods in Water Resources*, USGS Techniques of Water-Resources Investigations, Book 4: Hydrologic Analysis and Interpretation, Chapter A3, US Geological Survey.
- Hirsch R.M., Helsel D.R., Cohn T.A., Gilroy E.J. (1993) Statistical Analysis of Hydrologic Data, in: *Hydrology for Engineers*, Maidment, D.R. (ed.), Chapter 17, McGraw-Hill.
- Horton R. E. (1933) The role of infiltration in the hydrologic cycle. *Transactions of the American Geophysical Union*, 14: 446-460.
- Hosking J.R.M., Wallis J.R. (1997) *Regional Frequency Analysis - An Approach Based on L-Moments*. Cambridge University Press, Cambridge, UK.
- Huber W.C., Dickinson R.E. (1992) Storm Water Management Model, Version 4: User's Manual, EPA/600/3-88/001a, Environmental Research Laboratory, U.S. Environmental Protection Agency, Athens, Georgia.

- IACWD (1982) *Guidelines for determining flood flow frequency: Bulletin 17B* (revised and corrected), Interagency Advisory Committee on Water Data, Hydrol. Subcomm., Washington, D.C.
- Ignjatović J. (1998) Low flow regional analysis in Serbia based on hydrogeological characteristics. Proc. Low Flows FRIEND-AMHY Expert Meeting, FRIEND-AMHY Group and Faculty of Civil Engineering, University of Belgrade, pp. 59-66.
- IH/Ehting (2012) Studija i plan zaštite od poplava teritorije jedinice lokalne samouprave grada Čačka, Institut za hidrotehniku Građevinskog fakulteta i Ehting, Beograd.
- Ilich N., Despotović J. (2008) A simple method for effective multi-site generation of stochastic hydrologic time series. *Stochastic Environmental Research and Risk Assessment*, 22(2): 265-279.
- Isailović D., Prohaska S., Majkić B. (2007) Zavisnost osnovnih komponenti hidrološkog bilansa Srbije. *Vodoprivreda*, 39(5-6): 239-252.
- Ivetić M. (2000) *Računska hidraulika – otvoreni tokovi*, skripta, Građevinski fakultet Univerziteta u Beogradu.
- Ivković M., Nađ J. (2015) O dostupnosti i pouzdanosti podataka pri primeni hidroloških modela u realnom vremenu. *Vodoprivreda*, 47(4-6): 215-222.
- Ivković M., Todorović A., Plavšić J. (2018) Improved input to distributed hydrologic model in areas with sparse subdaily rainfall data using multivariate daily rainfall disaggregation. *Journal of Hydroinformatics*, 20 (4):784-797.
- Janković D. (2015) O određivanju prosečnog oticanja sa neizučених slivova na teritoriji Srbije. Zbornik radova 17. naučnog savetovanja SDHI i SDH, Vršac, str. 816-825.
- Jaćimović N., Dašić T., Stanić M., Đorđević B., Milanović P., Sudar N., Savić S. (2015a) Razvoj distribuiranog modela za hidrološke simulacije oticaja na slivovima u karstu. *Vodoprivreda*, 47(1-3): 29-40.
- Jaćimović N., Stanić M., Dašić T., Vujović D. (2015b) Primena distribuiranog hidrološkog modela za simulaciju oticaja u uslovima karsta. Zbornik radova 17. naučnog savetovanja SDHI i SDH, Vršac, str. 509-519.
- Jenkinson A. F. (1955). The frequency distribution of the annual maximum (or minimum) value of meteorological elements, *Q. J. R. Meteorol. Soc.*, 81: 158-171.
- Jevremović V., Mališić J. (2000). Neki nestandardni statistički testovi primenljivi u hidrologiji, I deo. *Vodoprivreda*, 32: 315-322.
- Jevremović V., Mališić J. (2001). Neki nestandardni statistički testovi primenljivi u hidrologiji, II deo. *Vodoprivreda*, 33: 27-34.
- Jevremović V., Mališić J. (2002) *Statističke metode u meteorologiji i inženjerstvu*. Savezni hidrometeorološki zavod, Beograd.
- Jongman B., Hochrainer-Stigler S., Feyen L., Aerts J.C.J.H., Mechler R., Botzen W.J.W., Bouwer L.M., Pflug G., Rojas R., Ward P.J. (2014) Increasing stress on disaster-risk finance due to large floods. *Nature Climate Change*, 4: 264-268.
- Jovanović M. (2008) *Regulacija reka – rečna hidraulika i morfologija*, drugo izdanje, Građevinski fakultet Univerziteta u Beogradu.
- Jovanović S. (1987) *Primena metoda matematičke statistike u hidrologiji*, treće izdanje, Građevinski fakultet i Naučna knjiga, Beograd.
- Jovanović S. (1989) *Hidrologija*. Tehničar 6, poglavlje 2. Građevinska knjiga, Beograd. (Štampao kao separat Građevinski fakultet u Beogradu 1990. godine uz dozvolu Građevinske knjige.)
- Jovanović S., Bonacci O., Anđelić M. (1977) *Hidrometrija*. Građevinski fakultet Univerziteta u Beogradu.
- Jovanović S., Radić Z. (1990) *Parametarska hidrologija*, skripta za poslediplomske studije, Građevinski fakultet Univerziteta u Beogradu.
- Jovanović S., Vukmirović V., Despotović J., Radić, Z. (1979) Metode analize i određivanja velikih voda na nedovoljno izučеним slivovima, NIP Savremene metode analize kretanja vode i

- nanosa u prirodnim tokovima, izveštaj za 1979, Zavod za hidrotehniku Građevinskog fakulteta, Beograd.
- Kapor R. (2015) *Hidraulika*. Treće izmenjeno i dopunjeno izdanje. Građevinski fakultet Univerziteta u Beogradu i Akademsko misao.
- Katz R.W., Parlange M.B., Naveau P. (2002) Statistics of extremes in hydrology, *Advances in Water Resources*, 25: 1287-1304.
- Kiehl J.T., Trenberth K.E. (1997) Earth's annual global mean energy budget. *Bull. Am. Met. Soc.* 78(2): 197-208.
- Kirpich Z.P. (1940) Time of concentration of small agricultural watersheds, *Civ. Eng.*, 10(6): 362.
- Kite G.W. (1988) *Frequency and risk analysis in hydrology*. Water Resources Publications, Littleton, Colorado, USA.
- Kottegoda N.T., Rosso R. (2008) *Applied statistics for civil and environmental engineers*, Second edition, Blackwell Publishing.
- Koutsoyiannis D., Kozonis D., Manetas A. (1998) A mathematical framework for studying rainfall intensity-duration-frequency relationships. *Journal of Hydrology*, 206: 118-135.
- Koutsoyiannis D., Langousis A. (2011) Precipitation, In: *Treatise on Water Science* (P. Wilderer and S. Uhlenbrook, eds.), Academic Press, Oxford, 2, 27-78.
- Lang M., Ouarda T.B.M.J., Bobée B. (1999) Towards operational guidelines for over-threshold modeling. *Journal of Hydrology*, 225: 103-117.
- Langbein W.B. (1949) *Annual runoff in the United States*, US Geological Survey, Circular 52, US Dept. of Interior, Washington.
- Leijnse H., Uijlenhoet R., Stricker J.N.M. (2007) Rainfall measurement using radio links from cellular communication networks. *Water Resources Research* 43: W03201.
- Lindström G., Johansson B., Persson M., Gardelin M., Bergström S. (1997) Development and test of the distributed HBV-96 hydrological model, *Journal of Hydrology*, 201, 272-288.
- Lynsley R.K., Kohler M.A., Paulhus J.L.H. (1982) *Hydrology for Engineers*. McGraw-Hill Book Company.
- Maksimović Č., Bužek L., Petrović J. (1991) Corrections of Rainfall Data Obtained by Tipping Bucket Raingauge, *Atmospheric Research*, 27(1-3): 45-53.
- Mališić J., Jevremović V. (2008) *Slučajni procesi i vremenske serije*, Matematički fakultet Univerziteta u Beogradu.
- Marković Đ. (2016) Neparametarsko generisanje stohastičkih hidroloških vremenskih serija, doktorska disertacija, Građevinski fakultet Univerziteta u Beogradu.
- Markovic R.D. (1965) Probability functions of best fit to distributions of annual precipitation and runoff, Hydrology Paper 8, Colorado State University.
- Massey, B.S. (1983) *Mechanics of fluids*, 5th edition, Van Nostrand Reinhold (UK) Co. Ltd., Wokingam, England.
- McCuen R.H. (1998) *Hydrologic Analysis and Design*, 2nd edition, Prentice Hall.
- Mein R.G., Larson C.L. (1971) *Modeling the infiltration component of the rainfall-runoff process*. Bull. 43, Water Resources Research Center, University of Minnesota, Minneapolis.
- Mihailović V. (2011) Složena analiza hidroloških vremenskih serija za potrebe modeliranja ekstremnih događaja, doktorska disertacija, Građevinski fakultet Univerziteta u Beogradu.
- Milovanović B., Radovanović M., Stanojević G., Pecelj M., Nikolić J. (2017) Klima Srbije. U: *Geografija Srbije*, Geografski institut „Jovan Cvijić“, Srpska akademija nauka i umetnosti, Beograd.
- Morgali J.R. and Linsley R.K. (1965) Computer analysis of overland flow. *J. Hydraul. Div. ASCE*, 91(3): 81-100.
- Mulvaney T.J. (1851) On the use of self-registering rain and flood gauges in making observations of the relations of rainfall and flood discharges in a given catchment. *Transactions of the Institution of Civil Engineers of Ireland*, 4(2): 18-33.
- Musy A., Higy, C. (2011) *Hydrology – A Science of Nature*. CRC Press and Science Publishers, Enfield, USA.

- Nathan R. J., McMahon T. A. (1990) Evaluation of automated techniques for base flow and recession analyses. *Water Resour. Res.*, 26(7): 1465-1473.
- NERC, National Environmental Research Council (1975) *Flood Studies Report*, Institute of Hydrology, Wallingford.
- NIST (2012) NIST/SEMATECH e-Handbook of Statistical Methods, National Institute of Standards and Technology, US Department of Commerce, Section 1.3.5.17.1, www.itl.nist.gov/div898/handbook/eda/section3/eda35h1.htm (pristupljeno juna 2019).
- Nova enciklopedija (1977) *Нова енциклопедија у боји Вук Караџић Larousse, Вук Караџић, Београд.*
- NRCS (1986) *Urban Hydrology for Small Watersheds*, TR-55, National Resources Conservation Service, US Department of Agriculture.
- NRCS (2004) *National Engineering Handbook*, Part 630: Hydrology, Chapter 10: Estimating Direct Runoff from Storm Rainfall, National Resources Conservation Service, US Department of Agriculture.
- NRCS (2007) *National Engineering Handbook*, Part 630: Hydrology, Chapter 16: Hydrographs, National Resources Conservation Service, US Department of Agriculture.
- NRCS (2010) *National Engineering Handbook*, Part 630: Hydrology, Chapter 15: Time of concentration, National Resources Conservation Service, US Department of Agriculture.
- Oki T., Kanae S. (2006) Global Hydrological Cycles and World Water Resources, *Science*, 313(5790): 1068-1072.
- Pavlović D. (2013) Modeliranje stohastičke strukture karakteristika velikih voda dobijenih iz serija pikova iznad praga, doktorska disertacija, Građevinski fakultet Univerziteta u Beogradu.
- Penman H.L. (1948) Natural Evaporation from Open Water, Bare Soil and Grass. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 193, 120-145.
- Penzar B. (ur.) (1996) *Meteorologija za korisnike*. Školska knjiga i Hrvatsko meteorološko društvo, Zagreb, Hrvatska, ISBN 953-0-30847-7.
- Petrović J. (1996) Usporedna analiza maksimalnih proticaja na malim rekama metodama parametarske i statističke hidrologije, magistarski rad, Građevinski fakultet Univerziteta u Beogradu.
- Petrović J., Despotović J. (1998) Historical rainfall for urban storm drainage design, *Water Science and Technology*, 37(11): 105-111.
- Petrović J., Palmar B. i Ivetić M. (1994) Transformacija poplavnog talasa metodom razdvajanja operatora, Zbornik radova 11. savetovanja JDHI i JDH (Beograd, novembar 1994), str. 145-150.
- Plate E. (2002) Flood risk and flood management. *Journal of Hydrology*, 267: 2-11.
- Plavšić J. (2005) *Analiza rizika od poplava pomoću prekidnih slučajnih procesa*, doktorska disertacija, Građevinski fakultet Univerziteta u Beogradu.
- Plavšić J. (2006) Neizvesnosti u analizi velikih voda metodom parcijalnih serija, *Vodoprivreda*, 38 (1-3): 41-50.
- Plavšić J., Ivetić M. (2017) Statistička analiza velikih voda Dunava i Save na području Beograda. *Vodoprivreda*, 49 (1-3): 5-13.
- Plavšić J., Milutinović R. (2010) O računskim nivoima vode za zaštitu od poplava na Dunavu kod Novog Sada. *Vodoprivreda*, 42(1-3): 69-78.
- Plavšić J., Obušćević Z. (2012) Problemi u analizi trenda u hidrometeorološkim serijama pri ispitivanju uticaja klimatskih promena, Zbornik radova 16. naučnog savetovanja SDHI/SDH, str. 523-537.
- Plavšić J., Pavlović D. (2005) Preporuke za izbor merodavnih kiša za projektovanje u beogradskoj kanalizaciji. Studija za JKP Beogradski vodovod i kanalizacija Institut za hidrotehniku, Građevinski fakultet Univerziteta u Beogradu.
- Plavšić J., Pavlović D., Mihailović V., Blagojević B. (2016) Statistička analiza velikih voda u prisustvu izuzetaka, *Vodoprivreda*, 48(1-3): 5-17.

- Plavšić J., Radić Z. (2015) *Inženjerska hidrologija – rešeni zadaci*, zbirka zadataka, Građevinski fakultet Univerziteta u Beogradu i Akademska misao, Beograd.
- Plavšić J., Topalović Ž., Despotović J. (2015) Konsistentno određivanje računskih kiša, *Vodoprivreda*, 47(4-6): 151-159.
- Plavšić J., Vladiković D., Despotović J. (2014) Hidrometeorološki aspekti poplava u maju 2014. na slivu reke Save i u Srbiji. *Voda i sanitarna tehnika*, 44(5-6): 21-34.
- Prodanović D. (2013) *Mehanika fluida za studente Građevinskog fakulteta*, Građevinski fakultet Univerziteta u Beogradu.
- Prohaska S., Đukić D., Bartoš Divac V., Todorović N. (2014) Statistička ocena značajnosti jakih kiša koje su izazvale pojavu poplavnih talasa u Srbiji u periodu april-septembar 2014. godine. Zbornik radova 17. naučnog savetovanja SDHI i SDH, str. 688-700.
- Prohaska S., Ilić A. (2010) Nova metoda za definisanje višestruke koincidencije poplavnih talasa na složenim rečnim sistemima, *Vodoprivreda*, 42(4-6): 125-135.
- Prohaska S., Stojković M., Jelovac M., Božović N., Bartoš Divac V. (2016) Definisanje teorijskih hidrograma velikih voda na hidrološki izučenim profilima u slivu reke Kolubare nakon poplave iz maja 2014. godine. Zbornik radova konf. „Voda 2016“, Srpsko društvo za zaštitu voda, str. 75-84.
- Radičević M., Jevremović V., Plavšić J., Pavlović D. (2015) Pirsonov sistem raspodela i njegova primena u hidrologiji, Zbornik radova 17. Savetovanja SDHI i SDH, ISBN 978-86-7518-183-5, str. 878-892.
- Radić Z. (1988) Modeliranje oticaja od uniformnih i neuniformnih kiša na bazi podataka sa laboratorijskih slivova, doktorska disertacija, Građevinski fakultet Univerziteta u Beogradu.
- Radić Z.M., Jovanović S. (1986) An adaptive distributed model for real time flood hydrograph forecasting, in: Conference of the Danube countries on hydrological forecasts, Yugoslav National Committee for the International Hydrological Programme, pp. 62-67.
- Radić Z., Mihailović V. (2010) Marginalne raspodele dnevnih proticaja na reprezentativnim profilima u Srbiji. *Vodoprivreda*, 42(1-3): 17-38.
- Radojković M., Maksimović Č. (1984) Development, testing and application of Belgrade urban drainage model, Proc. 3rd ICUSD, Göteborg, Vol. 4, pp. 1431-1443.
- Radovanović M. (ur.) (2017) *Geografija Srbije*, Geografski institut „Jovan Cvijić“, Srpska akademija nauka i umetnosti, Beograd.
- Rao A.R. and Hamed K.H. (2000) *Flood Frequency Analysis*. CRC Press, New York.
- Rasmussen E.M., Dickinson R.E., Kutzbach J.E., Cleaveland M.K. (1993) Climatology, in *Handbook of Hydrology*, D. R. Maidment (ed), McGraw-Hill, Chapter 2.
- Rawls W.J., Ahuja L.R., Brakensiek D.L., Shirmohammadi A. (1993) Infiltration and soil water movement. In *Handbook of Hydrology*, D. R. Maidment (ed), McGraw-Hill, Chapter 5.
- Ristić R. (2000) Režim pojave i karakteristike velikih voda na bujičnim tokovima u Srbiji. Doktorska disertacija, Univerzitet u Beogradu – Šumarski fakultet.
- Ristić R., Malošević D. (2011) *Hidrologija bujičnih tokova*. Univerzitet u Beogradu – Šumarski fakultet.
- Roads J., Oglesby R., Hoffman F., Robertson F. (2005) Acceleration of the Global Hydrologic Cycle. Chapter 195, *Encyclopedia of Hydrological Sciences* John Wiley & Sons.
- Rosbjerg D. (1977) Return periods of hydrological events, *Nordic Hydrology*, 8, 57-61.
- Rossman L.A. (2015) Stormwater Management Model (SWMM), User's Manual Version 5.1, National Risk Management Research Laboratory, US Environmental Protection Agency, Cincinnati, Ohio.
- Schellekens J., van Verseveld W., Euser T., Winsemius H., Thiange C., Bouaziz L., Tollenaar D., de Vries S. (2016) openstreams/wflow: 2016.04 Test release. doi: 10.5281/zenodo.167057.
- Searcy J.K., Hardison C.H. (1960) *Double-Mass Curves*. Manual of Hydrology: Part 1. General Surface-Water Techniques. U.S. Geological Survey Water Supply Paper 1541-B.
- Seibert J., Vis M.J.P. (2012) Teaching hydrological modeling with a user-friendly catchment-runoff-model software package, *Hydrology and Earth System Sciences*, 16, 3315-3325.

- Serinaldi F., Grimaldi S. (2011) Synthetic design hydrographs based on distribution functions with finite support. *Journal of Hydrologic Engineering*, 16(5): 434-446.
- Shaw E.M. (1994) *Hydrology in Practice*, third edition. Chapman and Hall, London.
- Shaw E.M., Beven K.J., Chappell N.A., Lamb R. (2011) *Hydrology in Practice*, fourth edition. Spon Press, Abingdon, UK.
- Sherman L.K. (1932) Streamflow from rainfall by the unit-graph method. *Eng. News-Rec.*, 108: 501-505.
- Shiklomanov I.A. (1998) *World Water Resources, A New Appraisal and Assessment for the 21st Century*. UNESCO, Paris, France.
- Shuttleworth W.J. (1993) Evaporation, in *Handbook of Hydrology*, D. R. Maidment (ed), McGraw-Hill, Chapter 4.
- Shuzheng C., Harboe R., Schultz G.A. (1983) Comparison between the station-year and other composition methods for rainfall estimation. In: *Scientific Procedures Applied to the Planning, Design and Management of Water Resources Systems*, IAHS Publ. no. 147, pp. 3-12.
- SRPS ISO 1100-2:2005; Merenje protoka vode u otvorenim tokovima – Deo 2: Određivanje zavisnosti vodostaj-protok. Institut za standardizaciju Srbije, Beograd.
- SRPS ISO 4373:2005; Merenje protoka vode u otvorenim tokovima – Uređaji za merenje vodostaja. Institut za standardizaciju Srbije, Beograd.
- SRPS ISO 748:2003; Merenje protoka vode u otvorenim tokovima – Metode za određivanje protoka merenjem brzina i površine (metode brzina-površina). Institut za standardizaciju Srbije, Beograd.
- SRPS ISO 9825:2005; Merenje protoka vode u otvorenim tokovima – Merenje protoka na velikim rekama i merenje protoka velikih voda. Institut za standardizaciju Srbije, Beograd.
- Stanić M., Todorović A., Vasilčić Ž., Plavšić J. (2018) Extreme flood reconstruction by using the 3DNet platform for hydrological modelling. *Journal of Hydroinformatics*, 20(4): 766-783.
- Stedinger J.R., Vogel R.M., Foufoula-Georgiou E. (1993) Frequency analysis of hydrologic extremes. In: *Handbook of Applied Hydrology*, Maidment, D.R. (ed.), Chapter 18, McGraw-Hill.
- Stephens M.A. (1986) Tests based on EDF statistics. U: *Goodness-of-Fit Techniques*, D'Agostino R.B., Stephens M.A. (Eds.), Marcel Dekker, New York, pp. 97-193.
- Stojković M. (2015) Dugoročne promene u stohastičkoj strukturi hidroloških vremenskih serija, doktorska disertacija, Građevinski fakultet Univerziteta u Beogradu.
- Stojković M., Plavšić J., Prohaska S. (2014) Dugoročne promene godišnjih i sezonskih proticaja: primer reke Save. *Vodoprivreda*, 46(1-6): 39-48.
- Stojković M., Prohaska S., Plavšić, J. (2015) Stochastic structure of annual discharges of large European rivers. *Journal of Hydrology and Hydromechanics*, 63(1): 63-70.
- Štrbac D. (2014) Quantification and spatial distribution of precipitation on the territory of Serbia. *Journal of the Geographical Institute "Jovan Cvijic"*, SASA (Zbornik radova Geografskog instituta "Jovan Cvijic" SANU), 64(3): 267-277.
- Tietjen G., Moore R. (1972) Some Grubbs-type statistics for the detection of several outliers. *Technometrics*, 14(3), 583-597.
- Todd D.K., Mays L.W. (2004) *Groundwater Hydrology*. John Wiley and Sons.
- Todorović A. (2015) Uticaj perioda kalibracije na ocenu parametara konceptualnih hidroloških modela različitih struktura, doktorska disertacija, Građevinski fakultet Univerziteta u Beogradu.
- Todorovic P. (1970) On some problems involving random numbers of random variables, *Annals of Mathematical Statistics*, 41(3): 1059-1063.
- Todorovic P. (1978) Stochastic models for floods. *Water Resources Research*, 14(2): 345-356.
- Todorovic P., Zelenhasic E. (1970) A stochastic model for flood analysis. *Water Resources Research*, 6(6): 1621-1648.
- Trajković S. (2007) Jednostavna empirijska formula za proračun referentne evapotranspiracije. *Vodoprivreda*, 39(4-6): 397-400.

- Trenberth K.E., Smith L., Qian T., Dai A., Fasullo J. (2007) Estimates of the Global Water Budget and Its Annual Cycle Using Observational and Model Data, *Journal of Hydrometeorology*, 8: 758-769.
- Turc L. (1954) Le bilan d'eau des sols: relation entre les precipitations, l'evaporation et l'ecoulement (Water balance in soils, relationship between precipitation, evapotranspiration and runoff), *Annales Agronomique*, 5, 491-595.
- UNESCO (1982) Methods of hydrological computations for water projects (Eischart B.S., Kindler J., Schultz G.A., Sokolov A.A., eds.), Studies and Reports in Hydrology No. 38, Unesco, Paris.
- Urošev M., Kovačević-Majkić J., Štrbac D., Milanović Pešić A., Milijašević D., Jakovljević D., Petrović A. (2017) Vode Srbije. U: *Geografija Srbije*, Geografski institut „Jovan Cvijic“, Srpska akademija nauka i umetnosti, Beograd.
- USACE (1994) *Flood-Runoff Analysis*, U.S. Army Corps of Engineers, Engineering Manual EM 1110-2-1417.
- USACE (2000) Hydrologic Modeling System HEC-HMS Technical Reference Manual, U.S. Army Corps of Engineers, Hydrologic Engineering Center, Davis, CA.
- USACE (2016) HEC-SSP Statistical Software Package, U.S. Army Corps of Engineers, Hydrologic Engineering Center, Davis, CA.
- Vasilčić Ž., Stanić M., Plavšić J. (2012) Razvoj distribuiranog hidrološkog modela 3DNet-Catch, Zbornik radova 16. naučnog savetovanja SDHI/SDH, str. 648-658.
- Verma S.P., Quiroz-Ruiz A. (2006) Critical values for 22 discordancy test variants for outliers in normal samples up to sizes 100, and applications in science and engineering. *Revista Mexicana de Ciencias Geológicas*, 23(3), 302-319.
- Viessman W., Lewis G.L. (1997) *Introduction to Hydrology*. Fourth edition, Prentice Hall.
- Viglione A., Parajka J., Rogger M., Salinas J.L., Laaha G., Sivapalan M., Blöschl G. (2013) Comparative assessment of predictions in ungauged basins – Part 3: Runoff signatures in Austria. *Hydrol. Earth Syst. Sci.*, 17: 2263-2279.
- Vlada Republike Srbije (2014) Serbia Floods 2014, Report on the needs assessment for reconstruction and flood relief, Office for Reconstruction and Flood Relief, Government of the Republic of Serbia (www.obnova.gov.rs/uploads/useruploads/Documents/RNA-REPORT-140714.pdf; pristupljeno juna 2019).
- Vlada Republike Srbije (2017) *Strategija upravljanja vodama na teritoriji Republike Srbije*. Ministarstvo poljoprivrede i zaštite životne sredine i Institut za vodoprivredu „Jaroslav Černi“, Službeni glasnik RS broj 3/2017.
- Vogel R.M. (1986) The probability plot correlation coefficient test for the normal, lognormal, and Gumbel distributional hypotheses. *Water Resources Research*, 22(4): 587-590.
- Vogel R.M., Kroll C.N. (1989) Low-flow frequency analysis using probability-plot correlation coefficients. *Journal of Water Resources Planning and Management*, ASCE, 115(3): 338-357.
- Vogel R.M., McMartin D.E. (1991) Probability plot goodness-of-fit and skewness estimation procedures for the Pearson type 3 distribution. *Water Resources Research*, 27(12): 3149-3158.
- VOS (2009) *Vodoprivredna osnova Srbije – Hidrometeorološke podloge*, Ministarstvo poljoprivrede, šumarstva i vodoprivrede, Direkcija za vode i Institut „Jaroslav Černi“.
- Vukmirović V. (1988) *Analiza verovatnoće pojave hidroloških veličina*, Građevinski fakultet i Naučna knjiga, Beograd.
- Vukmirović V. (2010) Analiza kiša metodom parcijalnih serija. *Vodoprivreda*, 42(1-3): 7-15.
- Vukmirović V., Despotović J. (1984) Statistical methods of storm analysis, *Water Science and Technology*, 16(8-9): 85-92.
- Vukmirović V., Pavlović D. (2000) Utvrđivanje kriterijuma za izbor merodavnih velikih voda. Tema 2 u okviru naučno-istraživačkog projekta TSI 114 „Savremene metode u hidrotehnici“, Građevinski fakultet Univerziteta u Beogradu.
- Vukmirović V., Pavlović D. (2005) *Primenjena hidrologija – zbirka zadataka*. Građevinski fakultet Univerziteta u Beogradu.

- Vukmirović V., Petrović J. (1996) Analiza malih rečnih voda metodom pikova, *Vodoprivreda*, 28(3-4): 175-180.
- Vukmirović V., Vukmirović N. (2017) Stochastic analysis of flood series. *Hydrological Sciences Journal*, 62(11): 1721-1735.
- Wanielista M., Kersten R., Eaglin R. (1997) *Hydrology – Water Quantity and Quality Control*, 2nd edition, John Wiley & Sons.
- Wiesner C.J. (1970) *Hydrometeorology*. Chapman and Hall, London.
- WMO (1986) *Manual for Estimation of Probable Maximum Precipitation*, WMO-No. 332, World Meteorological Organization, Geneva, Switzerland.
- WMO (2008a) *Guide to Hydrologic Practices*, Vol. I: Hydrology – From Measurement to Hydrological Information, WMO-No. 168, 6th edition, World Meteorological Organization, Geneva, Switzerland.
- WMO (2008b) *Guide to Meteorological Instruments and Methods of Observation*, Appendix 4B, WMO-No. 8 (CIMO Guide), World Meteorological Organization, Geneva, Switzerland.
- WMO (2008c) *Manual on Low-flow Estimation and Prediction* (Gustard A., Demuth S., eds.), Operational Hydrology Report No. 50, WMO-No. 1029, World Meteorological Organization, Geneva, Switzerland.
- WMO (2009a) *Guide to Hydrological Practices*, Vol. II: Management of Water Resources and Application of Hydrological Practices, WMO-No. 168, 6th edition, World Meteorological Organization, Geneva, Switzerland.
- WMO (2009b) *Manual on Estimation of Probable Maximum Precipitation*, WMO-No. 1045, World Meteorological Organization, Geneva, Switzerland.
- WMO & UNESCO (2012) *International Glossary of Hydrology*. WMO-No. 385, World Meteorological Organization and UNESCO.
- Wong T.S.W. (2005) Assessment of Time of Concentration Formulas for overland flow, *Journal of Irrigation and Drainage Engineering*, ASCE, 131(4): 383-387.
- Woodward D.E., Hoelt C.C., Hawkins R.H., Van Mullem J., Ward T.J. (2010) Discussion of "Modifications to SCSCN Method for Long-Term Hydrologic Simulation" by K. Geetha, S. K. Mishra, T. I. Eldho, A. K. Rastogi, and R. P. Pandey. *Journal of Irrigation and Drainage Engineering*, 136(6): 444-446.
- Wright D.B., Smith J.A., Baeck M.L. (2014) Critical examination of area reduction factors. *Journal of Hydrologic Engineering*, 19(4): 769-776.
- Xu C.-Y., Singh V. P. (2002) Cross Comparison of Empirical Equations for Calculating Potential Evapotranspiration with Data from Switzerland, *Water Resources Management*, 16: 197-219.
- Yen B.C. and Chow V.T. (1983) Local design storms, Vol III., *Rep. H 38 No. FHWA-RD-82/065*, U.S. Dept. of Transportation, Federal Highway Administration, Washington, D.C.
- Yevjevich V. (1994) Floods and society, In: *Coping with floods*, G. Rossi i sar. (eds.), Kluwer Acad. Publ., pp. 3-9.
- Zelenhasić E. (2002) On the extreme streamflow drought analysis. *Water Resources Management*, 16: 105-132.
- Zelenhasić E., Ruski M. (1991) *Inženjerska hidrologija*. Naučna knjiga, Beograd.
- Zelenhasić E., Salvai A. (1987) A method of streamflow drought analysis. *Water Resources Research*, 23(1): 156-168.

DODACI

A Sunčevo zračenje na granici atmosfere

Tabela A.1. Vrednosti jačine Sunčevog zračenja na granici atmosfere R_a za sredine meseca za geografske širine (GŠ) karakteristične za Srbiju.

GŠ	R_a (W/m ²)				
	42°	43°	44°	45°	46°
Jan	160.0	152.9	145.8	138.6	131.5
Feb	219.8	213.0	206.1	199.3	192.3
Mar	306.0	300.4	294.8	289.1	283.3
Apr	394.9	391.6	388.1	384.5	380.8
Maj	458.5	457.3	456.1	454.8	453.3
Jun	484.7	484.8	484.7	484.6	484.4
Jul	471.1	470.7	470.1	469.4	468.7
Avg	418.6	416.2	413.6	411.0	408.2
Sep	337.1	332.4	327.5	322.6	317.5
Okt	246.0	239.6	233.2	226.6	220.1
Nov	174.0	166.9	159.9	152.8	145.7
Dec	142.6	135.5	128.4	121.3	114.3

Tabela A.2. Vrednosti dužine dana N (potencijalnog trajanja Sunčevog sjaja) za sredine meseca za geografske širine (GŠ) karakteristične za Srbiju.

GŠ	N (h)				
	42°	43°	44°	45°	46°
Jan	9.28	9.18	9.08	8.97	8.85
Feb	10.33	10.27	10.21	10.14	10.08
Mar	11.70	11.69	11.68	11.66	11.65
Apr	13.16	13.20	13.24	13.29	13.33
Maj	14.40	14.49	14.59	14.68	14.78
Jun	15.05	15.16	15.28	15.41	15.54
Jul	14.75	14.86	14.96	15.08	15.19
Avg	13.67	13.73	13.79	13.86	13.92
Sep	12.25	12.26	12.27	12.28	12.29
Okt	10.80	10.75	10.71	10.66	10.62
Nov	9.56	9.47	9.38	9.28	9.18
Dec	8.95	8.83	8.71	8.59	8.46

B Važeći standardi iz oblasti hidrometrije u Srbiji

Tabela B.1. Standardi iz oblasti hidrometrije u Srbiji.

Standard	Opis
SRPS ISO/TR 8363:2003; Merenje protoka vode u otvorenim tokovima – Opšte smernice za izbor metode	Izbor metode za određivanje protoka vode u otvorenim tokovima
SRPS ISO 8368:2004; Hidrometrija – Merenje protoka vode u otvorenim tokovima korišćenjem mernih objekata – Smernice za izbor mernih objekata	Izbor metode pogodne za merenje protoka vode u otvorenim tokovima pomoću mernih objekata
SRPS ISO 748:2003; Merenje protoka vode u otvorenim tokovima – Metode za određivanje protoka merenjem brzina i površine (metode brzina-površina)	Metode za određivanje protoka vode merenjem brzina i površine poprečnog preseka vodenog toka u otvorenim tokovima bez ledenog pokrivača i metode za proračun protoka na osnovu tih merenja
ISO 2537:2007; Hidrometrija – Hidrometrijska krila sa obrtnim elementom ISO 3455:2007; Hidrometrija – Kalibracija hidrometrijskih krila i pravom otvorenom kanalu	Način konstrukcije, kalibracije i održavanja hidrometrijskih krila sa obrtnim elementom
ISO/TS 15768:2000; Merenje brzine tečnosti u otvorenim kanalima – Dizajn, izbor i upotreba elektromagnetnih hidrometrijskih krila	Način konstrukcije, kalibracije i održavanja elektromagnetnih krila
SRPS ISO 3454:2003; Merenje protoka u otvorenim tokovima – Oprema za direktno merenje dubina i oprema za vešanje	Funkcionalni zahtevi koje treba da ispuni oprema za direktno merenje dubina i oprema za vešanje instrumenata
SRPS ISO 4375:2005; Hidrometrija – Žičare za merenja u otvorenim tokovima	Zahtevi koje moraju da ispune žičare za merenja u otvorenim tokovima, kao i prateća oprema, ankeri, noseći stubovi i pomoćni mehanizmi
SRPS ISO 9825:2005; Merenje protoka vode u otvorenim tokovima – Merenje protoka na velikim rekama i merenje protoka velikih voda	Metode za određivanje protoka vode na velikim rekama i za merenje protoka velikih voda, koje se razlikuju zbog dimenzija velikih reka i zbog rizika povezanih sa pojavom velikih voda, uključujući indirektnu metode merenja protoka vode
SRPS ISO/TR 9210:2005; Merenje protoka vode u otvorenim tokovima – Merenja na rekama koje meandriraju i na vodotocima sa nestabilnim konturama	Metode za određivanje protoka vode na rekama koje meandriraju, na vodotocima sa nestabilnim koritima, na razuđenim rekama i za merenje protoka vode sa mosta
SRPS ISO 1100-1:2005; Merenje protoka vode u otvorenim tokovima – Deo 1: Osnivanje i funkcionisanje hidrološke stanice SRPS ISO 4373:2005; Merenje protoka vode u otvorenim tokovima – Uređaji za merenje vodostaja	Metode za direktno i indirektno očitavanje, kodiranje i beleženje vodostaja površinskih voda

Tabela B.1 (nastavak). Standardi iz oblasti hidrometrije u Srbiji.

Standard	Opis
SRPS ISO 4373:2005; Merenje protoka vode u otvorenim tokovima – Uređaji za merenje vodostaja	Funkcionalni zahtevi za opremu koja se koristi za direktno i indirektno očitavanje i beleženje vodostaja
ISO/TR 24578:2012; Hidrometrija – Akustički Dopler uređaji – Metod i primena za merenje protoka u otvorenim tokovima	Metode za merenje brzine vode i određivanje protoka vode primenom akustičnog Dopler uređaja
SRPS ISO 1100-2:2005; Merenje protoka vode u otvorenim tokovima – Deo 2: Određivanje zavisnosti vodostaj-protok	Metode za definisanje zavisnosti vodostaj-protok (krive protoka) uključujući ekstrapolaciju krivih protoka

C Podaci u primerima

Tabela C.1. Srednji dnevni protoci na Velikoj Moravi kod Varvarina u 2010. godini.

Stanica: Varvarin												
Reka: Velika Morava												
Površina sliva: 31548 km ²												
Godina: 2010												
Dan	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
1	414	182	1090	486	421	293	408	127	68.6	62.7	113	191
2	377	194	938	450	386	355	440	144	69.9	62.7	108	251
3	380	194	1020	414	355	327	482	134	75.1	61.6	109	271
4	402	196	1050	395	327	299	450	123	69.9	60.5	108	280
5	380	215	930	370	305	287	336	132	71.2	61.6	105	450
6	370	212	910	349	296	271	271	132	69.9	66.0	102	616
7	386	218	806	358	299	265	229	131	75.1	68.6	97.4	542
8	473	215	677	392	321	240	202	122	75.1	75.1	90.2	453
9	479	215	624	380	290	215	189	115	68.6	75.1	87.4	392
10	456	232	579	358	271	207	177	111	69.9	71.2	93.0	342
11	482	226	571	342	254	191	168	103	68.6	67.3	95.9	308
12	456	240	597	339	246	179	158	100	69.9	67.3	95.9	280
13	418	302	635	342	248	175	160	103	80.4	66.0	103	243
14	373	446	669	333	237	175	171	93.0	77.7	66.0	109	232
15	339	482	658	342	234	164	154	98.8	71.2	68.6	102	223
16	305	414	608	446	254	160	142	94.5	72.5	73.8	93.0	207
17	277	418	590	517	336	158	140	93.0	71.2	87.4	88.8	189
18	262	727	590	624	352	154	131	91.6	67.3	95.9	88.8	191
19	248	1140	556	631	414	164	138	83.2	67.3	103	91.6	204
20	248	1380	538	846	459	175	144	79.0	64.9	109	94.5	207
21	240	1480	564	1330	405	184	140	80.4	68.6	125	100	207
22	220	1520	575	1620	364	177	142	77.7	68.6	118	90.2	302
23	223	1540	593	1740	402	209	131	71.2	69.9	106	95.9	395
24	218	1190	590	1330	524	377	131	75.1	68.6	94.5	189	421
25	199	966	575	938	546	361	127	83.2	66.0	93.0	237	411
26	186	1050	535	746	443	240	123	86.0	62.7	95.9	207	450
27	179	1250	510	654	389	212	120	76.4	59.4	108	177	418
28	177	1200	493	582	339	361	118	66.0	66.0	108	171	361
29	179		575	493	308	469	131	67.3	63.8	115	175	315
30	179		616	450	302	389	122	63.8	63.8	125	171	260
31	173		560		277		115	62.7		116		240

Izvor: Republički hidrometeorološki zavod Srbije, Hidrološki godišnjak – Površinske vode, 2010.

Tabela C.2. Godišnje visine padavina na stanicama Beograd-Opsevatorija i Vrčin.

Beograd-Opsevatorija (mm)	Vrčin (mm)
728.2	635.7
589.8	494.1
539.1	571.3
673.6	535.2
701.2	900.9
788.5	757.7
746.7	845.9
584.5	713.6
1051.2	757.2
367.7	327.7
893.1	730.2
594.4	613.9
547.9	520.9
832.2	800.9
788.2	798.4
749.3	653.5

D Statističke tablice

Tabela D.1. Neke funkcije za statističke proračune u MS Excelu.

Funkcija	Opis
AVERAGE	srednja vrednost niza
BINOM.DIST	binomna raspodela
CHISQ.DIST	hi-hvadrat raspodela
CHISQ.INV	inverzna hi-kvadrat raspodela
CHISQ.TEST	hi-kvadrat test
CORREL	koeficijent korelacije
COUNT	broj članova niza
EXPON.DIST	eksponencijalna raspodela
F.DIST	F raspodela
F.INV	inverzna F raspodela
F.TEST	F-test
FREQUENCY	frekvencije (učestalosti)
GAMMA.DIST	dvoparametarska gama raspodela
GAMMA.INV	inverzna dvoparametarska gama raspodela
GAMMALN	prirodni logaritam gama funkcije
INTERCEPT	koeficijent linearne regresije (konstanta)
LOGNORM.DIST	log-normalna raspodela
LOGNORM.INV	inverzna log-normalna raspodela
MAX	maksimum niza
MEDIAN	medijana niza
MIN	minimum niza
MODE	mod niza (najučestalija vrednost)
NEGBINOM.DIST	negativna binomna raspodela
NORM.DIST	normalna raspodela
NORM.INV	inverzna normalna raspodela
NORM.S.DIST	standardizovana normalna raspodela
NORM.S.INV	inverzna standardizovana normalna raspodela
POISSON.DIST	Puasonova raspodela
RANK	rang u nizu
SKEW	koeficijent asimetrije
SLOPE	koeficijent linearne regresije (nagib linije)
STANDARDIZE	standardizovana vrednost
STDEV.P	standardna devijacija populacije
STDEV.S	standardna devijacija uzorka (nepriistrasna)
STEYX	standardna greška regresije Y na X
T.DIST	Studentova t raspodela
T.INV	inverzna Studentova t raspodela
T.TEST	t-test
VAR.P	varijansa populacije
VAR.S	varijansa uzorka (nepriistrasna)
WEIBULL.DIST	Wejbulova raspodela
Z.TEST	z-test

Tabela D.2. Funkcija standardne normalne raspodele $\Phi(z)$.

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

Napomena 1: Za $z < 0$ važi $\Phi(z) = 1 - \Phi(|z|)$.

Napomena 2: Vrednosti funkcije normalne raspodele iz tabele mogu se dobiti u Microsoft Excelu pomoću funkcije NORM.S.DIST(z).

Tabela D.3. Funkcija standardne normalne raspodele: vrednosti standardne promenljive z za zadate vrednosti funkcije raspodele.

$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z
0.001	-3.090	0.5	0.000
0.002	-2.878	0.6	0.253
0.005	-2.576	0.7	0.524
0.01	-2.326	0.75	0.674
0.02	-2.054	0.8	0.842
0.025	-1.960	0.9	1.282
0.05	-1.645	0.95	1.645
0.1	-1.282	0.975	1.960
0.2	-0.842	0.98	2.054
0.25	-0.674	0.99	2.326
0.3	-0.524	0.995	2.576
0.4	-0.253	0.998	2.878
0.5	0.000	0.999	3.090

Napomena: Vrednosti normalne promenljive iz tabele mogu se dobiti u Microsoft Excelu pomoću funkcije NORM.S.INV(F).

Tabela D.4. Gama funkcija $\Gamma(x)$.

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0		99.43	49.44	32.78	24.46	19.47	16.15	13.77	12.00	10.62
0.1	9.514	8.613	7.863	7.230	6.689	6.220	5.811	5.451	5.132	4.847
0.2	4.591	4.360	4.150	3.960	3.786	3.626	3.478	3.343	3.217	3.100
0.3	2.992	2.890	2.796	2.707	2.624	2.546	2.473	2.404	2.338	2.277
0.4	2.218	2.163	2.110	2.061	2.013	1.968	1.925	1.884	1.845	1.808
0.5	1.772	1.738	1.706	1.675	1.645	1.616	1.589	1.562	1.537	1.513
0.6	1.489	1.467	1.445	1.424	1.404	1.385	1.366	1.348	1.331	1.314
0.7	1.298	1.282	1.267	1.253	1.239	1.225	1.212	1.200	1.187	1.176
0.8	1.164	1.153	1.142	1.132	1.122	1.112	1.103	1.094	1.085	1.077
0.9	1.069	1.061	1.053	1.046	1.038	1.031	1.025	1.018	1.012	1.006

Napomena: Vrednosti gama funkcije iz tabele mogu se dobiti u Microsoft Excelu pomoću kombinacije funkcija GAMMALN i EXP: EXP(GAMMALN(x)).

Tabela D.5. Faktor frekvencije K_p za Pirsonovu raspodelu III tipa u zavisnosti od koeficijenta asimetrije C_s .

C_s	$F(x)$										
	0.001	0.002	0.005	0.01	0.02	0.05	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
-3.0	-7.152	-6.205	-4.970	-4.051	-3.152	-2.003	-1.180	-0.420	-0.023	0.227	0.396
-2.9	-7.034	-6.113	-4.909	-4.013	-3.134	-2.007	-1.195	-0.440	-0.040	0.215	0.390
-2.8	-6.915	-6.019	-4.847	-3.973	-3.114	-2.010	-1.210	-0.460	-0.057	0.203	0.384
-2.7	-6.794	-5.923	-4.783	-3.932	-3.093	-2.012	-1.224	-0.479	-0.075	0.189	0.376
-2.6	-6.672	-5.826	-4.718	-3.889	-3.071	-2.013	-1.238	-0.499	-0.093	0.176	0.369
-2.5	-6.548	-5.728	-4.652	-3.845	-3.048	-2.012	-1.250	-0.518	-0.111	0.161	0.360
-2.4	-6.423	-5.628	-4.584	-3.800	-3.023	-2.011	-1.262	-0.537	-0.130	0.147	0.351
-2.3	-6.296	-5.527	-4.515	-3.753	-2.997	-2.009	-1.274	-0.555	-0.148	0.131	0.341
-2.2	-6.168	-5.424	-4.444	-3.705	-2.970	-2.006	-1.284	-0.574	-0.167	0.116	0.330
-2.1	-6.039	-5.320	-4.372	-3.656	-2.942	-2.001	-1.294	-0.592	-0.185	0.100	0.319
-2.0	-5.908	-5.215	-4.298	-3.605	-2.912	-1.996	-1.303	-0.609	-0.204	0.084	0.307
-1.9	-5.775	-5.108	-4.223	-3.553	-2.881	-1.989	-1.311	-0.627	-0.222	0.067	0.294
-1.8	-5.642	-4.999	-4.147	-3.499	-2.848	-1.981	-1.318	-0.643	-0.241	0.050	0.281
-1.7	-5.507	-4.890	-4.069	-3.444	-2.815	-1.972	-1.324	-0.660	-0.259	0.033	0.268
-1.6	-5.371	-4.779	-3.990	-3.388	-2.780	-1.962	-1.329	-0.675	-0.277	0.016	0.254
-1.5	-5.234	-4.667	-3.910	-3.330	-2.743	-1.951	-1.333	-0.691	-0.295	-0.001	0.240
-1.4	-5.095	-4.553	-3.828	-3.271	-2.706	-1.938	-1.337	-0.705	-0.313	-0.018	0.225
-1.3	-4.955	-4.438	-3.745	-3.211	-2.667	-1.925	-1.339	-0.719	-0.331	-0.036	0.210
-1.2	-4.815	-4.323	-3.661	-3.149	-2.626	-1.910	-1.340	-0.733	-0.348	-0.053	0.195
-1.1	-4.673	-4.206	-3.575	-3.087	-2.585	-1.894	-1.341	-0.745	-0.365	-0.070	0.180
-1.0	-4.531	-4.088	-3.489	-3.023	-2.542	-1.877	-1.340	-0.758	-0.381	-0.088	0.164
-0.9	-4.388	-3.969	-3.401	-2.957	-2.498	-1.859	-1.339	-0.769	-0.397	-0.105	0.148
-0.8	-4.244	-3.850	-3.312	-2.891	-2.453	-1.839	-1.336	-0.780	-0.413	-0.122	0.132
-0.7	-4.100	-3.730	-3.223	-2.824	-2.407	-1.819	-1.333	-0.790	-0.429	-0.139	0.116
-0.6	-3.956	-3.609	-3.132	-2.755	-2.359	-1.797	-1.329	-0.800	-0.444	-0.156	0.099
-0.5	-3.811	-3.487	-3.041	-2.686	-2.311	-1.774	-1.323	-0.808	-0.458	-0.173	0.083
-0.4	-3.666	-3.366	-2.949	-2.615	-2.261	-1.750	-1.317	-0.816	-0.472	-0.189	0.067
-0.3	-3.521	-3.244	-2.856	-2.544	-2.211	-1.726	-1.309	-0.824	-0.486	-0.206	0.050
-0.2	-3.377	-3.122	-2.763	-2.472	-2.159	-1.700	-1.301	-0.830	-0.499	-0.222	0.033
-0.1	-3.233	-3.000	-2.670	-2.400	-2.107	-1.673	-1.292	-0.836	-0.512	-0.238	0.017
0.0	-3.090	-2.878	-2.576	-2.326	-2.054	-1.645	-1.282	-0.842	-0.524	-0.253	0.000

Tabela D.5 (nastavak). Faktor frekvencije K_p za Pirsonovu raspodelu III tipa u zavisnosti od koeficijenta asimetrije C_s .

C_s	$F(x)$										
	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	0.95	0.96	0.98	0.99	0.995	0.999
-3.0	0.396	0.511	0.588	0.636	0.660	0.665	0.666	0.666	0.667	0.667	0.667
-2.9	0.390	0.512	0.596	0.651	0.681	0.688	0.688	0.689	0.690	0.690	0.690
-2.8	0.384	0.513	0.604	0.666	0.702	0.711	0.712	0.714	0.714	0.714	0.714
-2.7	0.376	0.513	0.612	0.681	0.724	0.736	0.738	0.740	0.740	0.741	0.741
-2.6	0.369	0.512	0.619	0.696	0.747	0.762	0.765	0.768	0.769	0.769	0.769
-2.5	0.360	0.510	0.625	0.711	0.771	0.790	0.793	0.798	0.799	0.800	0.800
-2.4	0.351	0.507	0.630	0.725	0.795	0.819	0.823	0.830	0.832	0.833	0.833
-2.3	0.341	0.504	0.635	0.739	0.819	0.850	0.855	0.864	0.867	0.869	0.869
-2.2	0.330	0.500	0.638	0.752	0.844	0.882	0.888	0.900	0.905	0.907	0.909
-2.1	0.319	0.495	0.641	0.765	0.869	0.915	0.923	0.939	0.946	0.949	0.952
-2.0	0.307	0.489	0.643	0.777	0.895	0.949	0.959	0.980	0.990	0.995	0.999
-1.9	0.294	0.483	0.645	0.788	0.920	0.984	0.997	1.023	1.037	1.044	1.051
-1.8	0.281	0.475	0.645	0.799	0.945	1.020	1.035	1.069	1.087	1.097	1.107
-1.7	0.268	0.467	0.644	0.808	0.970	1.056	1.075	1.116	1.140	1.155	1.170
-1.6	0.254	0.459	0.643	0.817	0.994	1.093	1.116	1.166	1.197	1.216	1.238
-1.5	0.240	0.449	0.641	0.825	1.018	1.131	1.157	1.217	1.256	1.282	1.313
-1.4	0.225	0.439	0.638	0.832	1.041	1.168	1.198	1.270	1.318	1.351	1.394
-1.3	0.210	0.429	0.634	0.838	1.064	1.206	1.240	1.324	1.383	1.424	1.482
-1.2	0.195	0.418	0.629	0.844	1.086	1.243	1.282	1.379	1.449	1.501	1.577
-1.1	0.180	0.406	0.624	0.848	1.107	1.280	1.324	1.435	1.518	1.581	1.678
-1.0	0.164	0.394	0.618	0.852	1.128	1.317	1.366	1.492	1.588	1.664	1.786
-0.9	0.148	0.382	0.611	0.854	1.147	1.353	1.407	1.549	1.660	1.749	1.899
-0.8	0.132	0.369	0.604	0.856	1.166	1.389	1.448	1.606	1.733	1.837	2.017
-0.7	0.116	0.356	0.596	0.857	1.183	1.423	1.489	1.663	1.806	1.926	2.141
-0.6	0.099	0.342	0.588	0.857	1.200	1.458	1.528	1.720	1.880	2.016	2.268
-0.5	0.083	0.328	0.578	0.857	1.216	1.491	1.567	1.777	1.955	2.108	2.399
-0.4	0.067	0.314	0.569	0.855	1.231	1.524	1.606	1.834	2.029	2.201	2.533
-0.3	0.050	0.299	0.558	0.853	1.245	1.555	1.643	1.890	2.104	2.294	2.669
-0.2	0.033	0.284	0.548	0.850	1.258	1.586	1.680	1.945	2.178	2.388	2.808
-0.1	0.017	0.269	0.536	0.846	1.270	1.616	1.716	2.000	2.253	2.482	2.948
0.0	0.000	0.253	0.524	0.842	1.282	1.645	1.751	2.054	2.326	2.576	3.090

Tabela D.5 (nastavak). Faktor frekvencije K_p za Pirsonovu raspodelu III tipa u zavisnosti od koeficijenta asimetrije C_s .

C_s	$F(x)$										
	0.001	0.002	0.005	0.01	0.02	0.05	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
0.0	-3.090	-2.878	-2.576	-2.326	-2.054	-1.645	-1.282	-0.842	-0.524	-0.253	0.000
0.1	-2.948	-2.757	-2.482	-2.253	-2.000	-1.616	-1.270	-0.846	-0.536	-0.269	0.017
0.2	-2.808	-2.637	-2.388	-2.178	-1.945	-1.586	-1.258	-0.850	-0.548	-0.284	-0.033
0.3	-2.669	-2.517	-2.294	-2.104	-1.890	-1.555	-1.245	-0.853	-0.558	-0.299	-0.050
0.4	-2.533	-2.399	-2.201	-2.029	-1.834	-1.524	-1.231	-0.855	-0.569	-0.314	-0.067
0.5	-2.399	-2.283	-2.108	-1.955	-1.777	-1.491	-1.216	-0.857	-0.578	-0.328	-0.083
0.6	-2.268	-2.169	-2.016	-1.880	-1.720	-1.458	-1.200	-0.857	-0.588	-0.342	-0.099
0.7	-2.141	-2.057	-1.926	-1.806	-1.663	-1.423	-1.183	-0.857	-0.596	-0.356	-0.116
0.8	-2.017	-1.948	-1.837	-1.733	-1.606	-1.389	-1.166	-0.856	-0.604	-0.369	-0.132
0.9	-1.899	-1.842	-1.749	-1.660	-1.549	-1.353	-1.147	-0.854	-0.611	-0.382	-0.148
1.0	-1.786	-1.741	-1.664	-1.588	-1.492	-1.317	-1.128	-0.852	-0.618	-0.394	-0.164
1.1	-1.678	-1.643	-1.581	-1.518	-1.435	-1.280	-1.107	-0.848	-0.624	-0.406	-0.180
1.2	-1.577	-1.550	-1.501	-1.449	-1.379	-1.243	-1.086	-0.844	-0.629	-0.418	-0.195
1.3	-1.482	-1.462	-1.424	-1.383	-1.324	-1.206	-1.064	-0.838	-0.634	-0.429	-0.210
1.4	-1.394	-1.380	-1.351	-1.318	-1.270	-1.168	-1.041	-0.832	-0.638	-0.439	-0.225
1.5	-1.313	-1.303	-1.282	-1.256	-1.217	-1.131	-1.018	-0.825	-0.641	-0.449	-0.240
1.6	-1.238	-1.231	-1.216	-1.197	-1.166	-1.093	-0.994	-0.817	-0.643	-0.459	-0.254
1.7	-1.170	-1.165	-1.155	-1.140	-1.116	-1.056	-0.970	-0.808	-0.644	-0.467	-0.268
1.8	-1.107	-1.105	-1.097	-1.087	-1.069	-1.020	-0.945	-0.799	-0.645	-0.475	-0.281
1.9	-1.051	-1.049	-1.044	-1.037	-1.023	-0.984	-0.920	-0.788	-0.645	-0.483	-0.294
2.0	-0.999	-0.998	-0.995	-0.990	-0.980	-0.949	-0.895	-0.777	-0.643	-0.489	-0.307
2.1	-0.952	-0.951	-0.949	-0.946	-0.939	-0.915	-0.869	-0.765	-0.641	-0.495	-0.319
2.2	-0.909	-0.909	-0.907	-0.905	-0.900	-0.882	-0.844	-0.752	-0.638	-0.500	-0.330
2.3	-0.869	-0.869	-0.869	-0.867	-0.864	-0.850	-0.819	-0.739	-0.635	-0.504	-0.341
2.4	-0.833	-0.833	-0.833	-0.832	-0.830	-0.819	-0.795	-0.725	-0.630	-0.507	-0.351
2.5	-0.800	-0.800	-0.800	-0.799	-0.798	-0.790	-0.771	-0.711	-0.625	-0.510	-0.360
2.6	-0.769	-0.769	-0.769	-0.769	-0.768	-0.762	-0.747	-0.696	-0.619	-0.512	-0.369
2.7	-0.741	-0.741	-0.741	-0.740	-0.740	-0.736	-0.724	-0.681	-0.612	-0.513	-0.376
2.8	-0.714	-0.714	-0.714	-0.714	-0.714	-0.711	-0.702	-0.666	-0.604	-0.513	-0.384
2.9	-0.690	-0.690	-0.690	-0.690	-0.689	-0.688	-0.681	-0.651	-0.596	-0.512	-0.390
3.0	-0.667	-0.667	-0.667	-0.667	-0.666	-0.665	-0.660	-0.636	-0.588	-0.511	-0.396

Tabela D.5 (nastavak). Faktor frekvencije K_p za Pirsonovu raspodelu III tipa u zavisnosti od koeficijenta asimetrije C_s .

C_s	$F(x)$										
	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	0.95	0.96	0.98	0.99	0.995	0.999
0.0	0.000	0.253	0.524	0.842	1.282	1.645	1.751	2.054	2.326	2.576	3.090
0.1	0.017	0.238	0.512	0.836	1.292	1.673	1.785	2.107	2.400	2.670	3.233
0.2	-0.033	0.222	0.499	0.830	1.301	1.700	1.818	2.159	2.472	2.763	3.377
0.3	-0.050	0.206	0.486	0.824	1.309	1.726	1.849	2.211	2.544	2.856	3.521
0.4	-0.067	0.189	0.472	0.816	1.317	1.750	1.880	2.261	2.615	2.949	3.666
0.5	-0.083	0.173	0.458	0.808	1.323	1.774	1.910	2.311	2.686	3.041	3.811
0.6	-0.099	0.156	0.444	0.800	1.329	1.797	1.939	2.359	2.755	3.132	3.956
0.7	-0.116	0.139	0.429	0.790	1.333	1.819	1.967	2.407	2.824	3.223	4.100
0.8	-0.132	0.122	0.413	0.780	1.336	1.839	1.993	2.453	2.891	3.312	4.244
0.9	-0.148	0.105	0.397	0.769	1.339	1.859	2.018	2.498	2.957	3.401	4.388
1.0	-0.164	0.088	0.381	0.758	1.340	1.877	2.043	2.542	3.023	3.489	4.531
1.1	-0.180	0.070	0.365	0.745	1.341	1.894	2.066	2.585	3.087	3.575	4.673
1.2	-0.195	0.053	0.348	0.733	1.340	1.910	2.088	2.626	3.149	3.661	4.815
1.3	-0.210	0.036	0.331	0.719	1.339	1.925	2.108	2.667	3.211	3.745	4.955
1.4	-0.225	0.018	0.313	0.705	1.337	1.938	2.128	2.706	3.271	3.828	5.095
1.5	-0.240	0.001	0.295	0.691	1.333	1.951	2.146	2.743	3.330	3.910	5.234
1.6	-0.254	-0.016	0.277	0.675	1.329	1.962	2.163	2.780	3.388	3.990	5.371
1.7	-0.268	-0.033	0.259	0.660	1.324	1.972	2.179	2.815	3.444	4.069	5.507
1.8	-0.281	-0.050	0.241	0.643	1.318	1.981	2.193	2.848	3.499	4.147	5.642
1.9	-0.294	-0.067	0.222	0.627	1.311	1.989	2.207	2.881	3.553	4.223	5.775
2.0	-0.307	-0.084	0.204	0.609	1.303	1.996	2.219	2.912	3.605	4.298	5.908
2.1	-0.319	-0.100	0.185	0.592	1.294	2.001	2.230	2.942	3.656	4.372	6.039
2.2	-0.330	-0.116	0.167	0.574	1.284	2.006	2.240	2.970	3.705	4.444	6.168
2.3	-0.341	-0.131	0.148	0.555	1.274	2.009	2.248	2.997	3.753	4.515	6.296
2.4	-0.351	-0.147	0.130	0.537	1.262	2.011	2.256	3.023	3.800	4.584	6.423
2.5	-0.360	-0.161	0.111	0.518	1.250	2.012	2.262	3.048	3.845	4.652	6.548
2.6	-0.369	-0.176	0.093	0.499	1.238	2.013	2.267	3.071	3.889	4.718	6.672
2.7	-0.376	-0.189	0.075	0.479	1.224	2.012	2.272	3.093	3.932	4.783	6.794
2.8	-0.384	-0.203	0.057	0.460	1.210	2.010	2.275	3.114	3.973	4.847	6.915
2.9	-0.390	-0.215	0.040	0.440	1.195	2.007	2.277	3.134	4.013	4.909	7.034
3.0	-0.396	-0.227	0.023	0.420	1.180	2.003	2.278	3.152	4.051	4.970	7.152

Tabela D.6. Zavisnost koeficijenta asimetrije C_s od vrednosti parametra k u uopštenoj raspodeli ekstremnih vrednosti.

C_s	k	C_s	k	C_s	k	C_s	k
-1	0.6394						
-0.9	0.6015	0.1	0.2461	1.1	0.0067	2.2	-0.1259
-0.8	0.5636	0.2	0.2157	1.2	-0.0099	2.4	-0.1411
-0.7	0.5258	0.3	0.1868	1.3	-0.0255	2.6	-0.1544
-0.6	0.4882	0.4	0.1593	1.4	-0.0399	2.8	-0.1663
-0.5	0.4511	0.5	0.1332	1.5	-0.0535	3	-0.1769
-0.4	0.4146	0.6	0.1089	1.6	-0.0660	3.2	-0.1863
-0.3	0.3788	0.7	0.0857	1.7	-0.0778	3.4	-0.1948
-0.2	0.3443	0.8	0.0640	1.8	-0.0888	3.6	-0.2024
-0.1	0.3104	0.9	0.0436	1.9	-0.0990	3.8	-0.2093
0	0.2776	1	0.0244	2	-0.1085	4	-0.2155

Tabela D.7. Zavisnost koeficijenta asimetrije C_s od vrednosti parametra a u Weibulovoj raspodeli.

C_s	a	C_s	a	C_s	a	C_s	a
-1	40.654						
-0.9	22.873	0.1	3.2201	1.1	1.4764	2.2	0.9384
-0.8	15.623	0.2	2.9034	1.2	1.3987	2.4	0.8863
-0.7	11.634	0.3	2.6365	1.3	1.3293	2.6	0.8415
-0.6	9.1738	0.4	2.4095	1.4	1.2671	2.8	0.8026
-0.5	7.4892	0.5	2.2150	1.5	1.2111	3	0.7686
-0.4	6.2692	0.6	2.0471	1.6	1.1604	3.2	0.7386
-0.3	5.3491	0.7	1.9013	1.7	1.1146	3.4	0.7120
-0.2	4.6337	0.8	1.7740	1.8	1.0728	3.6	0.6882
-0.1	4.0642	0.9	1.6623	1.9	1.0348	3.8	0.6669
0	3.6000	1	1.5637	2	1.0000	4	0.6476

Tabela D.8. Studentova t -raspodela: vrednosti promenljive t za zadate vrednosti funkcije raspodele i broja stepeni slobode v .

v	Funkcija raspodele $F(t)$					
	0.8	0.9	0.95	0.975	0.99	0.995
1	1.376	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657
2	1.061	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	0.978	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	0.941	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	0.920	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6	0.906	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
7	0.896	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
8	0.889	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355
9	0.883	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250
10	0.879	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
11	0.876	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106
12	0.873	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055
13	0.870	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012
14	0.868	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977
15	0.866	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947
16	0.865	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921
17	0.863	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898
18	0.862	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878
19	0.861	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861
20	0.860	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845
21	0.859	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831
22	0.858	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819
23	0.858	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807
24	0.857	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797
25	0.856	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787
26	0.856	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779
27	0.855	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771
28	0.855	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763
29	0.854	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756
30	0.854	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750
35	0.852	1.306	1.690	2.030	2.438	2.724
40	0.851	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704
45	0.850	1.301	1.679	2.014	2.412	2.690
50	0.849	1.299	1.676	2.009	2.403	2.678
60	0.848	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660
70	0.847	1.294	1.667	1.994	2.381	2.648
80	0.846	1.292	1.664	1.990	2.374	2.639
90	0.846	1.291	1.662	1.987	2.368	2.632
100	0.845	1.290	1.660	1.984	2.364	2.626

Napomena 1: Za $F(t) < 0.5$ važi: $t(F) = -t(1 - F)$.

Napomena 2: Vrednosti Studentove promenljive iz table mogu se dobiti u Microsoft Excelu pomoću funkcije T.INV(F, v).

Tabela D.9. Fišerov F -test: vrednosti Fišerove promenljive F za prag značajnosti α i broj stepeni slobode v_1 i v_2 .

	v_1	v_2					
		5	10	15	25	30	40
$\alpha = 0.1$							
5	3.453	2.522	2.273	2.092	2.049	1.997	1.966
10	3.297	2.323	2.059	1.866	1.819	1.763	1.729
15	3.238	2.244	1.972	1.771	1.722	1.662	1.627
20	3.207	2.201	1.924	1.718	1.667	1.605	1.568
25	3.187	2.174	1.894	1.683	1.632	1.568	1.529
30	3.174	2.155	1.873	1.659	1.606	1.541	1.502
40	3.157	2.132	1.845	1.627	1.573	1.506	1.465
50	3.147	2.117	1.828	1.607	1.552	1.483	1.441
$\alpha = 0.05$							
5	5.050	3.326	2.901	2.603	2.534	2.449	2.400
10	4.735	2.978	2.544	2.236	2.165	2.077	2.026
15	4.619	2.845	2.403	2.089	2.015	1.924	1.871
20	4.558	2.774	2.328	2.007	1.932	1.839	1.784
25	4.521	2.730	2.280	1.955	1.878	1.783	1.727
30	4.496	2.700	2.247	1.919	1.841	1.744	1.687
40	4.464	2.661	2.204	1.872	1.792	1.693	1.634
50	4.444	2.637	2.178	1.842	1.761	1.660	1.599
$\alpha = 0.025$							
5	7.146	4.236	3.576	3.129	3.026	2.904	2.833
10	6.619	3.717	3.060	2.613	2.511	2.388	2.317
15	6.428	3.522	2.862	2.411	2.307	2.182	2.109
20	6.329	3.419	2.756	2.300	2.195	2.068	1.993
25	6.268	3.355	2.689	2.230	2.124	1.994	1.919
30	6.227	3.311	2.644	2.182	2.074	1.943	1.866
40	6.175	3.255	2.585	2.118	2.009	1.875	1.796
50	6.144	3.221	2.549	2.079	1.968	1.832	1.752
$\alpha = 0.01$							
5	10.967	5.636	4.556	3.855	3.699	3.514	3.408
10	10.051	4.849	3.805	3.129	2.979	2.801	2.698
15	9.722	4.558	3.522	2.850	2.700	2.522	2.419
20	9.553	4.405	3.372	2.699	2.549	2.369	2.265
25	9.449	4.311	3.278	2.604	2.453	2.271	2.167
30	9.379	4.247	3.214	2.538	2.386	2.203	2.098
40	9.291	4.165	3.132	2.453	2.299	2.114	2.007
50	9.238	4.115	3.081	2.400	2.245	2.058	1.949

Napomena: Kritične vrednosti iz tabele mogu se dobiti u Microsoft Excelu pomoću funkcije $FINV(\alpha, v_1, v_2)$.

Tabela D.10. Kolmogorov-Smirnov test: kritične vrednosti statistike $D(n, \alpha)$ u zavisnosti od efektivne dužine niza n i praga značajnosti α .

n	Prag značajnosti α			
	0.1	0.05	0.02	0.01
10	0.369	0.409	0.457	0.489
11	0.352	0.391	0.437	0.468
12	0.338	0.375	0.419	0.449
13	0.325	0.361	0.404	0.432
14	0.314	0.349	0.390	0.418
15	0.304	0.338	0.377	0.404
16	0.295	0.327	0.366	0.392
17	0.286	0.318	0.355	0.381
18	0.279	0.309	0.346	0.371
19	0.271	0.301	0.337	0.361
20	0.265	0.294	0.329	0.352
21	0.259	0.287	0.321	0.344
22	0.253	0.281	0.314	0.337
23	0.247	0.275	0.307	0.330
24	0.242	0.269	0.301	0.323
25	0.238	0.264	0.295	0.317
26	0.233	0.259	0.290	0.311
27	0.229	0.254	0.284	0.305
28	0.225	0.250	0.279	0.300
29	0.221	0.246	0.275	0.295
30	0.218	0.242	0.270	0.290
31	0.214	0.238	0.266	0.285
32	0.211	0.234	0.262	0.281
33	0.208	0.231	0.258	0.277
34	0.205	0.227	0.254	0.273
35	0.202	0.224	0.251	0.269
36	0.199	0.221	0.247	0.265
37	0.196	0.218	0.244	0.262
38	0.194	0.215	0.241	0.258
39	0.191	0.213	0.238	0.255
40	0.189	0.210	0.235	0.252
> 40	$1.22/\sqrt{n}$	$1.36/\sqrt{n}$	$1.52/\sqrt{n}$	$1.63/\sqrt{n}$

Izvor: Kottegod & Rosso (2008).

Tabela D.11. Test Grubsa i Beka za gornji ili donji izuzetak: kritične vrednosti statistike $K(n, \alpha)$ za prag značajnosti α i obim uzorka n .

n	Prag značajnosti α		
	0.1	0.05	0.01
10	2.036	2.176	2.410
11	2.088	2.234	2.484
12	2.134	2.285	2.549
13	2.176	2.331	2.607
14	2.213	2.372	2.658
15	2.248	2.409	2.705
16	2.279	2.443	2.747
17	2.309	2.475	2.785
18	2.336	2.504	2.821
19	2.361	2.531	2.853
20	2.385	2.557	2.884
25	2.486	2.663	3.009
30	2.565	2.745	3.103
35	2.630	2.812	3.178
40	2.684	2.868	3.239
45	2.731	2.915	3.292
50	2.772	2.957	3.337
60	2.841	3.027	3.411
70	2.898	3.084	3.471
80	2.946	3.132	3.521
90	2.987	3.173	3.563
100	3.024	3.210	3.600
110	3.056	3.242	3.633
120	3.086	3.271	3.662
130	3.112	3.297	3.688
140	3.136	3.321	3.712
150	3.159	3.343	3.734

Izvor: Grubbs & Beck (1972)

Tabela D.12. Test za postojanje k izuzetaka: kritične vrednosti statistike $L_k(n, \alpha)$ za prag značajnosti α i obim uzorka n .

n	$\alpha = 0.1$				$\alpha = 0.05$			
	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$
10	0.4881	0.2863	0.1703	0.0970	0.4154	0.2306	0.1298	0.0695
11	0.5205	0.3229	0.2050	0.1274	0.4510	0.2670	0.1620	0.0959
12	0.5483	0.3551	0.2366	0.1563	0.4823	0.2998	0.1921	0.1221
13	0.5727	0.3843	0.2660	0.1840	0.5096	0.3294	0.2207	0.1474
14	0.5942	0.4105	0.2932	0.2101	0.5340	0.3564	0.2473	0.1723
15	0.6134	0.4345	0.3181	0.2346	0.5559	0.3817	0.2722	0.1958
16	0.6305	0.4561	0.3413	0.2577	0.5756	0.4047	0.2954	0.2179
17	0.6461	0.4761	0.3628	0.2793	0.5932	0.4259	0.3175	0.2396
18	0.6602	0.4942	0.3826	0.2997	0.6095	0.4452	0.3379	0.2595
19	0.6731	0.5112	0.4011	0.3186	0.6242	0.4633	0.3569	0.2785
20	0.6849	0.5267	0.4184	0.3367	0.6379	0.4804	0.3749	0.2969
25	0.7319	0.5907	0.4904	0.4126	0.6921	0.5494	0.4502	0.3744
30	0.7656	0.6375	0.5446	0.4712	0.7313	0.6010	0.5080	0.4353
40	0.8109	0.7024	0.6213	0.5557	0.7838	0.6722	0.5901	0.5243
45	0.8270	0.7261	0.6497	0.5874	0.8025	0.6984	0.6209	0.5583
50	0.8404	0.7458	0.6737	0.6143	0.8180	0.7203	0.6469	0.5869
55	0.8517	0.7627	0.6943	0.6377	0.8311	0.7390	0.6691	0.6117
60	0.8613	0.7771	0.7120	0.6579	0.8422	0.7551	0.6884	0.6333
65	0.8696	0.7897	0.7276	0.6756	0.8519	0.7691	0.7054	0.6526
70	0.8769	0.8010	0.7415	0.6915	0.8603	0.7814	0.7204	0.6695
75	0.8834	0.8108	0.7537	0.7055	0.8678	0.7923	0.7337	0.6846
80	0.8892	0.8196	0.7647	0.7183	0.8744	0.8022	0.7457	0.6983
85	0.8943	0.8276	0.7747	0.7298	0.8804	0.8109	0.7565	0.7108
90	0.8990	0.8348	0.7838	0.7404	0.8858	0.8190	0.7664	0.7221
95	0.9032	0.8414	0.7921	0.7501	0.8906	0.8262	0.7754	0.7325
100	0.9071	0.8475	0.7997	0.7589	0.8951	0.8330	0.7838	0.7420

Izvor: Verma & Quiroz-Ruiz (2006)

Tabela D.13. Hi-kvadrat test: kritične vrednosti statistike χ^2 sa v stepeni slobode za prag značajnosti α

v	Prag značajnosti α			
	0.1	0.05	0.025	0.01
1	2.71	3.84	5.02	6.63
2	4.61	5.99	7.38	9.21
3	6.25	7.81	9.35	11.3
4	7.78	9.49	11.1	13.3
5	9.24	11.1	12.8	15.1
6	10.6	12.6	14.4	16.8
7	12.0	14.1	16.0	18.5
8	13.4	15.5	17.5	20.1
9	14.7	16.9	19.0	21.7
10	16.0	18.3	20.5	23.2
11	17.3	19.7	21.9	24.7
12	18.5	21.0	23.3	26.2
13	19.8	22.4	24.7	27.7
14	21.1	23.7	26.1	29.1
15	22.3	25.0	27.5	30.6
16	23.5	26.3	28.8	32.0
17	24.8	27.6	30.2	33.4
18	26.0	28.9	31.5	34.8
19	27.2	30.1	32.9	36.2
20	28.4	31.4	34.2	37.6
21	29.6	32.7	35.5	38.9
22	30.8	33.9	36.8	40.3
23	32.0	35.2	38.1	41.6
24	33.2	36.4	39.4	43.0
25	34.4	37.7	40.6	44.3
26	35.6	38.9	41.9	45.6
27	36.7	40.1	43.2	47.0
28	37.9	41.3	44.5	48.3
29	39.1	42.6	45.7	49.6
30	40.3	43.8	47.0	50.9

Izvor: Kottegodu & Rosso (2008).

Napomena: Kritične vrednosti iz tabele mogu se dobiti u Microsoft Excelu pomoću funkcije CHISQ.INV(1- α , v).Tabela D.14. Kramer – fon Mizes test: kritične vrednosti statistike $\omega^2(n, \alpha)$ za prag značajnosti α i obim uzorka n .

n	Prag značajnosti α			
	0.1	0.05	0.025	0.01
	Modifikovana statistika $(\omega^2 - 0.4/n + 0.6/n^2)(1 + 1/n)$			
	0.347	0.461	0.581	0.743
	Statistika ω^2			
10	0.349	0.453	0.562	0.709
15	0.349	0.456	0.569	0.721
20	0.349	0.458	0.572	0.726
30	0.348	0.459	0.575	0.732
40	0.348	0.459	0.576	0.735
50	0.348	0.460	0.577	0.736
60	0.348	0.460	0.578	0.737
70	0.348	0.460	0.578	0.738
80	0.348	0.460	0.579	0.739
90	0.348	0.460	0.579	0.739
100	0.348	0.460	0.579	0.740

Izvor: D'Agostino & Stephens (1986).

Tabela D.15. Test PPCC: kritične vrednosti statistike r za saglasnost sa normalnom raspodelom za prag značajnosti α i obim uzorka n .

n	Prag značajnosti α			
	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.934	0.917	0.900	0.876
11	0.938	0.922	0.906	0.883
12	0.941	0.926	0.912	0.889
13	0.944	0.931	0.917	0.895
14	0.947	0.934	0.921	0.901
15	0.950	0.937	0.925	0.907
16	0.952	0.940	0.928	0.912
17	0.954	0.942	0.931	0.916
18	0.956	0.945	0.934	0.919
19	0.958	0.947	0.937	0.923
20	0.960	0.950	0.939	0.925
21	0.961	0.952	0.942	0.928
22	0.962	0.954	0.944	0.930
23	0.964	0.955	0.947	0.933
24	0.965	0.957	0.949	0.936
25	0.966	0.958	0.95	0.937
26	0.967	0.959	0.952	0.939
27	0.968	0.96	0.953	0.941
28	0.969	0.962	0.955	0.943
29	0.969	0.962	0.956	0.945
30	0.970	0.964	0.957	0.947
31	0.971	0.965	0.958	0.948
32	0.972	0.966	0.959	0.949
33	0.973	0.967	0.960	0.950
34	0.973	0.967	0.960	0.951
35	0.974	0.968	0.961	0.952
36	0.974	0.968	0.962	0.953
37	0.975	0.969	0.962	0.955
38	0.975	0.970	0.964	0.956
39	0.976	0.971	0.965	0.957
40	0.977	0.972	0.966	0.958
45	0.978	0.974	0.969	0.961
50	0.981	0.977	0.972	0.965
55	0.982	0.978	0.974	0.967
60	0.983	0.980	0.976	0.970
65	0.984	0.981	0.977	0.972
70	0.985	0.982	0.978	0.974
75	0.986	0.983	0.979	0.975
80	0.987	0.984	0.980	0.976
85	0.987	0.985	0.981	0.977
90	0.988	0.985	0.982	0.978
95	0.989	0.986	0.983	0.979
100	0.989	0.987	0.984	0.981

Izvor: Filliben (1975)

Tabela D.16. Test PPCC: kritične vrednosti statistike r za saglasnost sa Gumbelovom raspodelom za prag značajnosti α i obim uzorka n .

n	Prag značajnosti α			
	0.1	0.05	0.01	0.005
10	0.9260	0.9084	0.8630	0.8440
20	0.9517	0.9390	0.9060	0.8860
30	0.9622	0.9526	0.9191	0.9008
40	0.9689	0.9594	0.9286	0.9141
50	0.9729	0.9646	0.9389	0.9263
60	0.9760	0.9685	0.9467	0.9334
70	0.9787	0.9720	0.9506	0.9428
80	0.9804	0.9747	0.9525	0.9403
90	0.9819	0.9764	0.9554	0.9470
100	0.9831	0.9779	0.9596	0.9517
200	0.9898	0.9866	0.9763	0.9699

Izvor: Vogel (1986)

INDEKS POJMOVA

- ADCP (Acoustic Doppler Current Profiler), 89, 95
Albedo, 22
Alternativna hipoteza, 148
Aritmetička sredina, 146
Atmosfera, 1, 13
Atmosferski pritisak, 15
Autokorelacija, 169
Baza hidrograma, 115, 254
Bazni oticaj. *Vidi* Oticaj, bazni
Bilans
 energije, 46
 zračenja u atmosferi, 18
Bilans voda, 10, 262
 globalni, 3
 kratkoročni, 11
 u retenzionim prostorima, 110
 višegodišnji, 11
Binomna raspodela, 149, 204
Blok kiša, 305, 326
Bovenov odnos, 48, 49, 52
Brzina vetra, 54
Brzina vode, 82, 83
Bujični vodotok, 81, 313
Ciklične promene, 170, 282
Ciklus oticaja, 6, 77, 221
CN (broj krive), 232, 324, 327
 za sliv, 232
Darsijev zakon, 66
Darsijeva brzina, 65, 75
Dekompozicija sliva, 261, 326
Digitalni model terena, 124
Dijagram verovatnoće, 190, 200
 eksponencijalne raspodele, 193
 Gumbelove raspodele, 192
 log-normalne raspodele, 192
 normalne raspodele, 190
Dinamička jednačina. *Vidi* Jednačina održanja količine kretanja
Direktni oticaj. *Vidi* Oticaj, direktni
Disperzija, 138
 uzoračka, 146
Donor, 274, 286
Dubina vode, 82, 84
Dužina glavnog toka, 256
Dvostruka sumarna linija, 283
Dženkinsonova raspodela. *Vidi* Uopštena raspodela ekstremnih vrednosti
Efektivne padavine, 81, 120
 efektivna kiša, 225, 324
 metoda SCS, 231, 324, 327
Efluentni vodotok, 75, 80
Eksponencijalna raspodela, 160, 193
Elementarni protok, 95
Empirijska raspodela, 183, 194, 319
Evapotranspiracija, 46, 53, 81, 117, 222
 merenje, 56
 metoda Hargriva, 55
 metoda Penman-Montit, 54
 potencijalna, 46, 53
 referentna, 46, 54
Faktor prostorne redukcije kiše, 310, 312
Fi-indeks, 226
Filtracija, 61
Fišerova F-raspodela, 176, 219
Fizičke karakteristike sliva, 221, 237, 256, 323, 325
Formula potpune verovatnoće, 130, 292
Frekvencija, 129, 141
 apsolutna, 141
 kumulativna relativna, 142
 relativna, 129, 141
Frudov broj, 85
Funkcija gubitaka, 226

- Funkcija raspodele verovatnoće, 133
 Gama raspodela, 155, 277
 Gasna tehnika za merenje vodostaja, 92
 Geografski informacijski sistemi (GIS), 124
 GEV raspodela. *Vidi* Uopštena raspoela ekstremnih vrednosti
 Granica sliva. *Vidi* Vododelnica
 Gubici, 81, 120, 225, 324
 početni gubitak, 227, 231, 324, 327
 Gumbelova raspodela, 158, 192, 198, 201, 320
 Gustina raspodele verovatnoće, 133
 Hidraulički radijus, 87, 263
 Hidrogram, 101, 108, 112, 261
 elementi, 115
 godišnji, 112
 talasa velikih voda, 114, 314
 Hidrologija, 1
 inženjerska, 5, 9
 Hidrološka godina, 10, 276
 Hidrološki ciklus, 1, 6, 7, 59
 Hidrološki nizovi, 169
 Hidrološki potpisi, 274
 Hidrološki režim, 273
 Hidrometrija, 89
 Hidrometrijsko krilo, 92
 Hidrosfera, 1
 Hijetogram, 38, 239
 Hipsometrijska kriva, 122
 Homogeni region, 274, 323
 Homogenost, 140, 169, 278, 282, 320
 Hortonov površinski oticaj, 78
 Hortonova jednačina infiltracije, 72, 228
 Hrapavost, 83, 86, 98
 HTP (zavisnost), 300, 302, 309, 310, 324
 Indeks baznog protoka, 288, 289
 Indeks disperzije, 204
 Indeksna metoda, 274, 322
 Infiltracija, 2, 59, 69, 81, 222
 infiltracioni kapacitet, 70
 merenje, 72
 potencijalna, 70, 228
 Influentni vodotok, 75, 80
 Intenzitet kiše, 38, 241, 301, 305
 vremenski raspored, 38, 115, 297
 Intercepcija, 2, 81
 Interval poverenja
 kvantila, 200
 računskih velikih voda, 321
 regresione prave i prognoziranih vrednosti, 215
 Inženjerska hidrologija, 5
 Isparavanje, 1, 7, 45, 71
 merenje, 56
 sa kopna, 45
 sa slobodne vodene površine, 45, 49
 Isparitelj klase A, 56
 ITP (zavisnost), 301, 305, 310, 324
 Izdan, 72
 arteska, 73
 freatska, 73
 pod pritiskom, 73
 sa slobodnom površinom, 73
 Izlazni profil sliva, 6, 81, 112, 121, 221, 237, 241
 Izohijete, 41, 312
 Izohrone, 238
 Izuzeci, 181, 320
 detekcija, 181
 postupanje sa izuzecima, 182
 Jedinični hidrogram, 246, 253
 identifikacija, 248
 osnovne pretpostavke, 246
 primena, 250
 princip proporcionalnosti, 247
 princip superpozicije, 247
 Jednačina kontinuiteta. *Vidi* Jednačina održanja mase
 održanja mase
 Jednačina održanja energije, 10, 82, 86
 količine kretanja, 82, 262
 mase, 10, 82, 262, 266
 Kalibracija
 hidrometrijskog krila, 89
 modela padavine-oticaj, 223, 237, 325
 Kapilarna zona, 61
 Kapilarni potencijal, 64
 merenje, 69
 Kinetička energija, 84
 Kiša. *Vidi* Padavine
 Kišomer, 32
 neregistrujući, 32
 registrujući, 32
 Klasni intervali, 105, 141
 Klima, 15
 oscilacije, 170, 282
 Koeficijent asimetrije, 139
 uzorački, 146
 Koeficijent filtracije, 66, 228
 Koeficijent korelacije
 Pirsonov, 210
 rangova (Spirmanov), 210
 Koeficijent oticaja, 120, 227, 241
 Koeficijent spljoštenosti, 139

- Koeficijent varijacije, 138, 277
 uzorački, 146
 Koincidencija, 319
 Kompromisna verovatnoća, 184
 Filibenova formula, 197
 Gringortenova formula, 198
 Hejzenova formula, 185
 Kunanova formula, 185
 uopštena formula, 185
 Vejbulovala formula, 184, 319
 Kondenzacija, 17
 Konvolucija
 integral, 248
 zbir, 248
 Korelacija, 209
 Kota nule, 90
 Kritična dubina, 84, 89
 Kritični nagib dna, 86
 Kriva površine akumulacije, 266
 Kriva pritiska vodene pare, 17
 gradijent, 17, 52, 54
 Kriva protoka, 89, 97
 ekstrapolacija, 98
 Kriva trajanja, 104, 274, 275, 280, 286, 288, 290
 Kriva zapremine akumulacije, 266
 Kumulativna kriva standardizovanih protoka, 283
 Kvantil, 139, 186, 291, 292
 uzorački, 146
 Kvartil, 140
 Kvazistacionarna metoda, 265
 Latentna toplota isparavanja, 48, 55
 Limnigraf, 92
 Linearni rezervoar, 264
 Linija dna, 86, 87
 Linija energije, 86, 87
 nagib, 86, 263
 Linija nivoa, 86, 87
 Lizimetar, 57
 Log-normalna raspodela, 153, 192, 198, 201, 277, 291, 320
 Log-Pirsonova raspodela III tipa, 157, 202, 291, 320
 Male vode, 273, 287
 Malovodni period, 287, 293
 Maningov koeficijent hrapavosti, 87, 260, 263
 Maningova formula. *Vidi* Šezi-Maningova formula
 Matematičko očekivanje, 136
 Medijana, 137
 uzoračka, 146
 Međusliv, 261
 Merenje, 9
 brzina, 92
 evapotranspiracije, 56
 infiltracije, 72
 isparavanja, 56
 kapilarnog potencijala, 69
 nivoa podzemnih voda, 75
 nivoa vode, 90
 protoka, 89, 221
 vlažnosti vazduha, 18
 vodostaja, 90
 zemjišne vlage, 68
 zračenja, 20
 Merni objekti, 89
 Merodavna velika voda, 314
 Meteorološki radar, 35
 Meteorološki satelit, 35
 Metoda brzina-površina, 89, 97
 Metoda Hargriva, 55
 Metoda izohrona, 238, 243
 Metoda Maskingama, 264
 Metoda najmanjih kvadrata, 212
 Metoda Penman-Montit, 54
 Metoda prekoračenja preko praga, 206, 318, 321
 Mod, 137
 Model padavine-oticaj, 221, 223, 270, 325, 328
 kalibracija, 223
 komponente, 224
 parametri modela, 223
 podela, 223
 Modeliranje, 9
 Modul oticaja. *Vidi* Specifični oticaj
 Modulni koeficijenti, 278
 Momenti raspodele verovatnoće, 137
 oko koordinatnog početka, 137
 oko sredine, 137
 Nagib glavnog toka
 prosečan, 123
 uravnati, 123, 256
 Naizmenični blokovi, 307
 Nepristrasna ocena, 146, 213
 Nezasićena sredina, 60, 61, 65
 Nivo podzemnih voda, 61, 74, 80
 Nivo vode, 89
 Nivogram, 101
 Niz
 godišnjih ekstrema, 171
 godišnjih maksimuma, 172, 318, 319, 321

- godišnjih minimuma, 173, 291
 godišnjih prekoračenja, 172
 prekoračenja preko praga, 172, 321
 Normalna dubina, 86
 Normalna raspodela, 151, 190, 197, 200, 277
 Nulta hipoteza, 148
 Obezbeđenost, 172, 173, 273
 Osetna toplota, 47
 Oticaj, 7, 77, 112, 275
 bazni, 75, 80, 112, 114, 119, 224, 289, 325
 direktni, 80, 114, 119, 224, 225, 325
 komponente, 77
 mehanizmi formiranja, 78
 od topljenja snega, 79
 odvajanje baznog i direktnog, 119
 podzemni, 2, 7, 59, 77, 79
 potpovršinski, 2, 7, 59, 77, 79
 površinski, 2, 7, 77, 78
 unutargodišnji režim, 112, 275, 278, 286
 veza između padavina i oticaja, 114, 221
 Otvoreni tokovi. *Vidi* Tečenje u vodotoku
 Padavine, 2, 6, 29, 57, 74, 221
 formiranje, 29
 intenzitet. *Vidi* Intenzitet kiše
 merenje, 32
 obrada podataka, 36
 prosečna visina kiše na slivu, 41
 prostorna neravnomernost, 116, 297, 298
 unutargodišnji režim, 31
 vremenska neravnomernost, 298, 324, 326
 zapremina kiše pale na sliv, 41
 Papir verovatnoće. *Vidi* Dijagram verovatnoće
 Pardeovi koeficijenti, 278
 Perkolacija, 2, 57, 59
 Pijezometarska kota, 84
 Pirsonova raspodela III tipa, 156, 198, 201
 Pišov (Piche) isparitelj, 56
 Pluviograf, 32
 sa klackalicom, 34
 sa plovkom, 34
 težinski, 34
 Poduzni profil vodotoka, 81, 123
 Podzemne vode, 2, 61, 72
 zalihe, 288, 289
 Pokretne sredine, 282, 291
 Poljski kapacitet, 63
 Poplave, 313
 Poprečni presek vodotoka, 81
 energija toka u preseku, 84
 Populacija, 140
 Porozna sredina, 60
 Poroznost, 61
 efektivna poroznost, 62
 Potencijalna energija, 84
 Povratni period, 173, 186, 291, 300, 311, 314, 315, 321
 nizova prekoračenja preko praga, 321
 velikih voda, 325
 Prag značajnosti, 148
 Prethodna vlažnost sliva, 221, 233, 325
 Prirodni vodotok, 81, 82
 Pritisak vodene pare, 16, 51, 52, 55
 pri zasićenju, 17, 51, 52, 55
 Propagacija hidrograma. *Vidi* Transformacija talasa
 Prostorna redukcija kiše, 310, 311
 Protokol, 83, 84, 97
 elementarni, 95
 proračun na osnovu izmerenih brzina, 95
 srednji protokol, 103
 veza između vodostaja i protoka, 97
 Psihometrijska konstanta, 49, 55
 Puasonova raspodela, 150, 204
 Racionalna metoda, 241, 326
 Računska kiša, 297, 317, 324
 neravnomernog intenziteta, 305, 324, 326
 oblik, 305
 sintetički oblici, 306
 statistički oblici, 306, 308
 Računska velika voda, 314
 na osnovu računskih kiša, 324
 ocena, 317
 Radijacija. *Vidi* Zračenje
 Raspodela verovatnoće, 131, 172, 184, 277, 292, 317
 diskretne promenljive, 131
 kontinualne promenljive, 133
 teorijske raspodele, 149
 Raspodele ekstremnih vrednosti, 157
 Raspon niza, 141
 Raspored brzina
 na vertikalni, 94
 u poprečnom preseku, 82, 83
 Recesiona grana hidrograma, 114, 119, 288
 Recesioni koeficijent, 119, 288
 Rečno korito, 81, 83, 84
 Redukcione krive računskih kiša, 311, 324
 Regionalna statistička analiza, 319, 322

- Regionalne zavisnosti, 274, 284, 295, 323, 326
 Regresija
 nelinearna, 211
 prosta linearna regresija, 211
 višestruka, 211, 219
 Regresiona analiza, 211, 274
 Regresioni koeficijenti, 211, 212
 Relativna vlažnost vazduha, 18
 Rezidual, 211, 214, 219
 Ričardsova jednačina, 68, 72, 228
 Rizik, 172, 314, 315
 Sadržaj vodene pare u vazduhu. *Vidi* Vlažnost vazduha
 Sadržaj zemljišne vlage. *Vidi* Zemljišna vlaga
 SCS (Soil Conservation Service), 231, 254
 metoda za efektivnu kišu, 231, 324, 327
 sintetički jedinični hidrogram, 254
 Sen-Venanove jednačine, 88
 Sintetički jedinični hidrogram, 253, 325, 326
 po Jovanoviću i Brajkoviću, 255, 325
 po metodi SCS, 254
 Sliv, 6, 121
 fizičke karakteristike, 117
 geomorfološke karakteristike, 121
 izučen, 9, 274
 nagib, 118, 122
 neizučen, 9, 274, 284, 294, 317
 oblik, 118
 prosečna nadmorska visina na slivu, 122
 reljef, 122
 veličina, 121, 222
 Sloj oticaja, 81, 276
 Slučajna promenljiva, 131
 višedimenzionalna, 135
 Slučajni događaj, 128
 Slučajno odstupanje. *Vidi* Rezidual
 Slučajnost, 140, 320
 Sneg, 29, 75, 79, 115
 Specifična energija, 84
 Specifični oticaj, 276, 284
 velikih voda, 326
 Srednja brzina
 na vertikalni, 95
 u poprečnom preseku, 84, 96
 Srednja vrednost, 137, 283
 Srednje vode, 273
 Srednji mesečni protokol, 278
 Srednji protokol, 103, 274, 275, 276, 281, 284
 Standardna devijacija, 138, 277, 283
 uzoračka, 146
 Standardna greška
 regresije, 214
 regresionih koeficijenata, 213
 Statistička analiza, 183
 diskretnih promenljivih, 204
 malih voda, 291, 292, 293
 srednjih voda, 277
 velikih voda, 317, 318
 visina kiše, 300
 Statistički testovi, 148, 171, 284
 Bartelsov test, 179
 F-test, 176, 284
 Grubs-Bek test za izuzetke, 181
 homogenosti, 149, 174
 Kolmogorov-Smirnov test homogenosti, 177, 284
 Kolmogorov-Smirnov test saglasnosti, 196, 199, 320
 Kramer - fon Mizes test, 197, 199, 320
 Men-Kendal test, 179, 284
 Men-Vitni test, 177, 284
 neparametarski, 148, 174
 parametarski, 148, 174
 Pirsonov χ^2 -test, 195
 postupak testiranja, 148
 PPCC test, 197
 približni t-test, 176
 saglasnosti, 149, 195, 199
 slučajnosti, 149
 test kvadrata uzastopnih razlika, 178
 Tidžen-Mur test za izuzetke, 182
 t-test, 175, 284
 značajnosti linearnog trenda, 180, 213
 značajnosti regresionih koeficijenata, 213
 z-test, 174, 284
 Statistika (funkcija uzorka), 141, 146
 Statistika (nauka), 140
 Stepen zasićenja, 62
 efektivni stepen zasićenja, 62
 Stohastička hidrologija, 9
 Studentova t-raspodela, 175, 176, 213
 Sumarna linija kiše, 38
 Sumarna linija zapremine, 108
 Suša, 287
 Šeži-Maningova formula, 87, 262
 Širina vodenog ogleđala, 85, 95
 Tačka rose, 17
 Tačka trajnog uvenuća, 63
 Tariranje hidrometrijskog krila. *Vidi* Kalibracija hidrometrijskog krila
 Tečenje u vodotoku, 81, 225
 burno, 82, 85, 87

- jednoliko, 82, 86, 89
 laminarno, 82
 linijsko tečenje, 83
 mirno, 82, 85, 87
 nejednoliko, 82, 87
 neustaljeno, 82, 88
 prostorno tečenje, 83
 ravansko tečenje, 83
 turbulentno, 82, 83
 ustaljeno, 82, 86
 Temperatura vazduha, 17, 25, 52, 55
 Teorijske raspodele verovatnoće, 149
 ekstremnih vrednosti, 157
 izbor, 198
 ocena parametara, 163
 prilagođavanje, 163
 proračun, 186
 uslovi primenljivosti, 198
 Testiranje statističkih hipoteza. *Vidi*
 Statistički testovi
 Tisenovi poligoni, 41, 310, 311
 Trajanje. *Vidi* Kriva trajanja
 Trajanje kiše, 297
 izbor računskog trajanja, 326
 Trajanje Sunčevog sjaja, 21
 Transformacija talasa
 u rečnoj mreži, 225, 262
 u retenzionim prostorima, 225, 265
 Transpiracija, 2, 45, 71
 Traser, 75, 80, 89
 Trend, 170, 282
 Učestalost. *Vidi* Frekvencija
 Uopštena raspodela ekstremnih vrednosti,
 157, 198, 202, 291, 320
 Urbana hidrologija, 7
 Uslovna verovatnoća, 130, 292
 Uzorak, 140
 obim, 140
 prost slučajni, 140
 realizovani, 140
 Varijansa. *Vidi* Disperzija
 Vejbuloва raspodela, 159, 198, 291
 Velike vode, 273, 313
 uzroci pojave, 313
 Verovatno maksimalne padavine, 327
 Verovatno maksimalne vode, 327
 Verovatnoća, 128
 klasična definicija, 128
 neprevazilaženja, 133, 292
 prevazilaženja, 133, 172, 278, 315
 prevazilaženja tokom projektovanog
 veka objekta, 316
 statistička definicija, 129
 Vertikala, 93
 Vetar, 26
 merenje brzine, 26
 ruža vetrova, 27
 Vlažnost vazduha, 16
 apsolutna vlažnost, 16
 merenje, 18
 pritisak vodene pare, 16
 relativna, 18
 specifična vlažnost, 16
 Vlažnost zemljišta. *Vidi* Zemljišna vlaga
 Vododelnica, 6, 121, 222
 hidrološka, 6, 121
 topografska, 6, 121
 Vodomerna letva, 90
 Vodostaj, 89, 90, 97
 Vreme kašnjenja, 254, 255, 256
 Vreme koncentracije, 238, 239, 241, 259
 Vreme opadanja hidrograma, 115, 254, 255,
 256
 Vreme porasta hidrograma, 115, 254
 Vreme putovanja vode, 237
 Vremenske serije, 169
 Vreme-površina (dijagram), 238
 Zapremina oticaja, 101, 120, 222, 225, 276,
 288, 289
 Zasićena sredina, 61
 Zemlja
 rezerve vode na Zemlji, 3
 zračenje (izračivanje), 18
 Zemljišna vlaga, 57, 60, 62
 merenje, 68
 Zona aeracije. *Vidi* Nezasićena sredina
 Zona saturacije. *Vidi* Zasićena sredina
 Zračenje
 atmosfere, 18
 dugotalasno, 19, 22
 kratkotalasno, 18, 22
 merenje, 20
 na granici atmosfere, 20, 55
 neto, 22, 47, 54
 Sunca, 1, 18
 Zemlje, 18